確率・統計

講義ノート２０１９演習

koko ここまでは、18-ps.pdf とほぼ同じ。
以下は 18-td.txt、問題のみ切り出したもの。
toi をリセット

第1章　1~ 6章の問題と解(確率)

1.1　基礎概念

p.4

問 1 赤球２個，白球１個の入った箱から次のようにして *2*個の球を取り出すとき，赤球 *2*個が取り出される確率を次の各々の場合に求めよ。

（１）１個取り出してもとに戻し，さらに１個取り出す。

（２）１個取り出して，もとに戻さずにまた１個取り出す。

（３）同時に２個の球を取り出す。

問１（１）$\frac{4}{9}$ （２）$\frac{1}{3}$ （３）$\frac{1}{3}$

問 2 *(1)*A, A, A, B, C の *5* 文字を一列に並べる並べ方は何通りあるか。

(2) サイコロを *10*回投げる。*1*の目が *1*回、*3*の目が *4*回、*6*の目が *2*回、残り *3*回が他の目が出る確率はいくらか。

問２ (1) $\frac{5!}{3!1!1!}$ (2) $\frac{10!}{1!4!2!3!}\frac{1}{6^{10}}$

問 3 *(1)* 1、2、3、4、5、6、7、8、9 の *9*個の数字から *1*つづつ数字を選び *4*桁の整数をつくる。千のくらい、百のくらい、十の くらい、一のくらいをそれぞれ a, b, c, d とする。$a < b < c < d$ をみたす整数はいくつあるか。

(2) 1、2、3、4、5、6、7、8、9 の *9*個の数字から重複を許して *4*個を選んで *4*桁の整数をつくる。$a \leq b \leq c \leq d$ をみたす整数はいくつあるか。ただし、*4*つの数字の中に使われない数字があってもよい。

問３ (1) ${}_9C_4$ (2) ${}_{9+4-1}C_4 = {}_{12}C_4$

問 4 りんご，なし，もも　の *3* つのフルーツから，重複を許して *5* 個選ぶ。選び方は何通りあるか求めよ。ただし，一つも選ばれないものがあってもよいとする。

問4 ${}_7C_2$

問 5 A, B を事象とする。$A = (B \cap A) \cup (B^c \cap A)$，$(B \cap A) \cap (B^c \cap A) = \emptyset$ であることに注意して，下の問いに答えよ。

（1） $P(A) = 0.3, P(B \cap A) = 0.2$ であるとき，$P(B^c \cap A)$ をもとめよ。

（2） $P(A) = 0.3, P(B \cap A) = 0.2, P(A^c \cap B) = 0.4$ であるとき，$P(A \cup B)$ をもとめよ。

問5 （1）0.1 （2）0.7

問 6 $P(A) \geq \frac{1}{3}, P(B) \geq \frac{1}{4}, P(A \cup B) \leq \frac{1}{2}$ のとき，$P(A \cap B) \geq \frac{1}{12}$ を示せ。

問6 略

1.1.1　確率の基本2

p.8

問 7 次の確率計算は実験にあうか。

（1）明日の天気は，雨が降るか（A），降らないか（A^c）のどちらかである。よって，$P(A) = 1/2$。

（2）水野は矢島を好きか（A），好きでないか（A^c）のどちらかである。よって，$P(A) = 1/2$。

問7 略

N 個の箱に r 個の玉を入れる問題

＜仮定 I ＞　1つの玉がどの箱に入るかは同等に確からしく、各々$1/N$ である。

次のように書いても同じ：

＜仮定 I' ＞　いろいろな玉の入れ方は全部で N^r 通りあるから、これらの書く場合を同等に確からしいと仮定して、各々$1/N^r$ とする。

これは重複順列 ${}_N\Pi_r = N^r$ 個の場合をすべて同等とみなす立場。

この仮定は，箱を空間の小領域、玉を気体の分子と見たときに,「マックスウエル-ボルツマンの統計」とよばれる。しかし、この統計（確率の決め方）では実験にあわなかった（黒体輻射の実験を説明できない)。

＜仮定 II ＞　玉は区別がつかない。

区別がつくのは、どの箱に何個づつ玉が入っているか、という様相のみである。したがって、重複組み合わせ（異なる N 種類のものから重複を許して r 個とる組み合わせ）${}_NH_r = {}_{N+r-1}C_r$ 個の場合をすべて同等とみなす立場。言い換えると、

＜仮定 II' ＞　玉の盛り分け方は全部で ${}_NH_r$ 通りあり、それらをすべて同等とする。

問 8　例えば、$N = 3, r = 2$ ならば、${}_3H_2 = {}_{3+2-1}C_2 = 6$。これら *6* 通りをすべて書き出せ。

問 8 略

＜仮定 III ＞　1 つの箱に玉は 1 つしか入らない

とする。この場合には重複を許さない組み合わせ ${}_NC_r$ 通りの場合がある。言い換えると、

＜仮定 III' ＞　玉の盛り分け方は全部で ${}_NC_r$ 通りあり、それらをすべて同等とする。

この仮定は、電子や陽子（フェルミ粒子）を取り扱うときに用いられ,「フェルミ-ディラクの統計」とよばれる（この場合実験に当てはまる)。(物理では＜仮定 III ＞は,「パウリの排他原理」（異なる粒子は同時に同一状態を取ることはない）に対応する。)

問 9　$N = 4, r = 3$ とする。仮定 I – III のもとで同等に確からしい場合を、各々すべて書き出せ。

問 9 略

p.10 (問題 1~)

問 10　2つのさいころを同時に投げる試行を T とし，出た目の数の和を X とする。試行 T を *10* 回反復して行ったとき，$X=7$ となるのが 9 回である確率をもとめよ。

問 10 ${}_{10}C_9(\frac{1}{6})^9 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5^2}{2^9 \cdot 3^{10}}$

問 11　A さん, B さん, C さんの３人がじゃんけんをして勝者を１人選ぶ。３人あいこならばじゃんけんを繰り返し，２人勝ちならば勝った２人で決戦をするものとする。次の確率をもとめよ。

（１）A さんが１回目で優勝する確率
（２）A さんが２回目で優勝する確率
（３）A さんが３回目で優勝する確率
（４）３回目が終わっても勝者が決まらない確率

問 11　（１）$\frac{1}{9}$　（２）$\frac{1}{9}$　（３）$\frac{5}{81}$　（４）$\frac{4}{27}$

問 12　n を *2* 以上の整数とする。中の見えない袋に $2n$ 個の玉が入っていて，そのうち *3* 個が赤で残りが白とする。A さんと B さんが，A さんから始めて交互に *1* 個ずつ玉を取り出し，先に赤の玉を取り出したほうが勝ちとする。ただし，取り出した玉は袋に戻さないとする。B さんが勝つ確率をもとめよ。

問 12 $\frac{4n-5}{4(2n-1)}$

問 13　「幸福な家庭はみな同じように似ているが，不幸な家庭は不幸なさまもそれぞれ違うものだ」(「アンナ・カレーニナ」トルストイ）という命題について，確率論の観点から解説せよ。

問 13　略

問 14 n を *4* 以上の整数とし、$1, 2, ..., n$ の数字がそれぞれ *1* つづつ書かれた n 枚のカードが箱に入っている。この箱から 4 枚のカードを同時に取り出し、それらを無作為に横 *1* 列に並べる。このときカードの数字が小さい順に並んでいる確率を求めよ。

問 14 $\frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$

1.2　条件つき確率

p.15 (問 10~)

問 15 １枚の硬貨を３回投げ，表が出た回数を X とする。次にさいころを X 回投げる。そうして，１または２の目が出た回数を Y とする。ただし，$X = 0$ の場合には，$Y = 0$ ときめる。$Y = 0$ という条件のもとで，$X = 2$ である条件つき確率をもとめよ。

問 15 $\frac{36}{125}$

問 16 ある病気 B の患者３００人のうち２００人は喫煙者である。また全人口のうち喫煙者の割合は３０％である。喫煙者は非喫煙者に比べてどのくらい病気 B にかかりやすいか。

問 16 $\frac{14}{3}$ 倍

問 17 事象 A が自分自身と独立になるとき $P(A) = 0\ or\ 1$ であることを示せ。

問 17　略

問 18 区別のできる *2* つのさいころを同時に投げる試行を行う。
はじめのさいころの目が４であると言う事象を A、
2 つめのさいころの目が２であると言う事象を B、
2 つのさいころの目の和が３であると言う事象を C、
2 つのさいころの目の和が９であると言う事象を D、

*2*つのさいころの目の和が7であると言う事象を E とおく。

（1）A と B は独立か。

（2）A と C は独立か。

（3）A と D は独立か。

（4）A と E は独立か。

問18 （1）独立である（2）独立でない（3）独立でない（4）独立である

問 19 ある事件で，本当のことを言う確率が *80*％である証人 X_1, X_2, X_3 がいる。いま3人とも「Yが犯人だ」と証言した。本当に Yが犯人である確率はいくらか。ただし，Yは上の3人とは別人である。

問19 $\frac{\frac{1}{2}((\frac{4}{5})^3)}{\frac{1}{2}((\frac{1}{5})^3+(\frac{4}{5})^3)} = \frac{64}{65}$

問 20 鳥インフルエンザ検査の正確さが *98%* だとする。つまり、鳥インフルエンザにかかっている鶏がこの検査を受けた場合に陽性と出る確率が *98%* であり、鳥インフルエンザにかかっていない鶏がこの検査を受けた場合 *98%* の確率で陰性と出る。さらに、実際に鳥インフルエンザにかかっている鶏の割合は *0.5%* だとする。

ある鶏がこの検査を受けたところ、結果は陽性であった。この鶏が鳥インフルエンザにかかっている確率はいくらか。

問20 $\frac{49}{248}$

問 21 ある製品を製造する工場 A, B があり，A 工場の製品には *5*％，B 工場の製品には *3*％の不良品が含まれている。A 工場の製品と B 工場の製品を *2* : *3* の比で混ぜた中から1個を取り出すとき

（1）それが不良品である確率を求めよ。

（2）不良品であったとき，それが A 工場の製品である確率を求めよ。

問21 （1）$\frac{19}{500}$ （2）$\frac{10}{19}$

問 22 各問が *3* つの選択肢からなる小問が *10* 問ある。この選択肢のうち *1* つが正解で他の *2* つは不正解である。受験者は理解している問いには正しい選択肢を選び，理解していないものについてはでたらめに（すなわち各選択肢を等確率で）選んで解答する。

ある受験者がちょうど *7* 問正解したとき,「この受験者はどの問にもでたらめに回答した」という判断が正しい確率を次のようにしてもとめよう。

（1）A を「受験者がちょうど *7* 問正解した」という事象とし，$B_i, i = 0, ..., 10$ を「この受験者がちょうど i 問正解を知っていた」という事象とする。$P(A|B_i)$ をもとめよ。ただし，$P(A|B_8) = P(A|B_9) = P(A|B_{10}) = 0$ とする。

（2）$P(B_0) = \cdots = P(B_7)$ という仮定のもとで，問題の確率を

$$P(B_0|A) = \frac{P(B_0 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_0).P(A|B_0)}{\sum_{i=0}^{7} P(B_i).P(A|B_i)}$$

により計算せよ。

問 22 （1）$P(A|B_i) = {}_{10-i}C_{7-i}(\frac{1}{3})^{7-i}(\frac{2}{3})^3, i = 0, ..., 7$
（2）$\frac{120}{({}_{10}C_7 + 3{}_9C_6 + ... + 1 \cdot 1)}$

問 23 E 君は一目ぼれの彼女に熱烈なメイルを出したが、ついに返事は来なかった。ただし出した先は私信のメールもチェックするので悪名高い女子寮で、検閲に引っかかって彼女のもとに渡らない確率が *0.3,* 彼女がそれを見ても一笑に付してメイルを削除する確率が *0.5,* 見て好意を抱いてくれても羞恥心から返事を書かない確率が *0.7* である。E 君にはどれくらいの確率で望みが残されているか。

問 23

1.3　平均と分散

p.25 (問)

問 24 さいころを投げて出た目の数だけ得点がもらえるゲームがある。ただし、出た目が気に入らなければ *1* 回だけ投げなおすことができる。このゲームでもらえる得点の期待値が最大になるように振舞ったとき、その期待値を求めよ。

問 24 $\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}+\frac{1}{6}(4+5+6)=\frac{17}{6}$

p.23 (例題 6)

問 25 さいころを 2 回投げて，出る目の数の和を X とする。X の分布の分散 $V(X)$ を求めよ。

問 25 7, $\frac{35}{6}$

p.27 (例 11)

問 26 確率変数 X のとる値 x の範囲が $1\le x\le 3$ で，その密度関数 $\rho(x)$ が

$$\rho(x)=-\frac{3}{4}x^2+3x-\frac{9}{4}\quad(1\le x\le 3)$$

で与えられるとき，X の平均と分散をもとめよ。

問 26 順に 2, $\frac{1}{5}$

p.27 (問 15)

問 27 確率密度関数 $\rho(x)$ がつぎで与えられる確率分布にしたがう確率変数の期待値（平均），分散，標準偏差をもとめよ。

（1） $\rho(x)=\frac{1}{\beta-\alpha}$ $(\alpha\le x\le\beta)$

（2） $\rho(x)=\frac{3}{4}(1-x^2)$ $(-1\le x\le 1)$

問 27 (1) $\frac{(\beta+\alpha)}{2}$, $\frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}$ (2) 0, $\frac{\sqrt{5}}{5}$

問 28 同じ設定で $V(aX+b)=a^2V(X)$,　a,b は定数 を示せ。

問 28 略

問 29 同じ設定で $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ を示せ。

問 29 略

p.31

問 30 次をしめせ。
（１）$A_1,...,A_n$ を事象とするとき

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \le \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

（２）A,B,C を事象とするとき

$$P(A\cap B\cap C) \ge 1-P(A^c)-P(B^c)-P(C^c)$$

問 30 (1)
(2)

問 31 *(p.31)* 上の４つが同値であることを証明せよ

問 31 略

p.31 (問題)

問 32 原点 O を出発して，数直線上を動く点 P がある。さいころを投げて，５か６の目が出れば P は＋ *1* だけ移動し，それ以外の目が出れば P は− *1* だけ移動する。この試行を *10* 回繰り返した後の，点 P の座標を X とする。
（１）X の期待値（平均）と分散を計算せよ。
（２）X^2 の期待値（平均）を計算せよ。

問 32 （1）$-\frac{10}{3}, \frac{80}{9}$ （2）20

問 33 *10* 枚のカードがあり、その各々に *0*, *2*, *6* のいずれかの数を記入する。これら *10* 枚のカードから 1 枚を選び，そのカードに記された数を X とするとき，その平均が *3* で分散が *6* 以下になるようにしたい。数 *0*, *2*, *6* の記されたカードの枚数をそれぞれいくらにすればよいか。

問 33 順に 1 枚，6 枚，3 枚

問 34 X は連続分布に従う確率変数で，その密度関数が

$$\rho(x) = C\frac{1}{(1+|x-1|)^5}$$

で与えられるとする。ただし，C は正定数である。

（1）定数 C を計算せよ。

（2）X の期待値と分散を計算せよ。

（3）$|X| \leq 1$ となる確率を計算せよ。

問 34 （1）2 （2）1, $\frac{1}{3}$ （3）$\frac{40}{81}$

問 35 集団の中から無作為に *13* 人を選ぶとき，日曜日生まれの人の数を X，土曜日生まれの人の数を Y とする。ただし，どの曜日に生まれる確率も $\frac{1}{7}$ とする。

（1）$X = k, Y = m$ となる確率 $P(X = k, Y = m)$ を k, m の式として表せ。ただし，$k \geq 0, m \geq 0, k+m \leq 13$ とする。

（2）$P(X = k), P(Y = m)$ をもとめよ。X, Y は独立か。

問 35

問 36 X は離散型または連続型確率分布にしたがう確率変数とし，X の平均 $E[X]$，分散 $V(X)$ ともに有限とする。次をしめせ。

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

問 36 略

問 37 さいころを *2* 回投げ、*1* 回目の目を X, *2* 回目の目を Y とする。$U=X+Y, V=X-Y$ とおく。X と Y は独立か。

p.32 (総合問題)

総　合　問　題

問 38　n を２以上の整数とする。１つのさいころを n 回続けて投げ，同じ目が初めて２回続けて出るまで投げた回数を X とする。ただし，n 回までに続けて同じ目が出なかったときには，$X=n+1$ とする。X の期待値（平均）を求めよ。

問 38 $7-5(\frac{5}{6})^{n-1}$

問 39　*1* 枚の硬貨を投げて，表が出れば A さんに *1* 点を与え，裏が出れば B さんに *1* 点を与える。硬貨を n 回投げるとき，A さんの総得点を X, B さんの総得点を Y とする。２人とも持ち点 *0* から始めるとして

（１）X の確率分布と期待値を求めよ。

（２）$X-Y$ の確率分布と期待値を求めよ。

（３）n 回投げて $X=i$ であったとき，*1* 回目に表が出ていた条件つき確率を，$i=1,2,...,n$ についてもとめよ。

問 39 $(1)_n C_k(\frac{1}{2})^n(2)0(3)\frac{i}{n}$

問 40　１枚の硬貨を６回投げ，各回ごとに表が出たら次の規則にしたがって点を与え，裏が出たらその回は０点として，６回の合計点を X とする。

１回目 $\cdots$ ３点

２, ３回目 $\cdots$ ２点

４, ５, ６回目 $\cdots$ １点

（１）X の期待値（平均）と分散を求めよ。

（２）$P(X=k)$ を $k=2,3,7,8$ について求めよ。

問 40 (1)5, 5(2)$\frac{5}{64}, \frac{8}{64}, \frac{8}{64}, \frac{5}{64}$

問 41　*3* つの箱 A, B, C があり，箱 A には *4* 個の赤球と *2* 個の白球が入っている。箱 B には 1 から 8 までの数字を *1* つづつ書いた札が計 *8* 枚入れてあり，箱 C には 4 から *11* までの数字を 1 つづつ書いた札が計 *8* 枚入れてある。

まず箱 A から球を *1* 個取り出して，もしそれが赤球ならば箱 B から札を *1* 枚取り出し，もしそれが白球ならば箱 C から札を *1* 枚取り出す。このようにして取り出される札の数を X とする。

（1）$3 \leq X \leq 5$ となる確率をもとめよ。

（2）X の期待値（平均）と分散をもとめよ。

問 41
(1)$\frac{3r+2s}{8(r+s)}$(2)$\frac{3(3r+5s)}{2(r+s)}$ ただし $r = 4, s = 2$

問 42　つぼ A には数字 *2, 4, 6, 8* がひとつずつ書かれた札が計 4 枚，つぼ B には数字 *1, 3, 5, 7* がひとつずつ書かれた札が計 4 枚入っている。まず，つぼ A から無作為に *1* 枚取り出しその札に書かれた数を X とする。

もし $X = 8$ ならば，つぼ B から無作為に *1* 枚取り出しその札に書かれた数を Y とする。

もし $X \neq 8$ ならば，つぼ A の残りの *3* 枚から無作為に *1* 枚取り出しその札に書かれた数を Y とする。

$Z = X + Y$ とする。

（1） $E[X]$ および $V(X)$ をもとめよ。

（2）$E[Y]$ および $V(Y)$ をもとめよ。

（3）X と Y は独立か。

（4）$E[Z]$ および $V(Z)$ をもとめよ。

問 42 (1)5 (2)$\frac{67}{12}$ (3) 独立でない (4)$\frac{87}{12}$

1.4　いろいろな分布

p.37 (問 18)

問 43 ○，×で答える 6 つの問題が与えられている。この解答をするのに考えないででたらめに○，×をつけるとき，そのうちの正解数を X とする。X の期待値，分散および標準偏差をもとめよ。

問 43　$3, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}$

問 44 日本人の血液型は，*10* 人に 3 人の割合で O 型である。*5* 人の日本人を任意に選んだとき，そのうちの O 型の人数を X とする。X の期待値，標準偏差をもとめよ。

問 44 $\frac{3}{2}, \frac{21}{20}, \sqrt{\frac{21}{20}}$

p.41 (問 20)

問 45 ある家に *1* 日にかかってくる電話の回数はポアソン分布に従い，その平均は 8（回）である。この家に電話が *1* 日に *10* 回以上かかってくる確率と，*1* 日に高々 4 回しかかかってこない確率をもとめよ。

問 46 あるレンタカーの営業所、には *3* 台の車があり *1* 日単位で貸し出す。レンタカーの需要は *1* 日平均 *2* 台でポアソン分布に従う。*1* 台貸し出すと *7000* 円の収入がある一方、営業所全体の経費として *1* 日あたり *8000* 円かかる。その営業所全体での *1* 日の利益額の期待値を求めよ。

問 46 $3 - e^{-2}$, 4,474 円

1.4.1　連続分布

p.42 (問 22)

問 47 ある電話局管内の電話の通話時間（分）は確率変数 X で表され，その確率密度関数 $\rho(x)$ は

$$\rho(x) = Ce^{-\frac{x}{3}}\ (0 \leq x < 180),\ = 0\ (x \geq 180)$$

である。一方，通話料は $3(n-1) \leq x < 3n$ （n は自然数）の通話時間に対して $10n$ 円である。

（１）定数 C の値をもとめよ。

（２）*1* 回の通話時間の平均をもとめよ。

（３）*1* 回の通話料の平均をもとめよ。

問 47 (1) $\frac{1}{3}$ (2) 3 (3) 42.96

p.46 (問 23)

問 48 ある試験での成績の結果は，平均点 *64* 点，標準偏差 *14* 点であった。得点の分布は正規分布にしたがうとするとき，次の問に答えよ。

（１）得点が *36* 点から *92* 点の者が *400* 人いた。受験者の総数は約何人か。

（２）合格点を *50* 点とすると，約何人が合格することになるか。

問 48 (1) 419 (2) 353

p.47 (問題)

問 49 *50* 歳の夫と *48* 歳の妻が *20* 年後まで生存する確率は，夫が *0.15*，妻が *0.2* である。現在夫が *50* 歳，妻が *48* 歳である夫婦が *10* 組いるとして，このうち *20* 年後に夫婦のうち少なくとも一方が生存している組の数を X とする。X が二項分布に従うとして，X の期待値，標準偏差をもとめよ。

問 49 3.2, 1.475

問 50 *2* じゃがいもの山積みがあって，その不良品率は *10%* である。この中からでたらめに *25* 個取り出すとき

（1）不良品がちょうど 3 個含まれる確率をもとめよ。

（2）良品が少なくとも *20* 個含まれる確率をもとめよ。

（3）良品が *20* 個以下である確率をもとめよ。

問 50 (1) $\frac{125}{48}e^{-\frac{5}{2}}$
(2) $\frac{49815}{3840}e^{-\frac{5}{2}}$
(3) $1-\frac{41690}{3840}e^{-\frac{5}{2}}$

追加：

3 人口 100 万人のある県では，ある病気 B の発生が 1 年間に平均 10 件みられる。この県で病気 B にかかる人が 1 年間に 2 人以下である確率をもとめよ。

問追加　$61e^{-10}$

追加：

4 E 大学で花粉症が流行し，対策に追われた当局は花粉の数を調べるため構内に 10000 個の観測皿を設置してその中の花粉数を調べた。その結果，10000 個の観測皿のうち花粉が 2 個入っていたものが 109 個，3 個入っていたものが 6 個あった。

(1) 降りそそいだ花粉の数を推定せよ。

(2)　花粉が 1 つも入っていない観測皿の枚数を求めよ。

問追加 (1) $\frac{180000}{109}$ (2) $e^{-\frac{18}{109}}$

練　習　問　題

問 51 n を 2 以上の整数とする。1 つのさいころを n 回続けて投げ，同じ目が初めて 2 回続けて出るまで投げた回数を X とする。ただし，n 回までに続けて同じ目が出なかったときには，$X=n+1$ とする。X の期待値（平均）を求めよ。

問 51 $7-5(\frac{5}{6})^{n-1}$

問 52　*1* 枚の硬貨を投げて，表が出れば A さんに *1* 点を与え，裏が出ればBさんに *1* 点を与える。硬貨を n 回投げるとき，A さんの総得点を X，B さんの総得点を Y とする。２人とも持ち点 *0* から始めるとして

（１）X の確率分布と期待値を求めよ。

（２）$X-Y$ の確率分布と期待値を求めよ。

（３）n 回投げて $X=i$ であったとき，*1* 回目に表が出ていた条件つき確率を，$i=1,2,...,n$ についてもとめよ。

問 52（１）${}_nC_k(\frac{1}{2})^n$　（２）0　（３）$\frac{i}{n}$

問 53　１枚の硬貨を６回投げ，各回ごとに表が出たら次の規則にしたがって点を与え，裏が出たらその回は０点として，６回の合計点を X とする。

１回目 $\cdots$ ３点

２, ３回目 $\cdots$ ２点

４, ５, ６回目 $\cdots$ １点

（１）X の期待値（平均）と分散を求めよ。

（２）$P(X=k)$ を $k=2,3,7,8$ について求めよ。

問 53（１）5, 5　（２）順に $\frac{5}{64},\frac{8}{64},\frac{8}{64},\frac{5}{64}$

問 54　*3* つの箱 A，B，C があり，箱 A には *4* 個の赤球と *2* 個の白球が入っている。箱 B には１から８までの数字を *1* つづつ書いた札が計 *8* 枚入れてあり，箱 C には４から *11* までの数字を１つづつ書いた札が計 *8* 枚入れてある。

まず箱 A から球を *1* 個取り出して，もしそれが赤球ならば箱 B から札を *1* 枚取り出し，もしそれが白球ならば箱 C から札を *1* 枚取り出す。このようにして取り出される札の数を X とする。

（１）$3\leq X\leq 5$ となる確率をもとめよ。

（２）X の期待値（平均）と分散をもとめよ。

問 54（1）$\frac{3r+2s}{8(r+s)}$　（2）$\frac{3(3r+5s)}{2(r+s)}$ ただし $r=4, s=2$

問 55　つぼ A には数字 *2, 4, 6, 8* がひとつずつ書かれた札が計 4 枚，つぼ B には数字 *1, 3, 5, 7* がひとつずつ書かれた札が計 4 枚入っている。まず，つぼ A から無作為に *1* 枚取り出しその札に書かれた数を X とする。

もし $X=8$ ならば，つぼ B から無作為に *1* 枚取り出しその札に書かれた数を Y とする。

もし $X\neq 8$ ならば，つぼ A の残りの *3* 枚から無作為に *1* 枚取り出しその札に書かれた数を Y とする。

$Z=X+Y$ とする。

（1） $E[X]$ および $V(X)$ をもとめよ。

（2）$E[Y]$ および $V(Y)$ をもとめよ。

（3）X と Y は独立か。

（4）$E[Z]$ および $V(Z)$ をもとめよ。

問 55（1）5 （2）$\frac{67}{12}$ （3）独立でない（4）$\frac{87}{12}$

問 56　人口 *100* 万人のある県では，ある病気 B の発生が 1 年間に平均 *10* 件みられる。この県で病気 B にかかる人が *1* 年間に *2* 人以下である確率をもとめよ。

問 56　$61e^{-10}$

問 57

次の表（次ページ）のような宝くじ（*1* 枚 *200* 円）の賞金額の期待値を計算せよ。

等級	当選金	本数
1 等	40000000	7
1 等前後賞	10000000	14
1 等組違い賞	200000	903
2 等	10000000	5
2 等組違い賞	100000	645
3 等	1000000	130
4 等	140000	130
5 等	10000	1300
6 等	1000	26000
7 等	200	1300000
はずれ	0	(引き算)
合計		13000000

問 57
約 89.41(円)

1.5　モーメント母関数

5 章の問題

問　題

1　(Max と Min の分布) $X_1, ..., X_n$ は独立同分布の確率変数で、指数分布 e(λ) に従うとする。
(1) $Z_1 = \max(X_1, ..., X_n)$ とおく。Z_1 のモーメント母関数を求めよ。
(2) $Z_2 = \min(X_1, ..., X_n)$ とおく。Z_2 のモーメント母関数を求めよ。

問 5-1(58) (1) $M_{Z_1}(t) = \frac{n!\lambda^n}{(n\lambda - t)\cdots(\lambda - t)}$

(2) $M_{Z_2}(t) = \frac{n\lambda}{n\lambda - t}$

2　（1）X が $[0,1]$ 上の一様分布にしたがうとき、$Y = aX + b$ $(a > 0)$ の確率密度関数を求めよ。

（2）X が平均 μ, 分散 σ^2 の R 上の正規分布にしたがうとき、$Y = aX + b$ の確率密度関数を求めよ。

問 5-2(59) (1) $\frac{1}{a}(b \leq y \leq a+b)$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma}e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2\sigma^2 a^2}}$

3　X と Y が、平均 0, 分散 1 の R 上の正規分布にしたがう独立な確率変数であるとき、$Z = X + Y$ の確率密度関数を求めよ。

問 5-3(60) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\sqrt{2}^2}}, = N(0,2)$ の密度関数

4　X と Y が、$[0,1]$ 上の一様分布にしたがう独立な確率変数であるとき、$Z = X + Y$ の確率密度関数を求めよ。

問 5-4(61) $f(z) = z$ $(0 \leq z \leq 1), = (2-z)$ $(1 \leq z \leq 2)$

1.6　正規分布の応用

6 章の問題

問　題

問 58 *(1)* あるくじは *1000* 本発行され、このうち *2* 本が当たりである。このくじを何本か買って当たる確率を $\frac{1}{2}$ 以上にするためには、少なくとも何本買わなければならないか。

(2) このくじは毎週発行される。太郎君は毎週このくじを *1* 枚買う。少なくとも *1* 回当たる確率を $\frac{1}{2}$ 以上にするためには、少なくとも何本買わなければならないか。

問 58 (1)$\frac{(1000-r)(999-r)}{1000\cdot 999} < 1/2$ より $r > 293$
(2) $r\log(1-p) < \log\frac{1}{2}$ より $r > 342.2$

問 59 次を示せ。

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{1}{x^2})$$

問 59　（チェビシェフの不等式による）

問 60 $(X_i)_{i=1,2,...}$ を平均 $\lambda = 1$ のポアソン分布をもつ独立同分布の確率変数列とし、$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ とする。

(1) S_n の分布は何か。

(2) $P(S_n \leq n) = e^{-n}\sum_{k=1}^n \frac{n^k}{k!}$ を示せ。

(3) 中心極限定理を使って

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n}\sum_{k=1}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

を示せ。

問 60 (1) $Po(\lambda)$ (帰納法) (2) 略　(3)　略

問 61 ある町には *20000* 人の住人がいて、このうちある病気の免疫を持っていない人の割合は *0.4* である。この病気になる人の割合を全体の *1* 割以下にする確率を *90* パーセント以上にするためには、ワクチンを少なくとも何個用意しなければならないか。

問 61

prob.tex ここまで

　まずは 6 章に対応するここまで。

7~ 9章までの問題と答え(統計): 未整備