

# VOAの有理性の判定条件とホモロジー群

宮本雅彦 Masahiko Miyamoto  
筑波大学数学系 University of Tsukuba

RIMS 研究集会『有限群のコホモロジー論とその周辺』 30 August, 2005

## 1 有理性の判定条件

この講演では、 $C_2$ -有限条件を満足する頂点作用素代数 (VOA) の有理性<sup>1</sup>に対する判定条件の一つを紹介し、その観点から導かれるホモロジー群を導入する。講演で述べたホモロジー群は自明であったが、ここでは別のホモロジー群を導入し、それらが環となることを予想する。

通常、新しい頂点作用素代数  $V$  を構成した場合、その有限生成加群の集合  $\mathfrak{M}_{f,g}(V)$  を分類しなければならないが、既約加群の分類に対しては、ツーク代数  $A(V)$  が強力な手段となる。問題は直既約加群の分類であるが、これは非常に難しい問題である。例えば、構成できた頂点作用素代数が有理性を持つと期待しても、現在の頂点作用素代数が持っている (モジュラー不変性や Verlinde 公式などの) ほとんどの手法は、 $C_2$  有限性と有理性の仮定の下で成り立っており、有理性の証明には役に立たない。

有理性と比較して、 $C_2$ -有限条件の証明は本質的に易しい。それに、 $C_2$ -有限でなければ弱加群という次数分解自体もはっきりしていない加群が必ず存在し、すべての加群の分類は不可能に近い。それゆえ、 $C_2$  有限を仮定して話を進めよう。

有理性の話に戻ろう。この場合、定義に基づく証明は、すべての既約加群が加群としての拡大を持たないことであるが、この講演の主目的は、 $C_2$ -有限の下では、すべての既約加群を調べる必要はなく、 $V$ -加群としての  $V$  が加群としての拡大を持たなければ充分であることを示すことである。これは整数ウエイトの加群だけを考えればよいことを意味しており、問題を非常に易しくする。

この主目的を証明するために、すこし頂点作用素代数のテンソル積について説明しよう。この論文では常に  $V$  は  $C_2$  有限を満たしていると仮定する。それ以外の条件を考えないので、既約加群のみを扱っていた古典的な頂点作用素代数とは違い、次数作用  $L(0)$  の斉次空間への作用が半単純でない加群が存在する (広義固有空間を考える必要があり、広義固有空間のことも斉次空間と呼ぶことにする)。この場合、交絡作用素が大きく変わる。加群間の写像を与える交絡作用素とは、加群への作用との間で、局所可換性や結合関係を満たし、さらに  $L(-1)$ -微分関係式を満たすものとして考えられるが、 $C_2$ -有限の条件の下では、 $L(-1)$ -微分関係式は確定特異点型の微分方程式を生み出すことが分かる。それゆえ、その解である交絡作用素は  $z$  の形式的べきと  $\log z$  の整数べきの和という形で抑

<sup>1</sup>すべての加群が完全可約となること。環論における半単純に対応するが、頂点作用素代数では単純でも有理的でないものがある。

えることができるので、交絡作用素として、 $z$  のべきだけでなく  $\log z$  も出てくるものを含めて考えれば充分である。  $U, W, T \in \mathfrak{M}_{f,g}(V)$  に対して、  $\mathfrak{J}_{\mathcal{L}}(U : W \rightarrow T)$  で  $\log z$  も含むタイプ  $\binom{T}{U \ W}$  の交絡作用素全体の空間とする。即ち、  $\mathcal{Y} \in \mathfrak{J}_{\mathcal{L}}(U : W \rightarrow T)$  とは、  $u \in U$  に対して、

$$\mathcal{Y}(u, z) = \sum_{r \in \mathbb{C}} \sum_{i=0}^k u_{r,i} z^{-r-1} \log^i z \quad u_{r,i} \in \text{Hom}(W, T)$$

の形のものが与えられ、必要な条件を満たしているものである（定義は 2.2 節参照）。

$U, W$  をしばらく固定して考え、全射となる交絡作用素を持つようなもの全体の集合

$$\mathcal{F}(U, W) = \{(T, \mathcal{Y}^T) \in \mathfrak{J}_{\mathcal{L}}(U : W \rightarrow T) \mid T \in \mathfrak{M}_{f,g}(V), T = \langle \text{Im} \mathcal{Y}^T \rangle\}$$

を考え、この中に部分順序  $\geq$  を次のように定義する。

$$(T, \mathcal{Y}^T) \geq (S, \mathcal{Y}^S) \Leftrightarrow \exists g : T \rightarrow S \text{ s.t. } \mathcal{Y}^S(u, z)w = g(\mathcal{Y}^T(u, z)w) \forall u \in U, w \in W$$

ここで、  $A \geq B, B \geq A$  は  $A = B$  を意味しないが、交絡作用素まで含めての同型を与えている。

$U, W$  のテンソル積  $U \boxtimes W$  とは、存在すればの話だが、この順序に関する最大元（同型類）である。即ち、任意の  $(T, \mathcal{Y}^T) \in \mathcal{F}(U, W)$  に対して、  $\mathcal{Y}^T = g(\mathcal{Y})$  を満たすような写像  $g : U \boxtimes W \rightarrow T$  が存在するようなものである。

簡単な事実として、  $\mathcal{F}(U, W)$  自体は有向集合（同型を同一視して）である。実際、任意の 2 つ  $(T^1, \mathcal{Y}_1), (T^2, \mathcal{Y}_2) \in \mathcal{F}(U, W)$  に対して、直積への写像

$$\mathcal{Y}(u, z)w = (\mathcal{Y}_1(u, z)w, \mathcal{Y}_2(u, z)w) \in T^1 \oplus T^2 \{z\} [\log z] \quad \forall u \in U, w \in W$$

を定義すれば、  $\mathcal{Y}$  は交絡作用素であり、  $T = \langle \text{Im} \mathcal{Y} \rangle$  とおくと、射影  $\pi_i : T \subseteq T^1 \oplus T^2 \rightarrow T^i$  によって、  $\pi_i(\mathcal{Y}(u, z)w) = \mathcal{Y}_i(u, z)w$  となるので、順序  $(T^i, \mathcal{Y}_i) \leq (T, \mathcal{Y})$  が証明できる。ここで、  $S\{z\}$  は  $\{\sum_{n \in \mathbb{C}} s_n z^n \mid s_n \in S\}$  を表す。また、  $\langle \text{Im} \mathcal{Y} \rangle$  は  $\mathcal{Y}$  の像が張るベクトル空間を表すが、加群となることが公理より簡単に示せる。

$C_2$ -有限条件は非常に強力な有限条件である。既約加群の同型類  $W^1, \dots, W^k$  が有限個しかなく、それゆえ、最小ウエイト  $\text{wt}(W^1), \dots, \text{wt}(W^k)$  も有限個であって、しかもそれらはすべて有理数である。  $V$  の元  $v$  の加群への作用  $v_n$  はすべて整数ウエイトの差を引き起こすだけなので、直既約加群のウエイトは整数を法として一意的に決まる。それゆえ、すべての直既約加群  $T$  が  $\mathbb{N}$ -次数付き斉次空間の直和  $\bigoplus_{i=0}^{\infty} T(i)$  と分解する。ここで、  $T(0)$  は最小ウエイト  $\text{wt}(T)$  の空間であり、  $T(i)$  はウエイト  $\text{wt}(T) + i$  の空間である。そこで、  $d_V$  で最小ウエイト間の整数差  $\text{wt}(W_i) - \text{wt}(W_j) \in \mathbb{Z}$  の中で最大のものを表すことにする。既約加群は有限個しかないので、これは確定する。この  $d_V$  が重要な働きをする。実際、直既約加群  $T$  の既約組成因子として  $W = \bigoplus_{i=0}^{\infty} W(i)$  が入っていれば  $W$  の最小ウエイトは  $\text{wt}(T) + d_V$  以下であり、  $\bigoplus_{i=0}^{d_V} T(i)$  の中に  $W(0)$  に対応するものが出てくる。以下、  $T[d]$  で  $\bigoplus_{i=0}^d T(i)$  を表すことにする。特に、  $T$  の組成列の長さは  $\dim T[d_V]$  を超えない。

それゆえ、次の補題 1 を示せば、  $\mathcal{F}(U, W)$  の中に真の無限上昇列が存在しないので、  $\mathcal{F}(U, W)$  の中に最大元（即ち、テンソル積  $U \boxtimes W$ ）が存在することになる（定理 2）。補題 1 の証明は 2.3 節で行う。

補題 1  $V$  を  $C_2$  有限である頂点作用素代数とし,  $U, W, T \in \mathfrak{M}_{f,g}(V)$ ,  $(T, \mathcal{Y}) \in \mathcal{F}(U, W)$  とする. このとき,  $\dim T[d_V]$  は  $U$  と  $W$  によって決まった整数を上限に持つ.

定理 2  $V$  を  $C_2$ -有限である頂点作用素代数とし,  $U, T$  を有限生成  $V$ -加群とする. この時, テンソル積  $U \boxtimes T$  は存在し, 有限生成  $V$ -加群である.

テンソル積が常に存在すると, 任意の  $V$ -準同型  $f : U \rightarrow W$  と  $(W \boxtimes T, \mathcal{Y}_W) \in \mathcal{F}(W, T)$  に対して, もし,  $u \in U$  に対する作用素  $\tilde{\mathcal{Y}}_W(u, z) \in \text{Hom}(T, W \boxtimes T)\{z\}[\log z]$  を

$$\tilde{\mathcal{Y}}_W(u, z) := \mathcal{Y}_W(f(u), z) \in \text{Hom}(T, W \boxtimes T)\{z\}[\log z],$$

として定義すると,  $\tilde{\mathcal{Y}}_W \in \mathfrak{I}_{\mathcal{L}}(U : T \rightarrow S)$  である. テンソル積の定義から, 準同型

$$\tilde{f}_T : U \boxtimes T \longrightarrow \text{Im}(\tilde{\mathcal{Y}}_W) \subseteq W \boxtimes T$$

で  $\mathcal{Y}_W(f(u), z)t = \tilde{f}_T((\mathcal{Y}_W(u), z)t)$  となるものがある. この  $\tilde{f}_T$  を  $f$  から誘導された写像と呼ぶ.

この誘導された写像を考えると, 完全系列

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} S \longrightarrow 0$$

から, 系列

$$0 \longrightarrow U \boxtimes T \xrightarrow{\tilde{f}_T} W \boxtimes T \xrightarrow{\tilde{g}_T} S \boxtimes T \longrightarrow 0$$

が定義できる.

定理 3  $T$  を有限生成  $V$ -加群とし,  $\boxtimes T$  が常に存在するとする. この時, テンソル積  $\boxtimes T$  は平坦関手である. 即ち, 上の系列が完全である.

証明  $g : W \rightarrow S$  は全射なので, 任意の  $\mathcal{Y} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{L}}(S : T \rightarrow S \boxtimes T)$  に対して,  $\mathcal{Y}'(w, z)t = \mathcal{Y}(g(w), z)t$  と定義することで,  $\mathcal{Y}' \in \mathfrak{I}_{\mathcal{L}}(W : T \rightarrow S \boxtimes T)$  が定義できる. それゆえ,  $\tilde{g}_T$  は全射である. また,  $\tilde{f}_T \tilde{g}_T$  は定義から  $fg = 0$  を誘導したものである.  $\text{Ker} \tilde{g}_T \supseteq \text{Im} \tilde{f}_T$  である.  $X = \text{Im} \tilde{f}_T$  と置く. 任意の  $t \in T, u \in U$  に対して,  $\mathcal{Y}(f(u), z)t = \tilde{f}(\mathcal{Y}(u, z)t)$  なので,

$$X = \langle w_{n,i}t \mid t \in T, w \in f(U), n \in \mathbb{C}, i \in \mathbb{N} \rangle$$

である.

この時, テンソル積  $(W \boxtimes T, \mathcal{Y}^W)$  に対して, 次の自然な準同型  $\overline{\mathcal{Y}^W}$  を考える:

$$\overline{\mathcal{Y}^W} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{L}}(W : T \rightarrow (W \boxtimes T)/X).$$

$w \in f(U)$  に対しては,  $\overline{\mathcal{Y}^W}(w, z) = 0$  なので,  $\overline{\mathcal{Y}^W} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{L}}(W/f(U) : T \rightarrow (W \boxtimes T)/X)$  と見ることができ, しかも  $W/f(U) \cong S$  なので,  $\overline{\mathcal{Y}^W} \in \mathfrak{I}_{\mathcal{L}}(S : T \rightarrow (W \boxtimes T)/X)$  とも考えることもできる. テンソル積  $S \boxtimes T$  の定義から, 写像  $\phi : S \boxtimes T \longrightarrow (W \boxtimes T)/X$  で,  $\phi(\mathcal{Y}^S(g(w), z)t) = \overline{\mathcal{Y}^W}(w + f(U), z)t$  となるものがある. しかも,  $\langle \text{Im} \overline{\mathcal{Y}^W} \rangle = W \boxtimes T$  な

ので,  $\langle \text{Im} \overline{\mathcal{Y}^W} \rangle = (W \boxtimes T)/X$  であり,  $\phi$  は全射である.  $\tilde{f}_T$  もまた全射なので, 斉次空間の次元から  $\tilde{g}_T|_{W \boxtimes T/X} \rightarrow S \boxtimes T$  は単射となり,  $\text{Ker} \tilde{g}_T = \text{Im} \tilde{f}_T$  が出てくる. ■

この定理の応用を紹介しよう. これがこの講演の主目的である.

**定理 4**  $V$  を  $C_2$ -有限である単純頂点作用素代数とし,  $V$  は  $V$ -加群とみて, 射影的であると仮定する. このとき,  $V$  は有理的である. 即ち, すべての  $V$ -加群は完全可約である.

ここで,  $V$ -加群  $W$  が射影的であるとは, 任意の  $V$ -全射  $f: U \rightarrow W$  が分裂することをいう. 即ち,  $V$ -準同型  $g: W \rightarrow U$  で  $fg = \text{Id}_W$  となるものが見つかる. 環論とは違い,  $V$  が常に射影的であるとは限らない. 射影加群と同様に入射加群の定義もできる.

$U$  を  $V$ -加群とした場合,  $\text{Hom}(U, \mathbb{C})$  は通常,  $V$ -加群ではない. しかし, 斉次空間ごとの双対空間, 即ち, 制限双対加群  $U^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}(U(n), \mathbb{C})$  には  $V$ -加群としての構造が入る ([FHL] 参照). 明らかに,  $U$  が射影加群であることと  $U^*$  が入射加群であることは同値である.

**証明** 背理法を使う. 正しくないと仮定し,  $W$  を既約加群の直和とならない極小の加群とする. 極小性から,  $W$  は既約部分加群  $U$  を持ち,  $W/U$  も既約である. 頂点作用素代数の標準的な方法 (歪対称性) を使って, 整数次数で  $\log z$  項のない  $U$  の作用  $Y^U \in \mathcal{J}_{\mathcal{L}}(V: U \rightarrow U)$  からタイプ  $\begin{pmatrix} U \\ U \ V \end{pmatrix}$  の交絡作用素  $I \in \mathcal{J}_{\mathcal{L}}(U: V \rightarrow U)$  が構成できる. それから, 双対空間を考えることで, 制限双対加群  $U^*$  から  $V^*$  への交絡作用素  $I^* \in \mathcal{J}_{\mathcal{L}}(U: U^* \rightarrow V^*)$  が定義できる. 詳細は [FHL] を参照. それゆえ,  $V$  は単純なので, 全射  $f: U \boxtimes U^* \rightarrow V^*$  を得るわけであるが, テンソル積関手が平坦関手であることから,  $U \boxtimes U^*$  は  $W \boxtimes U^*$  の部分加群であると考えてよく, それゆえ,  $W \boxtimes U^*$  は  $V^*$  を組成因子として含む. 仮定より,  $V^*$  は入射的なので, 組成列の一番上に持ってくる事が出来, 全射  $\phi: W \boxtimes U^* \rightarrow V^*$  で  $\phi(U \boxtimes U^*) = V^*$  となるものがある. この  $\phi$  を使って, 内積 (ペアリング)

$$\langle, \rangle: W \times U^* \rightarrow \mathbb{C}$$

を真空期待値  $\langle w, u^* \rangle = \langle \phi(w_{\text{wt}(w)-1+\text{wt}(u^*)} u^*), 1 \rangle$  で定義する. そうすると, 良く知られているように,  $\langle, \rangle$  は  $V$ -不変内積である. 一方, 定義から,  $\langle, \rangle|_{U \times U^*}$  は非退化なので,  $W = (U^*)^\perp \oplus U$  となり, 矛盾を得る. ■

## 2 準備と説明

頂点作用素代数に関する記号はほぼ [FHL] と [M] に従っている. 必要な用語の正確な定義を与えていこう.

### 2.1 $C_2$ -有限条件

まず,  $C_2$ -有限条件を満たす頂点作用素代数  $V$  の重要な性質を明記しておこう. ここで,  $C_2$  有限とは整数  $k$  に対して

$$C_k(V) = \langle v_{-k} u \mid v, u \in V, \text{wt}(v) \geq 0 \rangle$$

とおくと,  $\dim V/C_2(V) < \infty$  となることである. この時, 有限集合  $\mathcal{A}_2(V)$  があって,  $V = \langle \mathcal{A}_2(V) \rangle + C_2(V)$  となる. この条件は最初, モジュラー不変性を証明するための微分方程式を生み出すために Zhu[Z] によって導入された技巧的なものと理解されていたが, 後の研究によって, 表現の立場から本質的な条件であることが分かってきている.  $V$  が負のウエイト空間を持つ場合の  $C_2$ -有限条件は, 文献によって異なるが, 最も重要な性質は以下の命題 5 の (3) であり, これが成り立てば他の性質は出て来る.

命題 5[[M],[GN]]  $V$  を  $C_2$ -有限である頂点作用素代数とする. この時,

- (1)  $V$  の既約加群の同型類は有限個であり, ウエイトはすべて有理数.
- (2)  $V$  の (代数的) 加群はすべて  $\mathbb{N}$ -次数付きであり, 有限生成代数的加群は有限次元斉次空間を持つ  $\mathbb{N}$ -次数付き加群である.
- (3)  $\Omega$  を加群とする.  $u \in \Omega$  に対して,  $u$  から生成される  $V$ -部分加群を  $Vu$  で表すと,

$$Vu = \langle a_{s_1}^1 \cdots a_{s_h}^h u \mid a^i \in \mathcal{A}_2(V), s_1 \leq \cdots \leq s_h \rangle$$

と表示できる.

- (4) 任意の  $U \in \mathfrak{M}_{f.g}(V)$  と  $k \geq 0$  に対して,  $\dim A_k(U) \leq \dim U/C_{2+k}(U) < \infty$

ここで,  $\mathbb{N}$ -次数付き加群  $(W, Y^W)$  とは,  $\mathbb{N}$ -次数付き弱  $V$ -加群  $W = \bigoplus_{n=0}^{\infty} W(n)$  で,  $v \in V$  に対して,  $v_{\text{wt}(v)-1-k} W(n) \subseteq W(n+k)$  を満足するものである. このようにウエイトを  $k$  上げる作用素を  $o_k(v)$  で表示し, 次数  $k$  の作用素と呼ぶ.  $A_k(U)$  は  $U$  に対して定義される  $k$ -th Zhu 代数の両側加群を表す (説明 2.2 節を参照).

$V$  を  $C_2$ -有限条件を満たすとする. 既約  $V$ -加群の同型類は有限個しかなく, それらの最小ウエイトはすべて有理数である.  $\max \text{wt}$  で最大の最小ウエイトを表し,  $\min \text{wt}$  で最小の最小ウエイトを表すことにする. また,  $d_V$  で  $V$ -加群の最小ウエイト間の最大値整数差とした.

$(Vu)_k$  で  $Vu$  のウエイト  $k$  の斉次空間を表すことにする.  $\dim(Vu)_k$  の上限が存在することを示す.

補題 6  $Vu$  の組成列の長さは  $\text{wt}(u)$  に依存した上限  $\phi(\text{wt}(u))$  を持つ.

[証明] 補題 1 の前で説明したように,  $Vu$  の組成列の長さは  $\dim Vu[d_V]$  によって押さえられる. それゆえ,  $\dim Vu[d_V]$  が上限を持つことを示せば充分である. まず,  $\mathcal{A}_2(V)$  は有限集合なので,  $\max\{|\text{wt}(a)| \mid a \in \mathcal{A}_2(V)\} < \delta$  となる  $\delta \in \mathbb{Z}$  がある. 今,  $0 \neq a_{s_1}^1 \cdots a_{s_h}^h u \in Vu[d_V]$  ( $a^i \in \mathcal{A}_2(V), s_1 \leq \cdots \leq s_h$ ) とする.  $\text{wt}(a_{s_h}^h u) \geq \min \text{wt}$  なので,  $\delta - 1 + \text{wt}(u) - \min \text{wt} > s_h$  である. また,  $\text{wt}(a_{s_2}^2 \cdots a_{s_h}^h u) \geq \text{wt}(Vu) \geq \min \text{wt}$  なので,  $s_1 > \delta - 1 - \text{wt}(u) - d_V + \min \text{wt}$  である. それゆえ,

$$(Vu)[d_V] \subseteq \langle a_{s_1}^1 \cdots a_{s_h}^h u \mid a^i \in \mathcal{A}_2(V), M \leq s_1 < \cdots < s_h \leq N \rangle$$

となる. ここで,  $M = \delta - 1 - d_V - \text{wt}(u) + \min \text{wt}$ ,  $N = -\delta - 1 + \text{wt}(u) - \min \text{wt}$  である. ゆえに,  $\dim(Vu)[d_V] \leq |\mathcal{A}_2(V)|^{2\delta + \text{wt}(u) + d_V - 2\min \text{wt}}$  となり上限を持つ. ■

上の補題の応用として, 次の結果を得る.

命題 7  $V$  を  $C_2$ -有限である頂点作用素代数とし,  $U$  を有限生成  $V$ -加群とする. この時,  $V$ -全射  $f : P \rightarrow U$  があるような有限生成射影加群  $P$  が存在する.

[証明]  $U$  は有限生成なので, 有限個の元  $u^1, \dots, u^k \in U$  があって,  $U = Vu^1 + \dots + Vu^k$  である.

$$\mathcal{G} = \{(f, \{w^i\}, W) \mid V\text{-準同型 } f : W \rightarrow U, f(w^i) = u^i, W = Vw^1 + \dots + Vw^k\}$$

という集合を考え, その中に次のような順序を導入する.

$$(f_1, \{w_1^i\}, W_1) \geq (f_2, \{w_2^i\}, W_2) \Leftrightarrow V\text{-準同型 } g : W_1 \rightarrow W_2 \text{ s.t. } g(w_1^i) = w_2^i$$

$W_1 \geq W_2$  なら  $W_1$  の組成列は  $W_2$  のものより長いのは明らか.

$(f, \{w^i\}, W) \in \mathcal{G}$  とすると,  $\text{wt}(w^i) = \text{wt}(u^i)$  なので, 前の補題より,  $Vw^i$  の組成列の長さには上限 ( $\leq \phi(\text{wt}(u^i))$ ) があるので,  $W$  の組成列の長さにも上限  $\sum_{i=1}^k \phi(\text{wt}(u^i))$  がある. それゆえ,  $\mathcal{G}$  の中には先の順序に関する極大元  $(f, \{w^i\}, W)$  が存在する. この  $W$  が射影加群であることを示そう.

今, 全射  $g : \Omega \rightarrow W$  があるとする.  $g(v^i) = w^i$  となる  $v^i \in \Omega$  を適当に選ぶ.  $\Omega^0 = Vv^1 + \dots + Vv^k$  と置く. 明らかに,  $g(\Omega^0) = W$ ,  $g(Vv^i) = Vw^i$  なので,  $(g|_{\Omega^0}, \{v^i\}, \Omega^0) \in \mathcal{G}$  である. この時,  $\Omega^0 \geq W$  なので,  $W$  の極大性より,  $g|_{\Omega^0}$  は同型である. それゆえ,  $\varphi : W \rightarrow \Omega^0$  と逆写像を定義すると,  $g\varphi = 1_W$  であり,  $\Omega = \varphi(W) \oplus \text{Ker } g$  となり,  $g$  は分裂する. それゆえ,  $W$  は射影加群である. ■

## 2.2 $\log z$ 付きも含めた交絡作用素

最初に述べたように, 交絡作用素として,  $\log^j z$  項を含むものまで考えなければならない. それゆえ, 以下のような定義を与える.

定義 1

Definition 1  $(U, Y^U), (W, Y^W), (T, Y^T)$  を有限生成  $V$ -加群とする. タイプ  $\binom{T}{U \ W}$  交絡作用素とは線形写像

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\cdot, x) : U &\rightarrow \text{Hom}(W, T)\{z\}[\log(z)] \\ \mathcal{Y}(u, x) &= \sum_{i=0}^{K_u} \sum_{n \in \mathbb{C}} u_{n,i} z^{-n-1} (\log(z))^i \end{aligned}$$

で以下の条件を満たすものである.

1. 各元に対して, 下に有界: 即ち,  $\forall u \in U, \forall w \in W, \forall i \in \mathbb{N}, \exists N \text{ s.t. } u_{n,i} w = 0 \forall n \geq N$
2.  $L(-1)$ - $d$  微分条件:  $\mathcal{Y}(L(-1)u, z) = \frac{d}{dz} \mathcal{Y}(u, z)$
3. Borchers の恒等式: すべての  $(q \in \mathbb{Z}, m, n \in \mathbb{Q}, j \in \mathbb{N})$  に対して,  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \binom{m}{i} (v_{q+i}^U u)_{m+n-i, j} w = \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \binom{q}{i} \{v_{m+q-i}^T (u_{n+i, j} w) - (-1)^q u_{n+q-i, j} v_{m+i}^W w\}$  が成り立つ. ここで,  $v_m^S$  は  $Y^S(v, z)$  における  $z^{-m-1}$  の係数.

タイプ  $\binom{T}{U \ W}$  の交絡作用素全体を  $\mathfrak{J}_{\mathcal{L}}(U : W \rightarrow T)$  で表す.

注意：Borcherds が導入した恒等式は頂点作用素代数や加群への作用を表示したもののなので、当然、 $\log z$  項は含まれていない。しかし、 $\log z$  を含む交絡作用素を考えた場合でも、加群の作用素  $Y^W(v, z)$  自体には  $\log z$  が含まれていないので、交絡作用素と加群の作用との間の局所可換性や結合律などの性質は、各  $\log^j z$  項ごとの作用素が加群の作用に対して同じ性質を持つことと同値であることがすぐにわかる。それゆえ、同じ Borcherds の恒等式の形を持つことが分かる。大した進展ではないので、これも Borcherds の恒等式と呼ぶことにした。

では、 $\log z$  の本質的な意味はなんだろうか？ これはこの後示す  $L(-1)$ -微分条件と次数作用  $L(0)$  の広義固有空間と関係してくる。その説明の前に、この節の主結果の証明に必要な一般 Zhu-代数の理論 [Z],[DLM] を説明する。

### 2.3 一般ツー代数

直約既約  $V$ -加群  $W$  に対して、 $W = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W(n)$  と分解する。ここで、最小ウエイト  $\text{wt}(W)$  の空間を  $W(0)$  で表し、 $W(n)$  はウエイト  $n + \lambda$  の空間である。Zhu 理論は加群  $U$  の  $U(0)$  に注目することで、Zhu 代数の加群と  $V$ -加群の対応を述べた理論であるが、ここでは、ポーチャーズの等式の簡単な応用として出てくる Zhu 理論の片方だけを利用する。一般 Zhu 代数の加群の定義 [DLM] に従い、

$$O_n(U) = \left\langle \sum_{i=0}^{\text{wt}a+n} \binom{\text{wt}a+n}{i} a_{i-2-2n} u \mid a \in V, u \in U \right\rangle$$

と置き、 $A_n(U) = U/O_n(U)$  と置く。ただし、 $U = V$  の場合には、次数を保つ作用だけを考えるので、 $O_n(V)$  には  $\{L(-1)v + L(0)v \mid v \in V\}$  も加える。交絡作用素

$$\mathcal{Y}(u, z) = \sum_{m \in \mathbb{C}, i} u_{m,i} z^{-m-1} \log^i z, \quad \mathcal{Y} \in \mathfrak{J}_{\mathcal{L}}(U : W \rightarrow T)$$

を考える。次数  $k$  の作用で  $\log^j$  の係数となっているものを  $o_{k,j}(u)$  で表す。ウエイトの定義から、 $w \in W[d], a \in V_{\text{wt}(a)}$  なら、 $a_{\text{wt}(a)+d+i}$  は次数を  $d+1$  以上下げるので、 $a_{\text{wt}(a)+d+i} w = 0$  であり、 $a_{\text{wt}(a)-2-d-i} u_{m,j} w \in T[d]$  なら  $a_{\text{wt}(a)-2-d-i} u_{m,j} w = 0$  である。

それゆえ、 $n = \text{wt}(W(c)) - \text{wt}(T(d))$ ,  $w \in W(c)$   $c, d \leq d_V$  として、Borcherds の等式に  $q = -2 - 2d_V$ ,  $m = \text{wt}(a) + d_V$  を代入すると、

$$\begin{aligned} & o_{n,j} \left( \sum_{i \in \mathbb{N}} \binom{\text{wt}(a)+d_V}{i} a_{i-2-2d_V} u \right) w \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \binom{\text{wt}(a)+d_V}{i} (a_{-2+i-2d_V} u)_{\text{wt}(a)+n+\text{wt}(u)+2d_V-i,j} w \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} (-1)^i \binom{-2-2d_V}{i} \{ a_{\text{wt}(a)-2-d_V-i} (u_{\text{wt}(u)+d_V+n+i,j} w) - u_{\text{wt}(u)-d_V+n-2-i,j} a_{\text{wt}(a)+i+d_V} w \} \\ &= 0 \end{aligned}$$

を得る。即ち、各  $j$  に対して、 $\phi_j^{c,d} : u \in U \rightarrow o_{n,j}(u)|_{W(c)} \in \text{Hom}(W(c), T(d))$  を考えると、 $\bar{\phi}_j : A(U) \rightarrow \text{Hom}(W(c), T(d))$  が定義できるのである。

特に、 $U = V, W = T, \mathcal{Y}$  として加群  $W$  への頂点作用素  $Y^W$  を考えた場合、上の結果は  $O_{d_V}(V)$  は次数を保つ作用により、 $W[d_V]$  に自明として作用していることを示してい

る．この作用により， $A_{d_V}(V) = V/O_{d_V}(V)$  は Zhu (DLM が拡張) が導入した  $a, v \in V, \in U$  の積

$$a * v = \sum_{m=0}^{d_V} \sum_{i=0}^{\text{wt}(a)} (-1)^m \binom{m + d_V}{d_V} \binom{\text{wt}(a) + d_V}{i} a_{-1+i-m-d_V} v \pmod{O(V)}$$

によって結合代数となり，Borcherds の公式の応用として，上と同じように

$$o_0(a * v) = o_0(a)o_0(v) \text{ in } \text{End}(W[d])$$

が成り立っていることがわかる．

## 2.4 $\log^i z$ と広義固有空間

次に  $\log^j z$  の意味を見てみよう．ポーチャーズ等式 ( $q = 0$ ) と  $L(-1)$ -微分関係式から，

$$L(0)u_{(n,j)}w = (\text{wt}(w) + \text{wt}(u) - n - 1)u_{(n,j)}w + (j + 1)u_{(n,j+1)}w$$

を得る．即ち，

$$(L(0) - \text{wt}(w) - \text{wt}(u) + n + 1)u_{(n,j)}w = (j + 1)u_{(n,j+1)}w$$

であり， $L(0) - \text{wt}(w) - \text{wt}(u) + n + 1$  の作用によって， $\log^j z$  項が  $\log^{j+1} z$  項に移っている．しかも， $\mathcal{Y}(u, z)$  の定義より， $j > K_u$  なら  $u_{n,j} = 0$  なので，

$$(L(0) - \text{wt}(w) - \text{wt}(u) + n + 1)^k u_{(n,j)}w = 0,$$

であり， $u_{(n,j)}w$  が固有値  $\text{wt}(w) + \text{wt}(u) - n - 1$  の重複度が高々  $K_u$  である  $L(0)$  の広義固有ベクトルであることを示している．この固有値のこともウエイトと呼び，広義固有ベクトルのことも斉次元と呼ぶことにする．固有ベクトルは区別して固有ベクトルと呼ぶ．ここで，固有値  $r$  の広義固有ベクトル  $v$  に対して， $(L(0) - r)^m v = 0$  となる最小の  $m$  を  $v$  の  $\text{hight}^2$  と呼び， $L(0)$  が作用する空間に  $\bigoplus_{i=0}^d T(i)$  に対しては各広義固有空間の元の高さの最大を  $\text{hight} \bigoplus_{i=0}^d T(i)$  で表す．

トップ加群  $\bigoplus_{i=0}^d T(i)$  の高さの上限が  $A_d(V)$  の構造から与えられることを示そう． $C_2$ -有限である場合には，Zhu 代数  $A_{d_V}(V)$  は有限次元なので，ある多項式  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$  があって， $A_{d_V}(V)$  の中で  $f(\omega) = 0$  となる． $f(x) = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{m_i}$  と分解する．ただし， $i \neq j$  なら  $\lambda_i \neq \lambda_j$  である．最大の  $m_i$  を  $\text{hight}(A_{d_V}(V))$  で表す．

**補題 8**  $V$  を  $C_2$ -有限性である頂点作用素代数とし， $T$  を有限生成  $V$ -加群とすると， $T[d_V]$  の斉次元の高さは  $\text{hight} A_{d_V}(V)$  を超えない．それゆえ， $0 \neq u_{(n,j)}w \in \bigoplus_{i=0}^d T(i)$  なら  $j \leq \text{hight} A_{d_V}(V)$  である．

<sup>2</sup>広義固有空間の元  $v$  に対するこのような  $m_i$  の名称をご存知の方がおられましたら教えてください．ここでは勝手に高さと呼びました．



[証明]  $T[d_V]$  は次数を保つ作用によって,  $A_{d_V}(V)$ -加群なので,

$$0 = o(0)T(0) = o\left(\prod_{i=1}^r (\omega - \lambda_i)^{\text{hight}A(V)}\right)T(0) = \prod_{i=1}^r (L(0) - \lambda_i)^{\text{hight}A(V)}T(0)$$

となる. ゆえに,  $\text{hight} \bigoplus_{i=0}^d T(i) \leq \text{hight}A(V)$  を得る. もし,  $j > \text{hight}A(V)$  で  $t = u_{(n,j)}w \in T(r), r \leq d$  なら,  $t$  は  $L(0)$  の作用に関して固有値  $\text{wt}(u) + \text{wt}(w) - n + 1 + r$  の広義固有ベクトルなので,  $u_{(n,j)}w = \frac{1}{j}(L(0) - \beta)u_{(n,j-1)}w = \cdots = \frac{1}{j!}(L(0) - \beta)^j u_{(n,0)}w = 0$  となる. ここで,  $\beta = \text{wt}(u) + \text{wt}(w) - n + 1 + r$  である. ■

## 2.5 補題 1 の証明

これらの準備の下で, 1 節での結果の証明に使った補題 1 の証明を与えよう.

もし,  $S$  が既約加群なら,  $0 \neq w \in S(0)$  に対して, [DM] の結果より,  $S = \langle a_n w \mid a \in V, n \in \mathbb{Z} \rangle$  なので,

$$S = \langle a_{\text{wt}(a)-2-d_V-j} w \mid a \in V, j \in \mathbb{N} \rangle \oplus S[d_V]$$

と表示できる. これを  $W$  の組成列ごとに適用すると,  $W$  の組成因子の最小ウエイトは  $\text{wt}(W) + d_V$  以下なので,

$$W = \langle a_{\text{wt}(a)-2-d_V-j} w \mid a \in V, w \in W[d_V], j \in \mathbb{N} \rangle \oplus W[2d_V]$$

と表示できる. Borchers の恒等式より,

$$\begin{aligned} & u_{m,p}(a_{\text{wt}(a)-2-d_V-j} w) \\ &= a_{\text{wt}(a)-2-d_V-j} u_{m,p} w - \sum_{i=1}^{\infty} \binom{\text{wt}(a)-2-d_V-j}{i} (a_i u)_{\text{wt}(a)-2-d_V-j+m-i,p} w \end{aligned}$$

となるので,

$$T = \langle u_{m,j} w, a_{\text{wt}(a)-2-d_V-j} w' \mid w \in W[2d_V], w' \in W, a, u \in V \rangle$$

と表示できる. ここで,  $\text{wt}(a_{\text{wt}(a)-2-d_V-j} w') \geq d_V + \text{wt}(W)$  なので,

$$T[d_V] = \langle u_{m,j} w \in T[d_V] \mid w \in W[2d_V], u \in U, m, j \rangle$$

を得る. 補題 8 より,  $j \leq \text{hight}A_{d_V}(V)$  だけ考えてよい. また,  $u \in O_{2d_V}(U), w \in W[2d_V]$  なら  $u_{m,j} w = 0$  なので,

$$T[d_V] = \langle u_{s,j} w \in T[d_V] \mid w \in W[2d_V], u \in U/O_{2d_V}(U), j \leq \text{hight}A_{d_V}(V) \rangle$$

である. また,  $T[d_V]$  のウエイトが  $d_V + 1$  通りしかないので,  $s$  と取り方は高々  $d_V + 1$  通りしかない. 結局

$$\dim T[d_V] \leq \dim A_{2d_V}(U) \times \dim W[2d_V] \times \text{hight}A_{d_V}(V) \times (d_V + 1)$$

となり,  $\dim T[d_V]$  は  $U, W, V$  の構造で押さえられる. ■

### 3 ホモロジー群

$V$  の  $V$ -加群としての拡大が他の加群の拡大を決定するので、ホモロジー群を  $V$  によって定義しよう。命題 7 で、加群  $U$  に対して、それへ全射を持つような射影加群を構成したが、以後のために、上の射影加群の中に最小のもの（射影被覆）が存在することを標準的なホモロジー理論を使って示す。

補題 9 有限生成  $V$ -加群  $U$  に対して、全射  $f : W \rightarrow U$  を持ち、 $\text{Ker} f$  に直和因子を持たないような射影加群  $W$  は同型を除いて一意に決まる。

[証明] 2つの射影加群と全射  $f_i : P_i \rightarrow U$  ( $i = 1, 2$ ) があるとす。この時、 $W = \{(a, b) \in P_1 \oplus P_2 \mid f_1(a) = f_2(b)\}$  は  $V$ -加群であり、射影  $\pi_i : W \rightarrow P_i$  は全射である。ゆえに、 $\tau_i : P_i \rightarrow W$  で、 $\rho_i \tau_i = 1_{P_i}$  となるものが各  $i$  に対して存在する。 $\pi_2 \tau_1 : P_1 \rightarrow P_2$  と  $\pi_1 \tau_2 : P_2 \rightarrow P_1$  は  $f_2 \pi_2 \tau_1(P_1) = U$  を満たしているので、 $(\pi_1 \tau_2 \pi_2 \tau_1)^s(P_1)$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) は  $P_1$  の部分加群の減少列である。 $P_1$  は有限生成な（有限の長さの組成列を持つ）ので、充分大きな  $N$  に対して、 $(\pi_1 \tau_2 \pi_2 \tau_1)^N(P_1) = (\pi_1 \tau_2 \pi_2 \tau_1)^{N+1}(P_1)$  となる。ここで、 $\Phi_1 = (\pi_1 \tau_2 \pi_2 \tau_1)^N$  と置くと、 $\Phi_1|_{\Phi_1(P_1)}$  は単射なので、 $P_1 = \text{Im} \Phi_1 \oplus \text{Ker} \Phi_1$  となる。また、 $\text{Ker} \Phi_1 \subseteq \text{Ker} f_1$  なので、仮定より  $\text{Ker} \Phi_1 = 0$  であり、 $\pi_2 \tau_1 : P_1 \rightarrow P_2$  が単射となることがわかる。同様に、 $\pi_1 \tau_2 : P_2 \rightarrow P_1$  も単射であり、 $P_1 \cong P_2$  を得る。 ■

加群  $U$  に対する射影被覆  $f : P \rightarrow U$  の構成を  $\text{Ker} f$  に対しても行うことによって、 $U$  の射影分解（完全系列）:

$$\dots \rightarrow P^{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} P^n \xrightarrow{f_n} P^{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P^1 \xrightarrow{f_1} U \xrightarrow{f_0} 0$$

を構成することが出来る。ここで、ホモロジー群  $H_n(U)$  を

$$H_n(U) := (\text{Ker} f_{n-1} \cap \text{Vac}(P_n)) / f_{n+1}(\text{Vac}(P_{n+1})),$$

と定義する。ここで、 $\text{Vac}(W) = \{w \in W \mid v_n w = 0 \forall v \in V, n \geq 0\}$  は真空と同じ性質を満たす元の空間である。この時、次の定理が成り立つ。

定理 10  $V$  を  $C_2$ -有限である単純頂点作用素代数とする。この時、 $V$  が有理型である必要充分条件は  $H_0(V) = 0$  である。

[証明] もし、 $V$  が有理型なら、明らかに  $H_0(V) = 0$  である。逆に、 $H_0(V) = 0$  で、 $V$  が有理型でないとする、 $V$  は射影的でないので、射影加群  $P$  と非分裂全射  $f : P \rightarrow V$  が存在する。 $\text{Vac}(V) = \mathbb{C}1$  なので、 $\text{Vac}(P) - \text{Vac}(\text{Ker} f)$  の元  $p$  で、 $f(p) = 1$  となるものがある。この時、Borchers の恒等式と、仮定  $v_n p = 0 \forall n \geq 0$  から、容易に  $W = \langle v_{-1} p \mid v \in V \rangle$  が  $V$ -部分加群となることがわかる。しかも、 $f|_W$  は単射である。それゆえ、 $P = \text{Ker} f \oplus W$  となり、矛盾を得る。 ■

最後に、予想を述べておこう。

予想 1  $P$  が射影的なら、 $U \boxtimes P$  も射影的である。

予想 2  $\bigoplus_{i=0}^{\infty} H_i(V)$  は自然な積 (カップ積) によって可換環となり,  $\bigoplus_{i=0}^{\infty} H_i(U)$  はその加群となる.

## References

- [B] R.E. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **83** (1986), 3068-3071.
- [DLM] C. Dong, H. Li, and G. Mason, *Vertex operator algebras and associative algebras*, J. Algebra **206** (1998), no. 1, 67-96.
- [DM] C. Dong and G. Mason, *On quantum Galois theory*, Duke Math. J. **86** (1997), no.2, 305-321.
- [FHL] I.B. Frenkel, Y.-Z. Huang and J. Lepowsky, "On axiomatic approaches to vertex operator algebras and modules", 1989: Memoirs of the American Mathematical Society. Vol. 104 (American Mathematical Society, Providence. RI. 1993).
- [GN] M. Gaberdiel and A. Neitzke, *Rationality, quasirationality, and finite W-algebra*, DAMTP-200-111.
- [M] M. Miyamoto, *Modular invariance of vertex operator algebra satisfying  $C_2$ -cofiniteness*, Duke Math. J. **122** (2004), no. 1, 51-91.
- [Z] Y. Zhu, *Modular invariance of characters of vertex operator algebras*, J. Amer. Math. Soc., **9** (1996), 237-302.