A remark on Glauberman-Watanabe corresponding blocks with a normal defect group

田阪　文規　千葉大学 自然科学研究科

e-mail `ftasaka@g.math.s.chiba-u.ac.jp`

有限群 G へ、G の位数と素な可解群 S が作用している時、G の S-不変な既約指標と、G の S による中心可群（G^S と書く）の既約指標の間には、ある１対１対応（Glauberman 対応）が存在することが知られていたが、[18] において、S により centralise される defect group を持つという仮定のもとでは、その背後に、Brauer category が同値な (p-)block の１対１対応（Watanabe 対応）が存在する、ということが示された。実際、[18] において、Glauberman 対応により、Watanabe 対応する blocks の間に、isotypy が引き起こされることが示されているが、その後、この指標レベルの現象を環論的に説明するものとして、blocks が normal defect group を持つ場合には、対応する blocks は、（Glauberman 対応を引き起こす [5]、trivial module を source として持つ bimodule により splended[9][5]）Morita 同値 [10]、であることが示されている。（p-可解群の場合は [7][6] を参照。）

ここでは、Watanabe 対応する blocks が normal defect group をもつとき、Glauberman 対応を引き起こす、Morita 同値を与える bimodule が、block algebra を bimodule としてみて、片側 restriction、または、片側 induction して得られる bimodule の直既約因子として得られる、ということを注意する。（Glauberman 対応に関する基本的事実については [8] を、Puig の理論については、[17] を参照。）

以下、p を素数、$(\mathcal{O}, K, k)$ を p-modular system で、完備離散付値環と、以下で考える群に対して分裂体となる標数０の商体と、標数 p の代数閉体となる剰余体からなるものとする。

定理 1 (Glauberman[4]). 任意の組（G,S)（ここで、G は有限群、S は G と位数が素な可解群で G の自己同型群の部分群であるもの）に対し、次の条件を満たす全単射 $\pi(G,S)\colon \mathrm{Irr}(G)^S \to \mathrm{Irr}(G^S)$ が存在する。

(1) T を S の正規部分群とするとき、$\pi(G,T)$ は、$\mathrm{Irr}(G)^S$ と $\mathrm{Irr}(G^T)^S$ の間の全単射を与え、$\pi(G,S) = \pi(G^T, S/T) \circ \pi(G,T)$ を満たす。

(2) S が、ある素数 q に対する q-群のとき、$\pi(G,S)(\chi)$ は、χ の G^S への restriction に現れる重複度が q と素な唯一の既約指標（実際、q を法として ± 1。）。ここで、χ は G の S-不変な既約指標。

定理１の対応を既約指標の Glauberman 対応という。

定理 2 (Watanabe[18]). G の S-不変な block bが、G^S に含まれる defect group P を持つとすると、次が成り立つ。

(1) b に属する G の既約指標は全て、S-不変。

(2) 次の条件を満たす G^S の block $w(b)$ が一意に定まる。: Glauberman 対応は、b に属する既約指標と $w(b)$ に属する既約指標の間の全単射。

(3) block $w(b)$ は P を defect group として持ち、b と $w(b)$ の Brauer category は同値。

(4) blocks b と $w(b)$ の間に perfect isometry（実際、より強く、isotypy）が存在する。

定理２（２）の対応を block の（Glauberman-）Watanabe 対応という。以下、G の p-部分群 P は、S により centralise される（「Watanabe's situation」）とする。また、有限群 G に、位数 q（G の位数と素なある素数）の巡回群 S が作用しているとして、statement を記す。(定理１ (1) より、始めの設定は、この設定に還元される。)

block algebra $\mathcal{O}Gb$は、primitive interior G-algebraで、その defect multiplicity module V（$\overline{G}$:=$N_G(P_\gamma)/P$ 上の k 係数の twisted group algebra。ここで、P_γ は b の defect pointed group。）を $\overline{G}^S$ 上の twisted group algebra へ restriction すると、重複度が q と素な直既約因子（V' とする）が唯一つ存在する（重複度は q を法として ±1）ことがいえる。実際、V は、simple projective なので、$\mathcal{O}$ 上の module に lift でき、K 係数の $\overline{G}$ 上の twisted group algebra 上の defect 0 の characterが対応するが、それを $\overline{G}^S$ 上の twited group algebra に restriction すると、重複度が q と素（q を法として ±1）なものが唯一つ現れ、それは、defect 0 の character であることが分かる。（適当な covering group を考え、Glauberman 対応を考える（cf.[6])。または、[3]。defect に関することは [2] を参照。）また、V（projevtive module）の G^S への restriction の V' 以外の直既約因子達の和（W とする）に対応する K 上の character の、各因子の重複度は q の倍数だが、k 上の twisted group algebra（k は代数閉体）の Cartan 行列の行列式は p べきであることと、q と pが素であることより、W の各直既約因子の重複度も qで割り切れることが従う。ここで、V' と Puig 対応する $\mathcal{O}Gb$ の pointed group を G^S_β とおき、β に属するべき等元 f に対し、$f\mathcal{O}Gbf$ と同

型な primitive interior G^S-algebra を $(\mathcal{O}Gb)_\beta$、$f\mathcal{O}Gb$ と同型な（直既約）$\mathcal{O}[G^S \times G]$-module を M とおく。

上の記号のもと、次のことを示すことができる。

定理 3. G の S-不変な block b が、S により centralise される、normal な defect group P を持つとき、$(\mathcal{O}Gb)_\beta$ と $\mathcal{O}G^S w(b)$ は、primitive interior G^S-algebra として同型。

特に、

(1) b と $w(b)$ は、同型な source algebra を持つ。すなわち、b と $w(b)$ は、splendid Morita 同値 [9][5]。

(2) M は b と $w(b)$ の間の Morita 同値を与える。また、$\mathcal{O}Gb$-module の category から、$\mathcal{O}G^S$-module の category への restriction functor は、直既約因子に M が重複度 $qn \pm 1$ で現れ（n はある整数）、その他の直既約因子達の重複度が q の倍数であるような $\mathcal{O}[G^S \times G]$-module を $\mathcal{O}G$ 上 tensor する functor と同型。よって、Glauberman 対応を引き起こす、Morita 同値を与える bimodule が存在する [5]。

次は、Green 対応より、normal defect の場合に還元でき、その場合、M は Morita 同値を引き起こす bimodule となることを利用する。すなわち、$\mathcal{O}Gb$ の $\mathcal{O}[G \times 1]$-module としての、また、M の $\mathcal{O}[G^S \times 1]$-module としての自己準同型環は、primitive interior G-algebra として $\mathcal{O}Gb$ と同型（Puig による Morita の定理の言い替え ([15]Prop.6.5)）なので、$\mathcal{O}Gb$ の $\mathcal{O}[G \times G^S]$-module としての、また、$M$ の $\mathcal{O}[G^S \times G^S]$-module としての構造は、$\mathcal{O}Gb$ の G^S-不変な subalgebra における、b の分解の様子、よって、Puig 対応より、$\mathcal{O}Gb$ の defect multiplicity module を、$\overline{G}^S$ へ restriction したときの様子から分かる。また、M の dual を $\mathcal{O}[G \times G]$-module に、また、$\mathcal{O}G^S w(b)$ を $\mathcal{O}[G^S \times G]$-module に induction した module の様子は、$\mathcal{O}G^S w(b)$ の defect multiplicity module を、$\overline{G}$ へ induction した module の様子で分かる。（cf.[1]）

系 4. b を G の S-不変な block で、S により centralise される defect group を持つものとする。このとき、直既約 $\mathcal{O}[G \times G]$-module$\mathcal{O}Gb$ を $\mathcal{O}[G^S \times G^S]$-加群に restriction すると、vertex ΔP を持つ直既約因子で重複度が q と素であるものが、唯一つ存在し（実際、重複度は、q を法として１）、それは、$\mathcal{O}G^S w(b)$ と同型。また、直既約 $\mathcal{O}[G^S \times G^S]$-module$\mathcal{O}G^S w(b)$ を $\mathcal{O}[G \times G]$-加群に induction すると、vertex ΔP を持つ直既約因子で重複

度が q と素であるものが、唯一つ存在し（実際、重複度は、q を法として１）、それは、$\mathcal{O}Gb$ と同型。

（付記；上の系４の後半、すなわち、induction に関する statement は、間違いです。定理１の記号で、$\pi(G,S)(\chi)\uparrow_{G^S}^{G}$ に現れる既約指標の重複度は、χ 以外は全て q で割り切れる（重複度が q で割り切れることが保証されるのは、S-不変な既約指標についてのみです。）、との間違った理解のもとで論を進めていました。statement のための条件が不足していることを示唆して下さった奥山哲郎先生に感謝します。また、一番最後の奥山先生への謝辞は、講演後、定理３を説明した際、証明に不十分な点があることを指摘していただいたことに対するものであり、全体の文責、他にありうる間違いの責任が、著者にあることは、いうまでもありません。いい加減なことを書いてしまい、迷惑をかけてしまった関係者の方々に対しても、深くお詫びします。報告集には訂正していない原稿が載りそうであることを注意させていただきます。（２００６年２月１７日））

注意 5. normal defect group を持つ block algebra は、PE（ここで、P は defect group,E は inertial quotient）上の twisted group algebra と Morita 同値なので（[11][13]）、[10][5] では、Watanabe 対応している blocks の、対応する 2-cocycle を比べているが、ここでは、次のようにして source algebra の同型を得ている。すなわち、$i = i'f = fi'$（ここで、i は b の、i' は $w(b)$ のある source idempotent、f は β のある元）が normal defect group をもつときは成り立つので、f を両側からかけることにより、$w(b)$ の source algebra $i'\mathcal{O}G^S i'$ から、b の source algebra $i\mathcal{O}Gi$ への interior P-algebra hom. を得るが、normal defect group を持つ block の source algebra は、[17]Th.44.3 のような $\mathcal{O}$-basis をもつことから、これは同型になる。

注意 6. 定理３（２）の first と second statement より、M が Glauberman 対応（Brauer character でも）を引き起こすことは明らかだが、これは、Glauberman 対応の「sign」は block で共通であることは意味しているが、restriction で Glauberman 対応する character の重複度が M の重複度で出てくる、という主張ではない。

注意 7. [16][14] において、primitive interior G-algebra と、「G-triple」（defect group と”source algebra”と”defect multiplicity module”からなる。）の「ある同値類」の間に、１対１対応が存在することが示されている（微妙な論点が多いので [16][14] を参照して下さい。）が、定理３の上の statement は、S により centralise される defect group を持つ、S-不変な G の block algebra に対し、その「G-triple」の第３項を「Glauberman 対応」させた、「G^S-triple」（よって、対応する primitive interior G^S-algebra）を考えることができる、ということ。（他に、例えば、S-不変な simple kG-module の自己準同型環からなる primitive interior G-algebra に対しても、同様のことを考えることができる。）これは、G^S が defect group P の normalizer を含むときは、「primitive interior G-algebra の Green 対応」（$N_G(P)$ を含む群 H に対し、「G-triple」を「H-triple」とみて（P の G における normalizer と H における normalizer は等しい）対応を与えたもの [16]。加群の Green 対応は、（実質）Puig により、G-algebra の pointed groups の対応に一般化されていて（直既約 module の自己準同型環の「Green 対応」は Green 対応の自己準同型環）、block algebra の「Green 対応」は、block algebra とは限らないが、加群の Green 対応が、Morita 型の stable 同値を与えていて、simple module が simple module と対応しているときは、Brauer 対応する block algebras が、「Green 対応」していることは、よく知られている。)。この対応で、block algebra は、block algebra と対応するとは限らないが、normal defect group を持つということが、Watanabe 対応する block algebras が、この対応関係にあることの、一つの十分条件になっている、というのが、定理３の first statement。

付記；本稿の作成にあたり、特に、北海道教育大学の奥山哲郎先生にお世話になりました。深く、感謝します。

参考文献

[1] L. Barker, Induction,restriction and G-algebras, Comm.algebra. **22** (1994), 6349–6383.

[2] E. C. Dade, Counting characters in blocks*II*, J. Reine Angew. Math. **448** (1994),97–190.

[3] E. C. Dade, A new approach to Glauberman's correspondence, J. Algebra **270** (2003), 583–628.

[4] G.Glauberman, Correspondence of characters for relatively prime operator groups, Canad. J. Math. **20** (1968),1465–1488.

[5] M. E. Harris, Glauberman-Watanabe corresponding p-blocks of finite groups with normal defect groups are Morita equivalent, Trans.of the A. M. S.(2004)

[6] M. E. Harris and M. Linckelmann, On the Glauberman and Watanabe correspondences for blocks of finite p-solvable groups, Trans. of the A. M. S. **354**(9)(2002),3435–3453.

[7] H. Horimoto, A note on the Glauberman correspondence of p-blocks of finite p-solvable groups, Hokkkaido Math. J. **31** (2002), 255–259.

[8] I.M.Isaacs, Character Theory of Finite Groups, Academic Press (1976).

[9] S. Koshitani, A remark on Glauberman-Watanabe correspondence of p-blocks of finite groups, preprint (2002)

[10] S.Koshitani and G.O.Michler, Glauberman correspondence of p-blocks of finite groups, J. Algebra **243** (2001),504–517.

[11] B. Külshammer, Crossed products and blocks with normal defect groups, Comm.Algebra **13** (1985),147–168.

[12] L. Puig, Pointed groups and construction of characters, Math. Z. **176**(1981),265–292.

[13] L. Puig, Pointed groups and construction of modules, J. Alg. **116**(1988),7–129.

[14] L. Puig, On Thévenaz' parametrization of interior G-algebras, Math. Z. **215**,321–335.

[15] L. Puig, "On the Local Structure of Morita and Rickard Equivalences between Brauer Blocks", Birkhauser (1999).

[16] Thévenaz, The parametrization of interior algebras, Math. z. **212** (1993), 411–454.

[17] Thévenaz, "G-Algebras and Modular Representation Theory", Oxford University Press (1995).

[18] A. Watanabe, The Glauberman character correspondence and perfect isometries for blocks of finite groups, J. algebra **216** (1999),548–565.