積分論　1の0

イントロダクション

この講義では，測度論と積分論を学習します。

。測度論（そくどろん）とは何か。測度（measure）とは，モノサシ，はかり のこと。長さ，面積，体積…をはかるって，実際にはそう簡単なことじゃない。

——。——。——。——

例　海岸線の長さをはかることを考える。たとえば，波のない静かな日に，直径 1 km ていどの円形の小島の周囲の長さを測ることにする。もし縮尺 1/50000 または 1/25000 の地図上で周囲の長さを測るならば周囲は約 3.14 km という値が得られる。しかし海岸線の小さな出入（小湾や小半島）まで考えるなら，'長さ'の値はもう少し大きくなるにちがいない。1/10000, 1/5000 と大縮尺になるにしたがって，'長さ'は増えてゆくと考えられる。さらに一つ一つの岩石の細かな凹凸まで考慮するなら測られた'長さ'はもっと大きな値をとると予想できる。

海岸線の長さの測り方にはどんな方法があるか。

（方法A）　$\varepsilon > 0$ を与える．ディバイダを長さ ε にひらいて，海岸線にそって歩く。歩数に ε をかければ，海岸線のおよその長さ $L_A(\varepsilon)$ を得る。$\varepsilon \downarrow 0$ とするとき，$L_A(\varepsilon)$ は真の長さ（存在するとして）に収束することが期待される。しかし，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき，無視されていた小さな出入りが次々と現れるから $L_A(\varepsilon)\uparrow$ であり，$L_A(\varepsilon) \uparrow +\infty$ as $\varepsilon \downarrow 0$ となるかもしれない。

（方法B）　$\varepsilon > 0$ を与える。海岸線からの距離が ε 以内の領域（海岸線の ε-近傍）を，A の方法で最短距離になるように歩く。ディバイダのはばを $\varepsilon' > 0$ としたときの，この値を $L_B(\varepsilon, \varepsilon')$ で表す。かりに $\lim_{\varepsilon' \downarrow 0} L_B(\varepsilon, \varepsilon') \equiv L_B(\varepsilon)$ が存在したとする。しかし，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき $L_B(\varepsilon) \uparrow +\infty$ となるかもしれない。

Koch 曲線　$a_{n+1} = \left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)a_n = \frac{4}{3}a_n$

$a_n \to +\infty$

(方法C)　$\varepsilon>0$ を与える。海岸線の ε-近傍は，ほぼ 2ε のソーセージのような形をしていると考えられる。このソーセージの'面積'をはかり，それを 2ε でわる。これを $L_C(\varepsilon)$ とする。$L_C(\varepsilon)$ は $\varepsilon\downarrow 0$ のときどうなるだろうか。

(方法D)　$\varepsilon>0$ を与える。海岸線を，その上の点を中心とした半径 ε の小円でおおうとき，その数が最小になるようにする。この値を $N=N(\varepsilon)$ とおき，$L_D(\varepsilon) = \pi\varepsilon^2\cdot N(\varepsilon)$ とおく。$L_D(\varepsilon)$ は $\varepsilon\downarrow 0$ のときどうなるだろうか。

リチャードソン（L. F. Richardson）という人は，方法Aで多くの海岸線や国境について $L_A(\varepsilon)$ を実際にもとめた。そして $L_A(\varepsilon)$ と ε のあいだに次の単純な関係があることをみた。

命題（Richardson）　与えられた海岸線に対して $F, D>0$ がきまり，

$$L_A(\varepsilon) \sim F\varepsilon^{1-D}$$

である。（すなわち，ディバイダの歩数はおよそ $F\varepsilon^{-D}$。）

これは Richardson 効果とよばれる。

注．Dの値は国によって異なる。例，英国西海岸 $D=\frac{3}{2}$，南アフリカ $D=1$，オーストラリア $D=\frac{5}{4}$

ここでディバイダのはば角を，ふつうの長さ ε の代りに ε の α 乗 ε^α，$\alpha>0$，ではかることにする。上の命題によれば，歩数は $N=F\cdot\varepsilon^{-D}$ であるから，

- $\alpha = D$ ならば　総辺長のおよその長さは $F\cdot\varepsilon^{-D}\cdot\varepsilon^{D} = F$ であり，ディバイダのはば ε と無関係になってつごうがよい。

さらに，

- $\alpha < D$ ならば　$L_A(\varepsilon) = F\varepsilon^{-D}\cdot\varepsilon^{\alpha} = F\varepsilon^{\alpha-D}\to+\infty$，$\varepsilon\to 0$
- $\alpha > D$ ならば　$L_A(\varepsilon) = F\varepsilon^{-D}\cdot\varepsilon^{\alpha} = F\varepsilon^{\alpha-D}\to 0$，$\varepsilon\to 0$

となるから，これ以外の α のえらび方はなさそうである。

というようなことを，海辺を散歩しながら考える人は，あまり多くないであろう。しかし考える人があってもよい。何かの役に立つかもしれない（ピタゴラスの定理を見よ）。

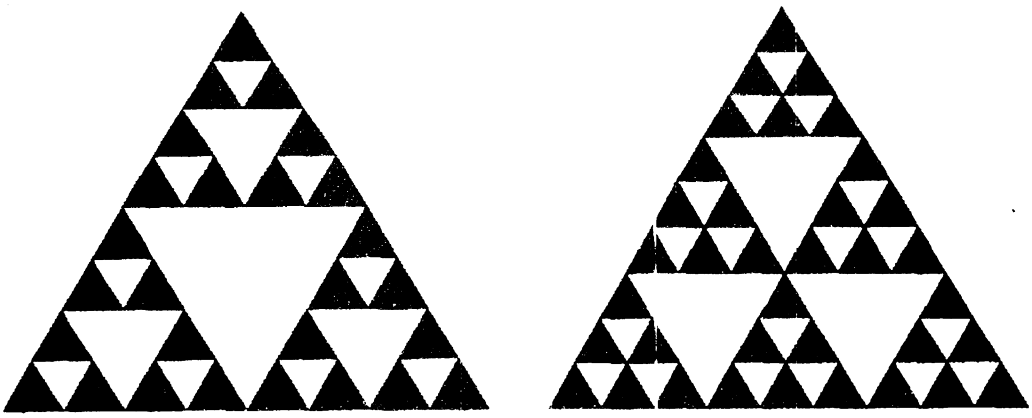

FIG. 1. – The first stages in the construction of SG(2) and SG(3).

Unless the sequence ξ is periodic $F^{(\xi)}$ does not have any exact scaling property, but it is spatially homogeneous in the sense that all triangles of a given size in $F^{(\xi)}$ are identical. Figure 2 shows the first 3 levels in the construction of the set F associated with the sequence $\xi = (2, 3, 2, ...)$.

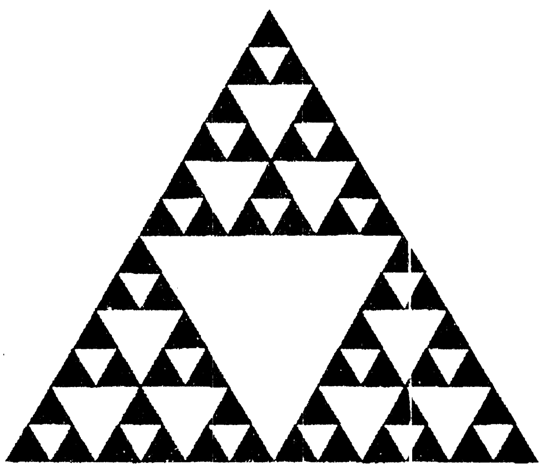

FIG. 2. – The first three levels of a scale irregular Sierpinski gasket.

A previous paper by one of us [10] considered the case when the environment sequence ξ was a sequence of i.i.d. random variables; the sets obtained were called 'homogeneous random Sierpinski gaskets'. We use a different term here, as the sets studied in this paper are not necessarily random. An example of such a scale irregular Sierpinski gasket was discussed in Section 9 of [10]. We also remark that if, at each level, one chooses a different (random) procedure for subdividing each small triangle, then one obtains an example of the random recursive fractals studied in [19], and that diffusions on some sets of this type are studied in [11].

The p … ır after a
few addi … that the
"subdivi … a corre-
spondin … ct, an es-
sentially … tiling T
which is … simulta-
neously … result is
again cc … This T is
suggeste
If you … angle ex-
ample ir … ıt try the
same tr … uclidean
pentago … yields a
simply c … e $\mathbb{S}$. Rie-
mann hi … e is a con-
formal l … e of $\mathbb{C}$ or
$\mathbb{D}$. The i … so-called
conform … s of T. Is
this tilir … loes it lie
in $\mathbb{C}$ or i … les? Does
the patt … ore circle
packing … uch ques-
tions, sc
Now … have sus-
pected, … packing;
it is a ro … se" circle
packings like those of Figure 3. Your first instinct
might be to improve conformal fidelity via refine-
ment, as we did in the box on page 1382. The key
expe … ite a
diffe … -per-
haps … , the
more … pat-
tern. … riant
unde … r *ag-*
greg … e 11
are … ggre-
gatio … es is
com … f its
prec
D … work
in Po … out-
lines … e 11.
The … ame
from … iling
is p … the
corr … line
up v … tage
is re … next.
Mot … oyd,
Parr … hese
obs … con-
verg … o be
asso … *d'en-*
fan … onal
fun … ates
encode the subdivision rule. That iteration gives an associated Königsfunction k, an entity right out of nineteenth-century function theory, and T is just

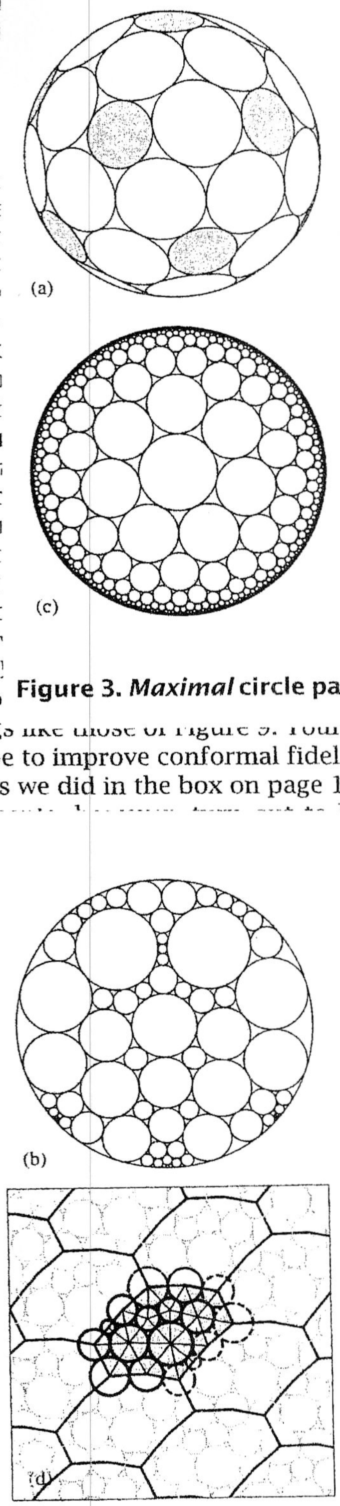

Figure 3. *Maximal* circle packi … ng sampler.

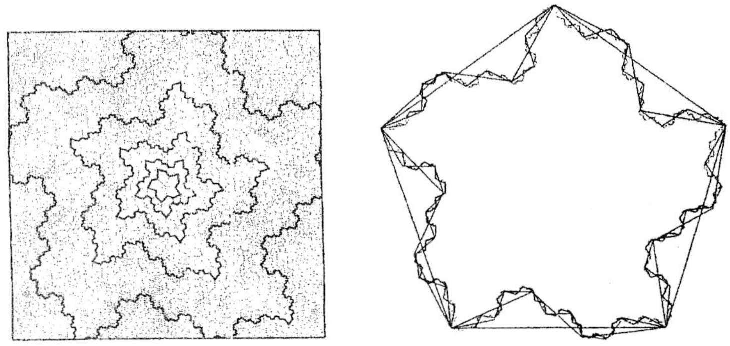

Figure 11. Outline, scale, rotate, and overlay the aggregates.

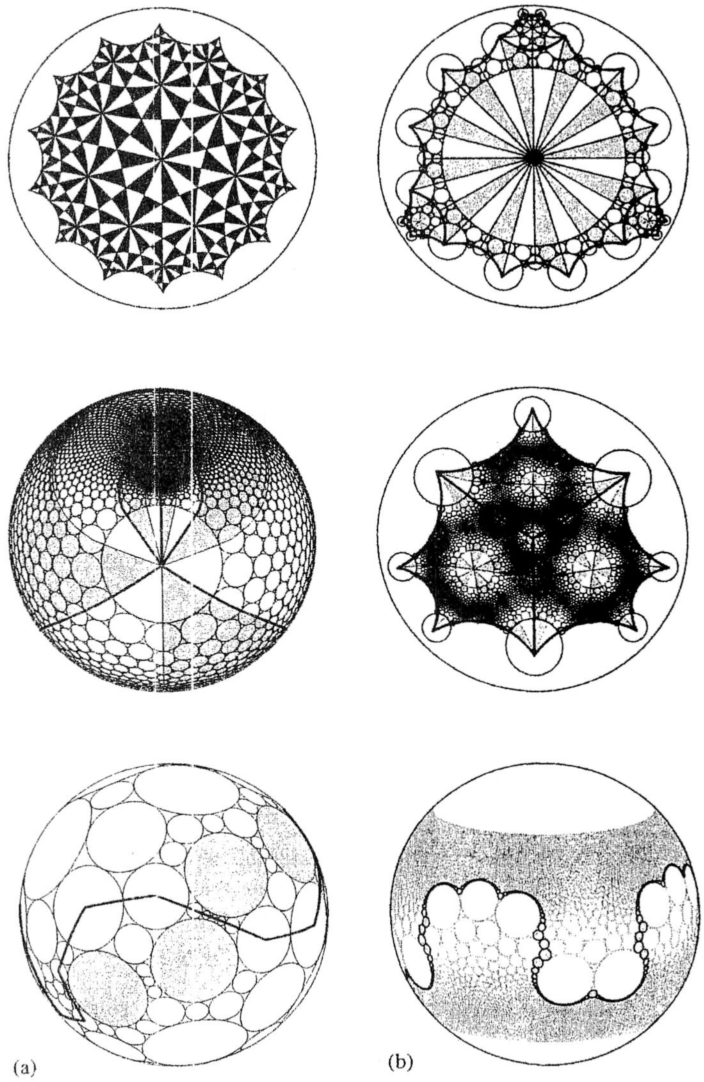

Figure 12. Circle packing for conformal structure.

the cell decomposition of $\mathbb{C}$ defined by $k^{-1}([0,1])$. And with the scaling confirmed, renormalization (as started on the right in Figure 11) suggests a limit tiling in the pattern of T which would have perfect scaling, *fractal* pentagonal tiles, and a

実解析演習 1の1
復習

・ いくつかのものをひとまとめに考えた〈ものの集まり〉のことを集合という。数学では集合の範囲のはっきりしていること，つまりある要素（元）が集合に属するか否かが判別できることを要請する。要素 a が集合 A に属するとき $a \in A$ とかき，そうでないとき $a \notin A$ とかく。

2つの集合 A, B について，$A \subset B$ とは
A の任意の元 a について，a は B の元である
ということである。$A \subset B$ かつ $B \subset A$ のとき，$A = B$ とかき，「A と B は相等しい」という。

・ とくに実数全体は集合である。通常これを $\mathbb{R}$ とかく。
実数には順序がついている。つまり，$a, b \in \mathbb{R}$ ならば
$a < b$，$a = b$，$b < a$ のいずれか1つがなりたつ。
$E \subset \mathbb{R}$ とする。もし
すべての $x \in E$ に対し $x \leqq b$ となる
ような $b \in \mathbb{R}$ が存在すれば，
≪ E は上に有界 ≫ といい，b を E の上界という。
B を E のすべての上界からなる集合とする。もし
すべての $b \in B$ に対し $c \leqq b$ となる
ような $c \in B$ が存在すれば，c を E の上限といい，$\sup E$ とかく。（$\sup\limits_{x \in E} x$ とかくこともある。）

E の下限 $\inf E$（または $\inf\limits_{x \in E} x$）は，
$\inf\limits_{x \in E} x = -\sup\limits_{x \in E}(-x)$ によって定義する。

以下 A, B, C 等は集合を表す。

1 つぎを証明せよ

(a) $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$

(b) $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$

(c) $A\setminus B = (A\cup B)\setminus B = A\setminus(A\cap B)$

(d) $A\setminus B = \emptyset \iff A\subset B$

(e) $(A\cap B)\setminus C = (A\setminus C)\cap(B\setminus C)$

(f) $A\cap(B\setminus C) = (A\cap B)\setminus(A\cap C)$

(g) $(A\setminus(E\setminus F))\cap F = A\cap(E^c\cup F)\cap F = A\cap F$

(h) $(A\setminus(E\setminus F))\setminus F = A\cap E^c\cap F^c = (A\cap F^c)\setminus E$.

2. f を A から B への写像, $P, P_1, P_2\subset A$, $Q, Q_1, Q_2\subset B$ とする。つぎを証明せよ。

(a) $P_1\subset P_2 \Rightarrow f(P_1)\subset f(P_2)$

(b) $f(P_1\cup P_2) = f(P_1)\cup f(P_2)$

(c) $f(P_1\cap P_2)\subset f(P_1)\cap f(P_2)$

(d) $f(A\setminus P)\supset f(A)\setminus f(P)$

(e) $Q_1\subset Q_2 \Rightarrow f^{-1}(Q_1)\subset f^{-1}(Q_2)$

3 (a) P を命題「雪は黒い」とする。P の否定命題 $\neg P$ をのべ，命題 $P\vee\neg P$ はつねに真であること，命題 $P\wedge\neg P$ はつねに偽であることをしめせ。

(b) $P(x)$ を述語「x は黒い」とし，
$A = \{x\in U\ ;\ P(x)$ が真$\}$ として集合 A を定める。

。述語 $\neg P(x)$ （$P(x)$ でない）の内容をのべよ。

。$A^c = \{x\in U\ ;\ \neg P(x)$ が真$\}$ であることをしめせ。

。$A\cup A^c = U$, $A\cap A^c = \emptyset$ であることをしめせ。

実解析　　1 の 2
σ-algebra

∘ X をある集合とし，Xの部分集合のある集りを $\mathcal{A}$ とかく。

$\mathcal{A}$ が有限加法族であるとは，

(1) $X \in \mathcal{A}$

(2) $A \in \mathcal{A}$ ならば $A^c \in \mathcal{A}$

(3) $A \in \mathcal{A}$ かつ $B \in \mathcal{A}$ ならば $A \cup B \in \mathcal{A}$

の3つがなりたつことである。

$\mathcal{A}$ が σ-加法族 (σ-algebra) であるとは，

(1) $X \in \mathcal{A}$

(2) $A \in \mathcal{A}$ ならば $A^c \in \mathcal{A}$

(3) $A_n \in \mathcal{A}$, $n=1,2,\cdots$, ならば $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathcal{A}$

の3つがなりたつことである。

∘ $\mathcal{C}$ を Xの部分集合のある族とする。$\mathcal{C}$ を含む最小の σ-加法族を "$\mathcal{C}$ から生成された σ-加法族" といい，$\sigma(\mathcal{C})$ とかく。

とくに $X=\mathbb{R}^d$ とする。$\mathbb{R}^d$ のコンパクト集合（＝有界な閉集合）全体を $\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ で表す。$\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ を含む最小の σ-集合族を Borel 集合族といい，$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ とかく。$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ の元を Borel 集合という。

演6

1. $A \subset X$ に対して関数 $1_A(x)$ を、

$$1_A(x) = 1, \quad x \in A$$
$$= 0, \quad x \notin A.$$

で定義する。

(a) つぎをしめせ： $1_{A^c}(x) = 1 - 1_A(x)$

$$1_{A \cup B}(x) = 1_A(x) + 1_B(x) - 1_{A \cap B}(x)$$

(b) (A_λ) を実数のパラメータ集合 Λ $(\lambda \in \Lambda)$ をもつ、Xの集合族とする。つぎをしめせ：

$$1_{\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)}(x) = \inf_{\lambda \in \Lambda} 1_{A_\lambda}(x), \quad x \in X$$

$$1_{\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)}(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda} 1_{A_\lambda}(x), \quad x \in X$$

2. $X = \{$りんご, みかん, すいか$\}$ の有限加法族をすべて列挙せよ。

3. $\mathcal{A}$ を X の σ-加法族とする。次をしめせ：

$A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \cdots,$ ならば $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \in \mathcal{A}$.

実解析　1の3

σ-加法族の例

1 (i) 有限回の硬貨投げ

硬貨の表を1, 裏を0と表す。n回の硬貨投げの結果の可能性全体 $\{0,1\}^n$ を X とする。$\mathcal{A}$ を X の部分集合全体とする： $\mathcal{A} = \{A\ ;\ A \subset X\}$. $\mathcal{A}$ はσ-加法族である。

(ii) 有限回の乱歩

2次元格子 $\mathbb{Z}^2$ の原点から出発する長さ n の道全体の集合を X とする：

$$X = \{ x = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)\ ;\ \vec{x}_i = (x_0^{(i)}\ x_1^{(i)} \cdots x_n^{(i)}),\ i = 1, 2,$$
$$x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = 0,\ \|(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}) - (x_{k-1}^{(1)}, x_{k-1}^{(2)})\| = 1,$$
$$k = 1, 2, \cdots, n \}.$$

$\mathcal{A}$ を X の部分集合全体とする。$\mathcal{A}$ はσ-加法族である。

(iii) カードの配置

1からnまでの数字を書いたn枚のカードを, 1からnまでの番号のついた場所においていく。この配置の可能性全体 X は, n個の置換全体 $\mathcal{S}_n$ である：

$$X = \mathcal{S}_n = \{ \sigma : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}\ ;\ \sigma(i) \neq \sigma(j),\ i \neq j \}.$$

$\mathcal{A}$ を $\mathcal{S}_n$ の部分集合全体とする。$\mathcal{A}$ はσ-加法族である。

2 (i) 無限回の硬貨投げ

$$X = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{ x = (x_1, x_2, \cdots)\ ;\ x_i = 1 \text{ or } 0 \}$$

とする。$\mathcal{A}$ を X の部分集合の全体とする。$\mathcal{A}$ はσ-加法族である。

8

1. 左ページの 1(i)−(iii), 2(i) の主張をしめせ。

Lebesgue 小伝

数学者 Lebesgue については，L. Perrin が「数学思想の大きな流れ」(1948) に「近代解析の更新者アンリ・ルベーグ」を載せている．

Henri Léon Lebesgue (1875, 6/28—1941, 7/26) はフランスの Bauvais に生れた．幼少の頃に父と死別し，生活は豊かではなかった．中学の途中で Paris に移り，1894 年に Ecole Normale Supérieure に入学した．1897 年授教資格者となり，Nancy の中学校の教師に就職し，多忙の中で研究を進めた．


Henri Lebesgue

C. R. Acad. Sci. Paris の 1898 年 6 月19日号と11月27日号，1900年11月26日号と12月 3 日号，1901年 4 月29日号に順次発表された成果をまとめたものが，1902 年学位論文として現れた：

Intégrale, Longueur, Aire. Thèse, Paris (1902)；Annali di Matematica Pura e Appl. (3) 7 (1902), 231—359.

「積分，長さ，面積」と題するこの論文が，画期的な Lebesgue 積分の誕生を告げたのである．すなわち，Cantor, M. E. C. Jordan (1838—1921), É. F. E. J. Borel (1871—1956) の業績に基礎をおいて，測度と積分の概念を導入し，その理論を展開したものである．その目次は：序文；I．集合の測度；II．積分；III．曲線の長さ；IV．曲面積；V．平面上に貼付可能な曲面；VI．Plateau 問題．

同年 Rennes の理科大学講師となり，ここで Borel 叢書に含まれる二つの著書が刊行された：

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives. Paris (1904)；

Leçons sur les séries trigonométriques. Paris (1906).

前者は 1928 年に再版されている．

ついで，1906年 Poitiers の大学の講師となり，1910 年 Sorbonne 大学の講師に就任した．1920 年 Sorbonne 大学の教授となったが，1921 年には Paris の Collège de France の教授に転じた．1922 年に Jordan の後任として Paris の科学アカデミーの会員に推挙された．そして，ロンドンの王立協会，ローマのリンツェイ学士院，デンマークの王立学士院，ベルギーやルーマニアやポーランドの学士院などの会員としても迎えられ，多くの大学から名誉学位を贈られた．生涯を通じて研究に尽し，四か月余りの病臥の後，世を去った．

実解析　　　1の4

可測関数

○ 集合 X とその上の σ-加法族 $\mathcal{A}$ の組 $(X, \mathcal{A})$ を《可測空間》という。

f を X から X' への関数，$(X, \mathcal{A})$，$(X', \mathcal{A}')$ を可測空間とする。f が可測関数であるとは，

$$\{ f^{-1}(A') \,;\, A' \in \mathcal{A}' \} \subset \mathcal{A}$$

となっていることである。（うるさくいうときには"$\mathcal{A}$-可測である"という。）

例（無限回の硬貨投げ）

$(X, \mathcal{A}) = (\{1, 2, \cdots, 6\}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(X))$，$\mathcal{P}(X) \equiv X$ の部分集合全体

$(X', \mathcal{A}') = (\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \mathcal{P}(X'))$.

$$f : X \to X', \quad (x_1, x_2, x_3, \cdots) \longmapsto \begin{cases} \min\{ n \geq 1 \,;\, x_n = 6 \} & \text{if } \{\} \neq \phi \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

にたいの $A' \in \mathcal{P}(X')$ に対し，

$$f^{-1}(A') = \bigcup_{i \in A'} \{ (x_1, x_2, x_3, \cdots) \,;\, x_i = 6 \}$$

$$\in \mathcal{P}(X)$$

であるから，f は可測関数である。

○ f_n, $n = 1, 2, \cdots$, を X から X' への関数列で，各 $x \in X$ について
$f_n(x) \to f_0(x)$ とする。

Th1. (f_n) が可測関数ならば f_0 もそうである。

○ $f, g : X \to X'$ を可測関数とする。

Th2. (1) $a, b \in \mathbb{R}$（または $\mathbb{C}$）に対し $af + bg$ は可測である。

(2) $f \cdot g$ は可測，さらに $g \neq 0$ ならば f/g も可測である。

1. $(X, \mathcal{A}), (X', \mathcal{A}')$ を可測空間，f を X から X' への関数とする。
X の集合族 $\{f^{-1}(A') ; A' \in \mathcal{A}'\}$ は σ-加法族であることをしめせ。

2 $X = X' = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}' = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ とする。つぎの条件は同値であることをしめせ。

(i) $\forall a \in \mathbb{R} \ (\{x ; f(x) > a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

(ii) $\forall a \in \mathbb{R} \ (\{x ; f(x) \geq a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

(iii) $\forall a \in \mathbb{R} \ (\{x ; f(x) < a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

(iv) $\forall a \in \mathbb{R} \ (\{x ; f(x) \leq a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

3 $(A_i), i=1,2,\cdots$ は $\mathbb{R}$ の上の Borel 集合 (i.e. $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$)，
$(a_i), i=1,2,\cdots$ は実数列で，$a_i \neq a_j$ for $i \neq j$ とする。このとき，単関数

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x)$$

は可測関数 ($(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 間の) であることをしめせ。

11

実解析　　1の5

外測度からつくられる測度

。集合 X のすべての部分集合 A に対して実数 $\mu^*(A)$ が定義され，次の4条件をみたすとき，集合関数 μ^* を X 上の外測度という。

(1) $0 \leqq \mu^*(A) \leqq +\infty$

(2) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(3) $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leqq \mu^*(B)$

(4) $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

条件(4)は測度の条件(ii)（1の5）よりもゆるく，成りたちやすい。

例．$\mathbb{R}^n$ の部分集合 A に対して，A を高だか可算個の有界な半開区間の列 $\{I_i\ ;\ i=1,2,\cdots\}$ で被覆して $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ としたとき，値 $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$ のこのような被覆のしかたに対する下限を $m^*(A)$ とかく。つまり

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|\ ;\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right\}.$$

この m^* を μ^* とかけば，上の(1)－(4)を満足する。この m^* をルベーグ外測度という。

。外測度 μ^* に関して <u>A が可測</u> であるとは，

(*)　　にんいの $W \subset X$ について　$\mu^*(W) = \mu^*(W \cap A) + \mu^*(W \cap A^c)$

となることである．

これはつまり，W の外測度がその分割のしかたによらぬことを意味する。μ^* をてきとうな確率と解釈して

A … 花子が花見にいくという事象

W … 太郎が花見にいくという事象

とおけば，可測性の要請する〈客観性〉が理解できるであろう。$A \subset \mathbb{R}^n$ がルベーグ外測度について条件(*)をみたすとき，A は<u>ルベーグ可測</u>であるという。

この μ^* から 測度 μ を次のように構成することができる。

Th（カラテオドリの定理）$\mathcal{M}$ を μ^* 可測な集合の全体とする。
μ^* を $\mathcal{M}$ に制限したもの $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}}$ は，X の上の測度である。

くわしくいうと，$(X, \mathcal{M}, \mu^*|_{\mathcal{M}})$ が測度空間になるということである。

実解析　　1の6

拡張定理

X = ある集合, $\mathcal{A}$ = X の有限加法族, $\mathcal{B}$ = X の σ-加法族で ($\mathcal{A}$ を含むもの) とする。関数 $m : \mathcal{A} \to \bar{R}^{+}$ が有限加法的測度とは,

(i) $m(\phi) = 0$

(ii) $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \phi$ ならば $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

がなりたつことである。

$(X, \mathcal{B})$ 上の測度 μ が与えられているとする。μ が m の拡張であるとは,

全ての $A \in \mathcal{A}$ に対し $\mu(A) = m(A)$

がなりたつことである。

このような μ を定義できるとき, m は $\mathcal{B}$ の上に拡張されるという。

Th. (E. Hopf) $(X, \mathcal{A})$ 上の有限加法的測度が, $(X, \mathcal{B})$ 上の測度 μ に拡張されるための必要十分条件は, m が $\mathcal{A}$ 上完全加法的なこと (i.e. $\mathcal{A}$ の集合に対して 1の5の測度の条件 (i), (ii) をみたすこと) である。

さらに, m が $\mathcal{A}$ の上で σ-有限である (i.e. 1の5の条件 (*) をみたす) ならば, 拡張は一意的である。

問題2のつづき.

$(\mathbb{Z}^2)^{\Lambda}$ 上の測度 m_{Λ} を,

$$m_{\Lambda}(\{x = (x_{n_1} x_{n_2} x_{n_3} \cdots x_{n_k}); x_{n_1} = x_1, x_{n_2} = x_2, \cdots, x_{n_k} = x_k\})$$
$$= P_{0x_1}(n_1) P_{x_1 x_2}(n_2 - n_1) \cdots P_{x_{k-1} x_k}(n_k - n_{k-1})$$

(ただし. $P_{xy}(n)$ は行列 $(P_{xy}; x, y \in \mathbb{Z}^2)$ の n 乗積の (x,y) 成分, $P_{xy} = \frac{1}{4}$ if $\|x-y\| = 1$, $P_{xy} = 0$ if $\|x-y\| \neq 1$.)

として定義する。$(X, \mathcal{A})$ 上の測度 m を,

$$m(A) = m_{\Lambda}(A) \quad \text{if} \quad A \subset (\mathbb{Z}^2)^{\Lambda}$$

1　つぼの中に赤球 m 個，白球 n 個が入っていて，1個づつとりだす。全部で N 回とりだしを行うことにする。

(a)　取りだした後再びもとにもどす場合（復元抽出）

赤球であることを 1，白球であることを -1 で表す。

可測空間は $(X, \mathcal{A}) = (\{1,-1\}^N, \mathcal{P}(X))$ とする。

各 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in X$ に対し，$\mu(\{x\}) \geq 0$ を適切にあたえ，$\mu(A) = \sum_{x \in A} \mu(\{x\})$ が $(X, \mathcal{A})$ 上の測度となるようにせよ。

(b)　取りだした後再びもとにもどさない場合（非復元抽出）

$N \leqq m+n$ の場合のみ考える。可測空間は

$(X, \mathcal{A}) = (\{x = (x_1, \cdots, x_N) \in \{1,-1\}^N ;\ N^-(x) \leqq m,\ N^+(x) \leqq n\},$
$\mathcal{P}(X))$

とする。ただし $N^+(x) = \#\{i ;\ x_i = 1\}$
$N^-(x) = \#\{i ;\ x_i = -1\}$.

各 $x \in X$ に対し $\mu(\{x\}) \geq 0$ を適切にあたえ，

$\mu(A) = \sum_{x \in A} \mu(\{x\})$ が $(X, \mathcal{A})$ 上の測度となるようにせよ。

2.　$\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$ とおく。1の3-1-(ii)で考えた乱歩の無限回版を考える。

$X = \{x \in (\mathbb{Z}^2)^{\mathbb{N}_0} ;\ x = (x_0, x_1, x_2, \cdots),\ x_k = (x_k^{(1)}, x_k^{(2)}),$
$x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = 0,\ \ \|(x_k^{(1)}, x_k^{(2)}) - (x_{k-1}^{(1)}, x_{k-1}^{(2)})\| = 1,\ k \geq 1\}$,

$\mathcal{A} = X$ の有限試行からなる部分集合族，$\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ ととることができる。

$\mathbb{N}_0$ の有限集合 $\Lambda = \{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$ $(0 \leqq n_1 \leqq n_2 \leqq \cdots \leqq n_k)$ に対し，

← 次ページ

実解析　　　1の7

測度

。 $\overline{\mathbb{R}}^+ = (\{x \in \mathbb{R} ; x \geqq 0\} \cup \{+\infty\})$ とする。 $(X, \mathcal{A})$ を可測空間とする。 関数（写像） $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}^+$ が測度であるとは，

(i)　$\mu(\phi) = 0$

(ii)　$(A_i)_{i \in I}$，I は有限または可算集合，を $\mathcal{A}$ の集合族であって disjoint なもの（i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$ if $i \neq j$）とする。

このとき　$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$$

がなりたつことである。

(ii) より，特に，

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) \quad \text{if} \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

である。

測度 μ が，次の (*) をみたすとき，σ-有限測度という。

(*)　集合族 $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \cdots$, で

$$X = \bigcup_n A_n \quad かつ \quad {}^\forall n \left(\mu(A_n) < +\infty\right)$$

なるものが存在する。

可測空間 $(X, \mathcal{A})$ 上に 1つ測度 μ を与えたとき，3つ組 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間という。

。 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とする。次の条件をみたす $Z \subset X$ を零集合（negligible set）という：

ある $A \in \mathcal{A}$ があって，$\mu(A) = 0$ かつ $A \supset Z$.

1 $(X, \mathcal{A}) = (\{0,1,2,\cdots,n\}, \mathcal{P}(\{0,1,2,\cdots,n\}))$ とする。次で与えられる μ は 測度 であることをしめせ。 $p \in [0,1]$ は定数とする。

$$\mu(\{k\}) = {}_nC_k \, p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,\cdots,n$$

$$\mu(A) = \sum_{k \in A} \mu(\{k\}), \quad A \in \mathcal{A}$$

2. $(X, \mathcal{A}) = (\{0,1,2,\cdots\}, \mathcal{P}(\{0,1,2,\cdots\}))$, $\lambda \in [0,\infty)$ とする。次で与えられる μ は 測度 であることをしめせ。

$$\mu(\{k\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

$$\mu(A) = \sum_{k \in A} \mu(\{k\}), \quad A \in \mathcal{A}.$$

3. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間とする。 $A_i \in \mathcal{A}$, $i=1,\cdots,n$, に対して

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{i<j} \mu(A_i \cap A_j)$$
$$+ \sum_{i<j<k} \mu(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n+1} \mu(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

をしめせ。((n にかんする帰納法) と 公式 (*) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.)

実解析　　1の8

確率空間

◦ 測度 μ がさらに、$\mu(X)=1$ をみたすとき、確率測度という。この場合、測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は確率空間とよばれる。σ-加法族の元 $A \in \mathcal{B}$ は事象とよばれる。

例 (a) さいころを1回ふったとき、$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$,

$$\mu(A) = \frac{\#A}{6}, \quad A \subset X \qquad (\#A \text{ は } A \text{ の点の数})$$

(b) さいころを2回つづけてふるとき、

$$X = \{(i, j) ;\ i, j = 1, \cdots, 6\} = \{1, \cdots, 6\}^2$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{P}(X), \qquad \mu(A) = \frac{\#A}{36}, \quad A \subset X$$

◦ 可測関数 $f : X \to X'$ は確率変数とよばれる。

例　$X' = \{\text{奇}, \text{偶}\}$, $X = \{1, 2, \cdots, 6\}$

$f : X \to X'$, $f(1) = f(3) = f(5) = \text{奇}$, $f(2) = f(4) = f(6) = \text{偶}$

次のようにして X' 上に確率測度 μ^f を導入することができる：

$$\mu^f(\{\text{奇}\}) = \mu(\{i ; f(i) = \text{奇}\}) = \mu(\{1, 3, 5\}) = \frac{1}{2}$$

$$\mu^f(\{\text{偶}\}) = \mu(\{i ; f(i) = \text{偶}\}) = \mu(\{2, 4, 6\}) = \frac{1}{2}$$

こうしてできた μ^f を、f の確率法則という。

1. $1,\cdots,10$ の番号札が1枚づつはいった箱から1枚ぬきだすとする。確率空間を $(X, \mathcal{B}, \mu) = (\{1,\cdots,10\}, \mathcal{P}(X), P)$, ただし $P(A) = \sum_{i \in A} \frac{1}{10}$ ，とする。

さて，1,2 は赤札，3,4,5 は青札，のこり5枚は白札とする。
$Y = \{$赤, 青, 白$\}$ とし，$f(i)$ は札 i の色を表すとする：
$f(1) = f(2) =$ 赤，　$f(3) = f(4) = f(5) =$ 青，$f(6) = \cdots = f(10) =$ 白.
Y 上に，f の確率法則 P^f を構成せよ。

2. X を非可算集合とし，$\mathcal{A} = \sigma(X)$ $(= \mathcal{P}(X))$ とする。
可測関数 $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ を

$P(A) = 0$ 　if 　A はたかだか可算集合
$P(A) = 1$ 　if 　A^c はたかだか可算集合

とおく。P は $(X, \mathcal{A})$ 上の確率測度になることをしめせ

3 原点 O から出発して数直線上をうごく点 P がある。さいころを投げて4以下の目がでたら P は1だけ正の方向にすすみ，5以上の目がでたら2だけ負の方向にすすむとする。この試行を n 回くりかえしたとき，点 P の座標が k である確率を $P_n(k)$ とする。
(i) $P_6(-6)$ の値を求めよ。
(ii) $P_6(5)$ の値を求めよ。
(iii) $P_{80}(50)$ と $P_{80}(-127)$ の値は，どちらが大きいか。
[95 琉球大

別冊付録

1. $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2) = \{ (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] ;$
$-\infty \leqq a_i \leqq b_i \leqq +\infty , \quad i = 1, 2 \}$
とおく。

(a) つぎをしめせ：

- $\phi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$
- $A \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$, かつ $B \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ ならば $A \cap B \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$
- $A \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ ならば、
  ある $n \geqq 1$ と $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ があって、$A^c = \sum_{j=1}^{n} A_j$

(b) $\mathcal{A} = \{ A = \sum_{i=1}^{n} A_i \ ; \ \exists A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2) \}$ とおく。
つぎをしめせ：

- $\phi \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A}$ ならば $A^c \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A}$ ならば $A \cap B \in \mathcal{A}$

注 $B = \sum_{j=1}^{n} B_j$ とは、[$B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ かつ $B_i \cap B_j = \phi$ if $i \neq j$

といういみ。

(b) の証明には次の表現をつかってよい：

$A = \sum_{i=1}^{m_1} A_i$, $B = \sum_{i=1}^{m_2} B_i$ のとき、

$$A \cap B = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} (A_{i_1} \cap B_{i_2}).$$

2° 集合 X とその上の σ-加法族 $\mathcal{A}_X$ の組 $(X, \mathcal{A}_X)$ を可測空間という。

$(X, \mathcal{A}_X)$, $(Y, \mathcal{A}_Y)$ を２つの可測空間とし, $\varphi : X \to Y$ を写像とする。

(a) $\{ \varphi^{-1}(B) \ ; \ B \in \mathcal{A}_Y \}$ は X の σ-加法族であることをしめせ。

(b) $\{ B \ ; \ B \subset Y$ かつ $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{A}_X \}$ は Y の σ-加法族であることをしめせ。

3° $A \subset X$, 1_A を A の定義関数とする。つまり

$1_A(x) = 1$ if $x \in A$, $1_A(x) = 0$ if $x \notin A$.

つぎをしめせ:

(a) $A_1, A_2, \cdots, A_n \subset X$, $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ならば

$$1_A = \prod_{i=1}^{n} 1_{A_i} = \min(1_{A_1}, 1_{A_2}, \cdots, 1_{A_n})$$

(b) $A_1, A_2, \cdots, A_n \subset X$, $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ならば

$$1_A = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - 1_{A_i}) = \max(1_{A_1}, 1_{A_2}, \cdots, 1_{A_n}).$$

べっさつ ふろく

4　x を数列 $x = (x_n ; n = 0, 1, 2, \ldots)$ とし、
$$\ell^\infty = \{x ;\ x_n \in \mathbb{R} \text{ かつ } \|x\|_\infty = \sup_n |x_n| < \infty\}$$
とおく。写像 $T : \ell^\infty \to \ell^\infty$ を、
$$\begin{cases} (Tx)_0 = x_0 \\ (Tx)_n = x_n - x_{n-1} \quad \text{for } n \geq 1 \end{cases}$$
によって定義する。

(1)　$e = (1, 1, \cdots, 1, \cdots)$ とおく。$Tx = e$ となる $x \in \ell^\infty$ は存在しないことをしめせ。

(2)　$F \equiv T\ell^\infty = \{Tx \in \ell^\infty ;\ x \in \ell^\infty\}$ とおく。
つぎのような線形写像 $f : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ が存在することを仮定する（Hahn-Banachの定理によって証明できる）：

- $x \in F$ に対し $f(x) = 0$
- $f(e) = 1$
- $\sup\{|f(x)| : \|x\|_\infty \leq 1\} < +\infty$

つぎをしめせ：

すべての n について $x_n \geq 0$ であるような $x = (x_n ; n = 0, 1, \ldots)$ に対し $f(x) \geq 0$ である。

(3)　写像 $S : \ell^\infty \to \ell^\infty$ を、$(Sx)_n = x_{n+1}$, $n = 0, 1, \cdots$ で定義する。$x \in \ell^\infty$ に対し $f(x) = f(Sx)$ であることをしめせ。

5 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とし，$f_0, f_1, f_2, \cdots$ を，X から $\mathbb{R}^d$ への可測関数で，次をみたすものとする：

にんいの $\varepsilon > 0$ に対し $\mu(\{|f_n - f_0| \geq \varepsilon\}) \to 0$ as $n \to \infty$.

つぎをしめせ：

(1) にんいの $\varepsilon > 0$ に対しコンパクト集合（有界閉集合）$K \subset \mathbb{R}^d$ が川あって

$$\begin{cases} \mu(\{x;\ f_0(x) \notin K\}) \leq \varepsilon \\ \mu(\{x;\ f_n(x) \notin K\}) \leq \varepsilon, \quad n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

(2) $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$，連続，に対して

$$\mu(\{x;\ |(g \circ f_n)(x) - g \circ f_0(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty$$

である

6 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする。I を $\mathbb{R}$ の開区間とする。関数 $F : I \to \mathbb{R}$ が増加関数とは，

$$x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$$

がなりたつことである。

$$\lim_{y \uparrow x} F(y) = F(x-0), \quad \lim_{y \downarrow x} F(y) = F(x+0)$$

とかくことにする。

$$D_F = \{x;\ F(x-0) \neq F(x+0)\}$$

とおく。

与えられた非負値測度 μ に対し，次の $(*)$ をみたす増加関数 F を μ の分布関数とよぶ。（1つの μ に対し分布関数は一意でない）

$(*)$ $[x, y] \subset I$ かつ $x, y \notin D_F$ なるにんいの $x, y \in I$ に対し

$$F(y) - F(x) = \mu([x, y]).$$

(6のつづき)

与えられた I に対し，分布関数 が 次 で与えられる ような 測度 μ を，以下の各場合に もとめよ。

(1) $I = \mathbb{R}$

(a) $F(x) = x$

(b) $F(x) = [x]$

(c) $F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x$

(2) $I = (-1, +1)$

(a) $F(x) = \tan \frac{\pi x}{2}$

(b) $F(x) = (\operatorname{sign} x)|x|^{\frac{1}{2}}$

(c) $F(x) = \frac{1}{\pi} \arcsin x$

(3) $I = (0, +\infty)$

(a) $F(x) = \log x$

(b) $F(x) = -\left[\frac{1}{x}\right]$

(c) $F(x) = (x-1)^+$

記法：
$$[a] = \sup\{n;\ n \in \mathbb{Z},\ n \leq a\}$$
$$a^+ = \sup\{0, a\}$$
$$\begin{aligned}\operatorname{sign} a &= +1 \quad \text{if } a > 0\\ &= 0 \quad \text{if } a = 0\\ &= -1 \quad \text{if } a < 0\end{aligned}$$

7　$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は，任意の $x, y\in\mathbb{R}$ に対し

$$f(x)+f(y)=f(x+y)$$

をみたし，かつ，1点 $a\in\mathbb{R}$ で連続であることがわかっている。このとき じつは

$$f(x)=f(1)x$$

であることをしめせ。

8°　$X=\mathbb{R}$ 上の非負可測関数 f に対して，各 n ごとに

$$A_{n,j}=\left\{x\in X\,;\,\frac{j-1}{2^n}\leqq f(x)\leqq\frac{j}{2^n}\right\},\quad j=1,2,\cdots,n2^n$$

$$B_n=\{x\in X\,;\,f(x)\geqq n\}$$

とおき，単関数

$$f_n(x)=\sum_{j=1}^{n2^n}1_{A_{n,j}}(x)\cdot\frac{j-1}{2^n}+n1_{B_n}(x)$$

をつくる。

(a)　$f(x)=x^2$ に対し，$f_2(x)$ を図示せよ。

(b)　$f(x)=|\sin x|$ に対し，$f_3(x)$ を図示せよ。

実解析　　　　　2の1

〈積分〉

0°　可測空間 $(X, \mathcal{A})$ 上の非負実数値可測関数 f に対して、単関数 f_n をべっさつ8°のようにしてつくると、

$$0 \leqq f_1 \leqq f_2 \leqq \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

である。

1°　以下見やすくするため単関数を φ でかく：$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i 1_{A_i}(x)$, $A_i \in \mathcal{A}$, $a_i \geqq 0$.

与えられた単関数 $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}(x)$ の積分を

$$\int_X \varphi(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

によって定義する。

2°　X 上の非負実数値可測関数 f に対して、非負単関数の増大列 $(\varphi_n ; n \in \mathbb{N})$ で $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ なるものが、0° によりとれる。f の積分を

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x)\mu(dx)$$

により定義する。左辺の値は増大列 (φ_n) のとり方によらないことがわかっている。

3°　X 上の実数値可測関数 f に対して、f^+, f^- を

$$f^+(x) = f(x) \vee 0, \quad f^-(x) = -(f(x) \wedge 0)$$

とおく。f^+, f^- は非負実数値可測関数で

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), \quad |f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

である。2° により $\int_X f^+(x)\mu(dx)$, $\int_X f^-(x)\mu(dx)$ が定義できるので、これを使って f の積分を

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \int_X f^+(x)\mu(dx) - \int_X f^-(x)\mu(dx)$$

と定義する。

$E \subset X$ 上の関数 f に対して、その積分を

$$\int_E f(x)\,\mu(dx) = \int_X 1_E(x) f(x)\,\mu(dx)$$

によって定義する。

$\int_X f^+(x)\,\mu(dx) + \int_X f^-(x)\,\mu(dx) < +\infty$ なるとき、

<f は X 上可積分 (integrable)> という。

1. 単関数 φ が 2 つの表現

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j}$$

($a_i, b_j \geqq 0$, $A_i, B_j \in \mathcal{A}$, (A_i), (B_j) は disjoint でなくてもよい)

をもてば、

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(B_j)$$

であることをしめせ。

2. 非負の単関数の列 $(\varphi_n; n \in \mathbb{N})$ と $(\psi_n; n \in \mathbb{N})$ が、

いずれも n について単調増大 かつ $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)$

ならば、

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x)\,\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n(x)\,\mu(dx)$$

であることをしめせ。

3. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ を測度空間、$(X', \mathcal{A}')$ を可測空間、

f を $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ 間の可測関数とする:

$f : X \to X'$.

$A' \in \mathcal{A}'$ に対して $\nu(A') = \mu(f^{-1}(A'))$

とおくと、ν は $(X', \mathcal{A}')$ 上の測度となることをしめせ。

2の2

<積測度>

。 2つの測度空間 $(X, \mathcal{A}_X, \mu)$, $(Y, \mathcal{A}_Y, \nu)$ をもってくる。
$Z = X \times Y$ とおく。 $A \in \mathcal{A}_X$, $B \in \mathcal{A}_Y$ に対し、
$A \times B \ (\subset Z)$ を可測な積集合という。可測な積集合の
有限個の和集合の全体を $\mathcal{A}_Z^0$ とかく。

Prop 1. $\mathcal{A}_Z^0$ は Z の有限加法族である。
$\mathcal{A}_Z^0$ から生成された σ-加法族を $\mathcal{A}_Z$ とかく。$\mathcal{A}_Z$ の元を
Z の可測集合という。$(Z, \mathcal{A}_Z)$ の上に測度を定義したい。

Thm 2. $(Z, \mathcal{A}_Z)$ の上に次のような測度 π が存在する：
(*) $A \in \mathcal{A}_X$, $B \in \mathcal{A}_Y$ に対し $\pi(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.
もし X, Y ともσ-有限ならば上のような π はただ1つきまる。

(注) σ-加法族 $\mathcal{A}_Z$ を $\mathcal{A}_X \times \mathcal{A}_Y$ と記すことがある。
測度 π を $\mu \times \nu$ と記すことがある。

。 $E \subset Z = X \times Y$ とし、$x \in X$, $y \in Y$ は変数を表す。
E の x-断面 (x-section) E_x, E の y-断面 (y-section) E^y を
次のように定める：

$$E_x = \{y \in Y \ ; \ (x, y) \in E\}, \quad E^y = \{x \in X \ ; \ (x, y) \in E\}$$

f を Z から $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ への関数とし、$x \in X$, $y \in Y$ は変数を表す。
f の x-断面 (x-section) f_x, f の y-断面 (y-section) f^y を
次のように定める：

$$f_x(y) = f(x, y), \ y \in Y \ ; \quad f^y(x) = f(x, y), \ x \in X.$$

Prop 3. (a) もし $E \in \mathcal{A}_Z$ ならば、E の各 x-断面、y-断面は
$E_x \in \mathcal{A}_Y$, $E^y \in \mathcal{A}_X$ をみたす。
(b) もし f が Z から $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ への可測関数ならば、
f_x は $\mathcal{A}_Y$-可測、f^y は $\mathcal{A}_X$-可測である。

さらに,

Thm 4. $(X, \mathcal{A}_X, \mu)$, $(Y, \mathcal{A}_Y, \nu)$ を σ-有限な測度空間たち とする。$E \in \mathcal{A}_Z$ に対し,

$$\varphi(x) = \nu(E_x), \qquad \psi(y) = \mu(E^y)$$

とおく。このとき, φ, ψ は各々 $\mathcal{A}_X$-可測, $\mathcal{A}_Y$-可測であり,

$$\int_X \varphi(x)\, d\mu(x) = \pi(E) = \int_Y \psi(y)\, d\nu(y).$$

1. $A \subset X$, $B \subset Y$ とする。次をしめせ:
   (a) もし($A = \phi$ または $B = \phi$)ならば $A \times B = \phi$.
   (b) もし $A \times B = \phi$ ならば ($A = \phi$ または $B = \phi$).

2. $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$ とする。次をしめせ:
   (a) $A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2$ ならば ($A_1 = A_2$ かつ $B_1 = B_2$)
   (b) $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$
   $= [(A_1 \setminus A_2) \times B_1] \cup [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cup B_2)] \cup [(A_2 \setminus A_1) \times B_2]$
   かつ 右辺の [ ] は互いに disjoint である。
   (c) $(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = [(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)] \cup [(A_1 \setminus A_2) \times B_1]$
   (d) $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

3. f, g は各々 X上, Y上の実数値関数で, f は $\mathcal{A}_X$-可測, g は $\mathcal{A}_Y$-可測とする。$Z = X \times Y$ 上の関数 h を

$$h(x, y) = f(x)\, g(y), \qquad (x, y) \in Z$$

で定める。h が $\mathcal{A}_X \times \mathcal{A}_Y$-可測であることをしめせ。

実解析　　その3

＜ Fubini の定理 ＞

1° $(X, \mathcal{A}_X, \mu)$, $(Y, \mathcal{A}_Y, \nu)$ を2つのσ-有限な測度空間とする。f を，$X \times Y$ 上の実数値関数で $\mathcal{A}_X \times \mathcal{A}_Y$ 可測なものとする。その2 でのべた積測度 $\pi = \mu \times \nu$ をつかって

重積分 $$\int_{X \times Y} f(x,y)\,(\mu \times \nu)(dx\,dy)$$

を定義できる。問題は

- この重積分を いつ 累次積分
$$\int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mu(dx) \right) \nu(dy)$$
に直せるか？
- いつ，積分の順序交換
$$\int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mu(dx) \right) \nu(dy) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\nu(dy) \right) \mu(dx)$$
がゆるされるか

である。

Th 1 (Fubini の定理 I)　f を非負 $\mathcal{A}_X \times \mathcal{A}_Y$ 可測関数とする。

(1) $y \in Y$ を固定すると $f(x,y)$ は x の関数として $\mathcal{A}_X$-可測である。

(2) $y \mapsto \int_X f(x,y)\,\mu(dx)$ は $\mathcal{A}_Y$-可測関数である。

(3) $$\int_{X \times Y} f(x,y)\,(\mu \times \nu)(dx\,dy) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,\mu(dx) \right) \nu(dy)$$

Th 2 (Fubiniの定理 II) 実数値関数fは$\mu\times\nu$可積分とする。

(1) a.e. $y\in Y$に対して

$$g(y)=\int_X f(x,y)\mu(dx)$$

は有限であり, $g(y)$は$\mathcal{A}_Y$-可測である。

(2) $g(y)$はν-可積分で,

$$\int_{X\times Y} f(x,y)(\mu\times\nu)(dx\,dy)=\int_Y\left(\int_X f(x,y)\mu(dx)\right)\nu(dy).$$

○ 無限直積測度

$(X_i,\mathcal{A}_i)$, $i=1,2,\cdots$を可測空間, $X=\prod_{i=1}^{\infty}X_i$とおく。
X上の有限加法族$\mathcal{A}$を次で定義する:

$$\mathcal{A}=\left\{A=E\times\prod_{i=n+1}^{\infty}X_i\ ;\ E\in\mathcal{A}_1\times\cdots\times\mathcal{A}_n,\ 1\leq n<\infty\right\}.$$

μ_iを$(X_i,\mathcal{A}_i)$上の$\mu_i(X_i)=1$をみたす測度とする。
$(X,\mathcal{A})$上の有限加法的測度mを次で定義する:

$A=E\times\prod_{i=n+1}^{\infty}X_i$, $E\in\mathcal{A}_1\times\cdots\times\mathcal{A}_n$, に対し

$$m(A)=(\mu_1\times\cdots\times\mu_n)(E).$$

さらに

○ mは$\mathcal{A}$上完全加法的である

ことを証明できる(証明は長くメンドウであるが)。

したがって, E. Hopfの拡張定理より, mは$\sigma(\mathcal{A})$上の測度に拡張できる。

$\sigma(\mathcal{A})$を$\prod_{i=1}^{\infty}\mathcal{A}_i$, mの拡張を$\prod_{i=1}^{\infty}\mu_i$とかき, 各々
無限直積σ-加法族, 無限直積測度
とよぶ。

3° f を $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 上の非負可測関数とする。

$$\int f\, d\mu = 0 \quad ならば \quad f(x) = 0 \quad \text{a.e. in } X$$

であることをしめせ。

4° $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ($\equiv \mathbb{N}$ の部分集合の全体),
μ を $\mathbb{N}$ 上の counting measure
i.e. $A \subset \mathbb{N}$ に対し

$$\mu(A) = \#\{i \,;\, i \in A\}.$$

とする。

$f : \mathbb{N} \to [0, +\infty)$ が与えられている。

この f は $(\mathbb{N}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ の可測関数であり,

$$\int f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

であることをしめせ。

実解析　2の4

<収束定理>

ルベーグ積分のべんりさは，極限操作の自由性にある。次の命題が基本的である。

命題1　$(f_n ; n \in \mathbb{N})$ を X 上の非負可測関数の増大列とする。このとき，$x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ は可測関数であり，

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\ \mu(dx).$$

これをつかって次が示せる。

命題2　f は X 上可積分とする。

(1)　$E_n \in \mathcal{A}$,　$E_n \cap E_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ とする。
$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ とおく。このとき，

$$\int_E f(x)\ \mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)\ \mu(dx)$$

(2)　$E_n \in \mathcal{A}$,　$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$ とする。

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)\ \mu(dx) = \int_E f(x)\ \mu(dx).$$

(証)　$f = f^+ - f^-$ とかく。$f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(0, -f)$
f が可積分だから，f^+, f^- とも可積分である。したがって
$f \geq 0$ と仮定してよい。$f_n = 1_{E_n} f$ として命題1を適用せよ。
—

定理3　(Fatou の補題)

$(f_n ; n \in \mathbb{N})$ を非負可測関数列とする。

$$\int_X \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\ \mu(dx) \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\ \mu(dx).$$

定理 4 （ルベーグの収束定理）

$(f_n ; n \in \mathbb{N})$ は X 上の可測関数列である。ある非負の可積分関数 g があって

$\forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x \in X} (|f_n(x)| \leqq g(x))$

となっていると仮定する。このとき

$$\int_X \lim_{n \to \infty} f_n(x) \mu(dx) = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x) \mu(dx)$$

系 （有界収束定理）

$\mu(X) < +\infty$ とする。ある $M > 0$ があって

$\forall_n (|f_n(x)| \leqq M)$ ならば、

$$\int_X \lim_{n \to \infty} f_n(x) \mu(dx) = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x) \mu(dx)$$

1° $t > 0$、$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x - tx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}$$

であることをしめせ。

hint. $t > 0$ に対し $\int_0^\infty e^{-tx^2} x^{2n} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} t^{-\frac{1}{2} - n}$

2° f は $\mathbb{R}^d$ 上可積分とする。$\xi \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle x, \xi \rangle} f(x) dx, \quad \langle x, \xi \rangle = x_1\xi_1 + \cdots + x_d\xi_d$$

とおく。$\xi \mapsto \hat{f}(\xi)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数であることをしめせ。