保険の仕組み

講師：愛媛大学理工学研究科　石川保志　 (ver. 2014)

20July2014

Table of comtents

序文

生命保険とは，加入者に万が一のことがあった場合に保険金が支払われるシステムである。生命保険会社が長期間にわたってこのシステムを健全に運営していくためには，確率論および金利に関する数理を基礎とする保険数理による論理的裏付けが不可欠である。

第 1 章では生保数理に必要とされる確率・統計分野の数学について述べる。第 2 章では生保数理の初歩を述べる。生保数理の中心概念となっているのが責任準備金である。保険会社は各保険契約に対して, どの程度であるかは不確定であるが，保険金を支払う義務がある。この支払い義務を全うするために準備すべき資金のことを責任準備金という。本稿では 2 章末にこの責任準備金を求める。

2012 年度から始まる高校数学の学習指導要領では, 数学 I において統計の初歩, 数学 A において場合の数と確率, 数学 B において確率分布の各分野が折り込まれ、従来より確率統計分野が大幅に充実した。保険数理はこの分野の数学が実際に応用され、社会に受け入れられている実例であり、理論上も応用上も重要度の高い数学分野となっている。

本稿は、主に愛媛大学理学部数学科における講義録および黒田 [1] をもとに、纏めたものでさる。

1 基礎概念

1.1 確率の基本

同じ状態で繰り返し行なうことができて、その結果が偶然に支配される実験や観察を**試行**という。試行の結果起こる事柄を**事象**という。事象を，$A, B, C, ...$ などで表す。事象 A に対し,「A が起こらない」という事象を A の**余事象**といい，A^c で表す。

また，試行においていくつかの事象のどれが起こることも同程度に期待できるとき，これらの事象は同等に確からしいという。

古典的な確率の定義（ラプラス）

試行において起こりうる場合の数が N 個あって，それらは同等に確からしいとする。起こりうる N 個の場合のうち，ある事象 E が起こる場合の数が r 個あるとき，E の起こる確率 $P(E)$ を $\frac{r}{N}$ で定義する。

例 1 *1* 枚の *10* 円玉を投げる試行において，表が出るという事象を A とする。古典的な確率の定義により

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

である。

例 2　１つのさいころを投げる試行において，３または５の目が出るという事象を A とする。古典的な確率の

定義により

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

である。

例 3 赤球 4 個，白球 2 個の入った箱から，2 球を同時に取り出し色を見る試行を行う。全体で $6 \times 5 = 30$ 通りの場合があり，それらは同等に確からしい。2 球とも赤であるという事象を A，赤球と白球 1 球づつであるという事象を B とする。

A の起こる場合は $4 \times 3 = 12$ 通り，B の起こる場合は $2 \times (4 \times 2) = 16$ 通りあるから，$P(A) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$。

なお，各球は色を除いて互いに区別がつかないとして

$$P(A) = \frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}, \quad P(B) = \frac{{}_4C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2}$$

としてもよい。ただし，ここで ${}_nC_k$ は n 個から k 個とりだす組合わせの数を表す。

このように，古典的な確率の定義では,「N 個の場合の確からしさの同等性」を根拠にして確率を決めている。

問 1 赤球 2 個，白球 1 個の入った箱から次のようにして 2 個の球を取り出すとき，赤球 2 個が取り出される確率を次の各々の場合に求めよ。

（1） 1 個取り出してもとに戻し，さらに 1 個取り出す。

（2） 1 個取り出して，もとに戻さずにまた 1 個取り出す。

（3）同時に 2 個の球を取り出す。

1.2 確率の基本 2

では,「同等に確からしい」とは何か。つまり，扱っている対象の何と何を同一視し，何と何を区別すればよいか。そして，いかにして「どれが起こることも同程度に期待できる」と考えうるのか。

問 2 次の確率計算は実験にあうか。

（１）明日の天気は，雨が降るか（A），降らないか（A^c）のどちらかである。よって，$P(A)=1/2$。

（２）水野は矢島を好きか（A），好きでないか（A^c）のどちらかである。よって，$P(A)=1/2$。

じつは，それは先験的には知りえない。「同等に確からしい」事象は，実験に合うように設定するものなのである。

例 4 N 個の箱に r 個の玉を入れる問題

＜仮定 I＞　１つの玉がどの箱に入るかは同等に確からしく、各々$1/N$ である。

次のように書いても同じ：

＜仮定 I'＞　いろいろな玉の入れ方は全部で N^r 通りあるから、これらの書く場合を同等に確からしいと仮定して、各々$1/N^r$ とする。

これは重複順列 ${}_N\Pi_r=N^r$ 個の場合をすべて同等とみなす立場。

この仮定は，箱を空間の小領域、玉を気体の分子と見たときに,「マックスウエル-ボルツマンの統計」とよばれる。しかし、この統計（確率の決め方）では実験にあわなかった（黒体輻射の実験を説明できない)。

＜仮定 II ＞　玉は区別がつかない。

区別がつくのは、どの箱に何個づつ玉が入っているか、という様相のみである。したがって、重複組み合わせ（異なる N 種類のものから重複を許して r 個とる組み合わせ）${}_NH_r = {}_{N+r-1}C_r$ 個の場合をすべて同等とみなす立場。言い換えると、

＜仮定 II' ＞　玉の盛り分け方は全部で ${}_NH_r$ 通りあり、それらをすべて同等とする。

問 3　例えば、$N = 3, r = 2$ ならば、${}_3H_2 = 6$。これら 6 通りをすべて書き出せ。

この仮定は,「ボーズ-アインシュタインの統計」とよばれる（光子 (ボーズ粒子）を取り扱うときに用いられる)。この場合実験に当う。

さらに、次の仮定を考える。

＜仮定 III ＞　1 つの箱に玉は 1 つしか入らない

とする。この場合には重複を許さない組み合わせ ${}_NC_r$ 通りの場合がある。言い換えると、

＜仮定 III' ＞　玉の盛り分け方は全部で ${}_NC_r$ 通りあり、それらをすべて同等とする。

この仮定は、電子や陽子（フェルミ粒子）を取り扱うときに用いられ,「フェルミ-ディラクの統計」とよばれる（この場合実験に当てはまる)。(物理では＜仮定 III ＞は,「パウリの排他原理」（異なる粒子は同時に同一状態を取ることはない）に対応する。)

問 4　$N = 4, r = 3$ とする。仮定 I – III のもとで同等に確からしい場合を、各々すべて書き出せ。

上の仮定 II, III を現実離れしたものと思ってはいけない。

ある種の色盲の人は赤と緑の区別がつかない。青，赤，緑の 3 種類のランプ（発光ダイオード）を暗闇で等頻度で発光させるとする。この色盲の人には，赤のランプと緑のランプは区別がつかず，事象 $A =$「青が発光する」，事象 $B =$「赤（=緑）が発光する」，の 2 つの事象に対して，$P(A \cup B) = 1, P(A) = 1/3, P(B) = 2/3$ と感じるであろう。

また，モンシロチョウは紫外線が見えるが，ヒトには紫外線が見えない。紫外線の発光によってある事象 A の発生が伝えられたとき，モンシロチョウには $P(A) > 0$ だとしても，ヒトには $P(A) = 0$ でなければ正しい確率と思われない（ヒトの目から見た実験に合わない）。

このように，何をもって「同等に確からしい」とするかは先見的には決まらない。確率は，光や熱のように物理量として実在するものではなく，我々の脳の中で「実験に合うように」設定されるものなのである。

A, B を事象とする。「A または B が起こる」という事象を A と B の**和事象**といい，$A \cup B$ とかく。また，「A と B がともに起こる」という事象を A と B の**積事象**といい，$A \cap B$ とかく。A が起こるとき必ず B が起こるならば，$A \subset B$ とかく。このとき，A は B の**部分事象**という。

ある事柄に該当する事象が存在しないとき，その事象を**空事象**といい $\emptyset$ で表す。空事象の余事象を**全事象**といい，Ω で表す。

このとき，次の性質が成り立つ。

（ア）

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

（イ）

$$P(\emptyset) = 0, \quad \text{よって} \quad P(\Omega) = 1$$

（ウ）

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

とくに，$A \cap B = \emptyset$ ならば $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$。

（エ）$A \subset B$ ならば $P(A) \leq P(B)$。

問 5 A, B を事象とする。$A = (B \cap A) \cup (B^c \cap A)$，$(B \cap A) \cap (B^c \cap A) = \emptyset$ であることに注意して，下の問いに答えよ。

（1）$P(A) = 0.3, P(B \cap A) = 0.2$ であるとき，$P(B^c \cap A)$ をもとめよ。

（2）$P(A) = 0.3, P(B \cap A) = 0.2, P(A^c \cap B) = 0.4$ であるとき，$P(A \cup B)$ をもとめよ。

問 6 $P(A) \geq \frac{1}{3}, P(B) \geq \frac{1}{4}, P(A \cup B) \leq \frac{1}{2}$ のとき，$P(A \cap B) \geq \frac{1}{12}$ を示せ。

なお，$A \cap B = \emptyset$ がなりたつとき，A と B は**排反**であるという。

例 5 ２つのさいころを同時に投げる試行において

$A =$「２つの目の数の和が５である」

という事象と

$B =$「2つの目の数がともに偶数である」

という事象は排反である。

例 6 n人のグループのうちでちょうどr人が誕生日を特定の日（例えば12月31日）にもつ確率は，反復事象の確率により

$$p_r = {}_nC_r(\frac{1}{365})^r(\frac{364}{365})^{n-r}$$

である。ただし，1年を365日とした。

問　題

1 ２つのさいころを同時に投げる試行をTとし，出た目の数の和をXとする。試行Tを10回反復して行ったとき，$X=7$となるのが９回である確率をもとめよ。

2 A さん, B さん, C さんの３人がじゃんけんをして勝者を１人選ぶ。３人あいこならばじゃんけんを繰り返し，２人勝ちならば勝った２人で決戦をするものとする。次の確率をもとめよ。

（１）A さんが１回目で優勝する確率
（２）A さんが２回目で優勝する確率
（３）A さんが３回目で優勝する確率
（４）３回目が終わっても勝者が決まらない確率

3 nを2以上の整数とする。中の見えない袋に$2n$個の玉が入っていて，そのうち3個が赤で残りが白とする。A さんと B さんが，A さんから始めて交互に1個ずつ玉を取り出し，先に赤の玉を取り出したほうが勝ちとする。ただし，取り出した玉は袋に戻さないとする。B さんが勝つ確率をもとめよ。

4 「幸福な家庭はみな同じように似ているが，不幸な家庭は不幸なさまもそれぞれ違うものだ」（「アンナ・カレーニナ」トルストイ）という命題について，確率論の観点から解説せよ。

2　条件つき確率

2.1　条件つき確率

　第１節で述べたように，確率 P は次の２つの性質を満たす。

(1)　$P(\emptyset)=0,\quad P(\Omega)=1,\quad 0\leq P(A)\leq 1$

(2) $A\cap B=\emptyset$ ならば,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

近代的な（大学以上での）確率の定義では，上の２つを満たす P を**確率**とよぶ。この場合，試行の結果起こりうる各々の場合は等確率と仮定しなくてもよいし[1]，確率の値は有理数でなくてもよい。（章末の [発展] を参照。）

　A,B を事象とする。A を前提として B の起こる確率のことを、条件 A のもとでの B の**条件つき確率**といい、$P_A(B)$ または $P(B|A)$ で表す。

条件つき確率の数学的定義

（１）$P(A)>0$ の場合

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

である。

（２）$P(A)=0$ の場合

$$P(B|A)=0$$

[1]実際，花びらを使った恋占いでは，試行の結果には「愛してる」と「愛してない」の２つの場合があり，花びらの数の奇数・偶数に「愛してる」と「愛してない」を対応させている。偶数と奇数は交互に並んでいるから，これはこれら２つの事象がほぼ同等に確からしいことを（暗黙のうちに）仮定していることになる。この仮定を常に用いるのは非現実的であろう。

である[2] 。

例 7 $A =$「ある夜月にカサがかかる」, $B =$「その翌日雨が降る」，とする。ただし，ここでカサとは月の周囲にできる光の輪のことである。

このとき，

$P(A \cap B) =$ 夜月にカサがかかり，かつ，翌日雨が降る確率

であるから，

$P(A \cap B) =$（夜月にカサがかかる確率）$\times$（前夜月にカサがかかったとき、翌日雨が降る確率）

$= P(A).P(B|A)$。

よって，$P(A) > 0$ のとき，$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ である。

3 つの事象 A, B, C について，上の定義で A の代りに $B \cap C$ をとり，B の代りに A をとれば，

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C)$$

であることがわかる。

例題 1 ある町には *2* つの宝くじ売り場があり，当たりくじの出る確率は各々 *0.3, 0.1* である。ある日，花子はこのうちどちらか一方の売り場を選んでそこで宝くじを買ったところ，はずれであった。それを聞いた太郎は，他方の売り場に宝くじを買いに行った。

花子がはずれたとき，太郎が宝くじに当たる条件つき確率を求めよ。また，花子がはずれたとき，太郎が花子と同一の売り場に宝くじを買いに行った場合，太郎が宝くじに当たる条件つき確率を求めよ。

[2] 0 の代わりに $[0,1]$ 内の他の値を採用する場合もある。

解 1 花子がはずれるという事象を A，太郎が当たるという事象を B とする。$P(A\cap B) = P(A)P(B|A)$ であり，$P(A) = (1/2)\times 0.7 + (1/2)\times 0.9 = 0.8$。はじめの場合，$P(A\cap B) = (1/2)\times 0.7\times 0.1 + (1/2)\times 0.9\times 0.3 = 0.17$。よって，$P(B|A) = \frac{0.17}{0.8} = \frac{17}{80}$。後の場合，$P(A\cap B) = (1/2)\times 0.7\times 0.3 + (1/2)\times 0.9\times 0.1 = 0.15$。よって，$P(B|A) = \frac{0.15}{0.8} = \frac{15}{80}$。つまり，前者のほうが太郎にとって有利な戦略である。

なお，花子の当たりはずれの情報がはいらない場合には，太郎が宝くじに当たる確率は上の 2 つの値の中間値 $\frac{16}{80} = \frac{1}{5}$ になる。なぜならば、

$$P(A\cap B) = \frac{1}{2}\times 0.17 + \frac{1}{2}\times 0.15 = \frac{1}{2}\times 0.32.$$

よって、

$$P(B|A) = \frac{1}{0.8}\times\frac{1}{2}\times 0.32 = \frac{16}{80} = \frac{1}{5} = \frac{1}{2}\times 0.3+\frac{1}{2}\times 0.1 = P(B).$$

例題 2 旅館「道後館」には３つの部屋があり，中に各々女性２人，男性２人，男女各１人が入っている。１つの部屋をノックしたところ，女性の声で「誰か来たわよ。あなた出てちょうだい」と聞こえた。男性が出てくる確率はいくらか。

解 2 男性２人の部屋を A，女性２人の部屋を B，男女各１人の部屋を C とする。さらに，3 人の女性をそれぞれ O_1, O_2, O_3 で表す。女性が返事をするという事象を F とし，C の部屋の女性が返事をするという事象を G とする。以下では，例えば，O_1 が B の部屋にいる状態を (B, O_1) とかく。このとき

$$F = \{(B, O_1), (B, O_2), (C, O_3)\}$$

$$G = \{(C, O_3)\}$$

どの部屋をノックし，部屋の中の２人のうちどちらが返事をするかは同等に確からしいから，$P(F) = 1/2$, $P(G) = 1/6$。これより求める条件つき確率 $P(G|F)$ は

$$P(G|F) = \frac{P(F \cap G)}{P(F)} = \frac{P(G)}{P(F)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

となる。

問 7 １枚の硬貨を３回投げ，表が出た回数を X とする。次にさいころを X 回投げる。そうして，１または２の目が出た回数を Y とする。ただし，$X = 0$ の場合には，$Y = 0$ ときめる。$Y = 0$ という条件のもとで，$X = 2$ である条件つき確率をもとめよ。

問 8 ある病気 B の患者３００人のうち２００人は喫煙者である。また全人口のうち喫煙者の割合は３０％である。喫煙者は非喫煙者に比べてどのくらい病気 B にかかりやすいか。

2.2 事象の独立の定義

２つの事象 A, B が

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

を満たすとき、A と B は**独立**であるという。

つまり，A と B は独立であるとは，$P(A) > 0$ のとき

$$P(B|A) = P(B)$$

が成り立つことである。

例題 3 *10*本のうち*3*本が当たるくじがある。A, B, Cの３人がこの順にこのくじを引くとき，それぞれの人が当たる確率をもとめよ。また,「Aが当たる」という事象と「Bが当たる」という事象は独立か。

解 3 当たる確率は３人とも $\frac{3}{10}$ である。なぜならば，A については明らか。Bの当たる確率は

$$\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{27}{90}=\frac{3}{10}$$

同様に考えて，Cの当たる確率は

$$\{3\times2\times1+3\times7\times2+7\times3\times2+7\times6\times3\}\times\frac{1}{10\times9\times8}=\frac{216}{720}=\frac{3}{10}$$

また

$$P(「A\text{が当たる}」\cap「B\text{が当たる}」)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$$

$$P(「A\text{が当たる}」)\times P(「B\text{が当たる}」)=\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$$

であるから，２つの事象は独立でない。

事象の独立性は事象間の意味的なつながりによって定義されるのではなく，確率Pによって定義されることに注意せよ。複雑な事象を考える場合，事象間の意味的なつながりにより独立性を判断するのは困難な場合が多い(下の例題参照)。

例題 4 ある家族がn人の子を持つ場合，子供には男女それぞれの場合がある。例えば，$n=2$ならば，子供の可能性には{(男,女),(女,男),(男,男),(女,女)}の*4*通りあり，それらは同等に確からしいと考えられる。nを固定し，Aを「n人の子供は男女両児からなる」という事象，Bを「n人の子供はたかだか一人の女児しか含まない」という事象とする。AとBは独立か。

解 4 （1）$n=2$ の場合。起こりうる場合は上の 4 つであるから，$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{3}{4}, P(A\cap B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$。よって，$A$ と B は独立でない。

（2）$n=3$ の場合。起こりうる場合は

$$\{(男,女,男),(男,女,女),(女,男,男),(女,男,女),(男,男,男),$$
$$(男,男,女),(女,女,男),(女,女,女)\}$$

の 8 通り。したがって，$P(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}, P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}, P(A\cap B)=\frac{3}{8}$。よって，$A$ と B は独立である。

問 9 （独立性を直感で判断してはいけない。）

区別のできる 2 つのさいころを同時に投げる試行を行う。

はじめのさいころの目が４であると言う事象を A、
2 つめのさいころの目が２であると言う事象を B、
2 つのさいころの目の和が３であると言う事象を C、
2 つのさいころの目の和が９であると言う事象を D、
2 つのさいころの目の和が７であると言う事象を E とおく。

（1）A と B は独立か。
（2）A と C は独立か。
（3）A と D は独立か。
（4）A と E は独立か。

問　題

１ある事件で，本当のことを言う確率が80％である証人 X_1, X_2, X_3 がいる。いま３人とも「Yが犯人だ」と証

言した。本当にＹが犯人である確率はいくらか。ただし，Ｙは上の３人とは別人である。

２鳥インフルエンザ検査の正確さが98% だとする。つまり、鳥インフルエンザにかかっている鶏がこの検査を受けた場合に陽性と出る確率が98% であり、鳥インフルエンザにかかっていない鶏がこの検査を受けた場合98% の確率で陰性と出る。さらに、実際に鳥インフルエンザにかかっている鶏の割合は0.5% だとする。

ある鶏がこの検査を受けたところ、結果は陽性であった。この鶏が鳥インフルエンザにかかっている確率はいくらか。

３ある製品を製造する工場A, Ｂがあり，Ａ工場の製品には５％，Ｂ工場の製品には３％の不良品が含まれている。Ａ工場の製品とＢ工場の製品を2：3の比で混ぜた中から１個を取り出すとき

（１）それが不良品である確率を求めよ。

（２）不良品であったとき，それがＡ工場の製品である確率を求めよ。

４各問が3つの選択肢からなる小問が10問ある。この選択肢のうち1つが正解で他の2つは不正解である。受験者は理解している問いには正しい選択肢を選び，理解していないものについてはでたらめに（すなわち各選択肢を等確率で）選んで解答する。

ある受験者がちょうど7問正解したとき,「この受験者はどの問にもでたらめに回答した」という判断が正しい確率を次のようにしてもとめよう。

（１）Aを「受験者がちょうど7問正解した」という

事象とし，$B_i, i = 0, ..., 10$ を「この受験者がちょうど i 問正解を知っていた」という事象とする。$P(A|B_i)$ をもとめよ。ただし，$P(A|B_8) = P(A|B_9) = P(A|B_{10}) = 0$ とする。

（2）$P(B_0) = \cdots = P(B_7)$ という仮定のもとで，問題の確率を

$$P(B_0|A) = \frac{P(B_0 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_0).P(A|B_0)}{\sum_{i=0}^{7} P(B_i).P(A|B_i)}$$

により計算せよ。

3　平均と分散

3.1　確率分布

試行の結果によってその値が定まる変数を**確率変数**という。確率変数 X のとる値が $x_1, x_2, ...$ であるとき、$X = x_i$ となる確率 $P(X = x_i)$ を p_i と表わす。

確率変数 X がとびとびの値のみをとるとき、X は**離散確率変数**とよび、その分布を**離散確率分布**という。

確率変数 X が特定の値を正の確率でとることがないとき，すなわち，X の値が区間全体に亘り、すべての $x \in \mathbf{R}$ について $P(X = x) = 0$ となるとき、、X は**連続確率変数**とよび、その分布を**連続確率分布**という。

期待値、分散の定義

(1) 離散分布の場合

確率変数 X のとる値が $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ であるとき、

$$m = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i),$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 P(X = x_i)$$

を、各々Xの**分布の平均、分散**という。誤解が生じないときには，たんにXの**平均，分散**という。mを$E[X]$、vを$V(X)$と書くこともある。また，平均のことを**期待値**ともいう。Xのとる値x_iとその確率p_iの組$((x_i, p_i); i = 1, ..., n)$を**確率分布**という。

（2）連続分布の場合

この場合、$\rho(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1$を満たす関数$\rho(x)$が存在して[3],

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \rho(x)dx$$

と表される。 $\rho(x)$を**(確率) 密度関数**という。

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx,$$

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \rho(x)dx$$

を，各々Xの**(分布の) 平均，分散**という。mを$E[X]$，vを$V(X)$と書くこともある。また，平均のことを**期待値**ともいう。密度関数$\rho(x)$とXのとる値の範囲(たとえば(a, b))の組$(\rho(x); x \in (a, b))$を**確率分布**という。

なお，離散分布と連続分布が組み合わさった分布を**混合分布**という。

平均はXのとる値の代表値である。また，分散はXの値の平均からのずれの期待値であり，Xの分布のばらつ

[3]実数全体で定義された関数$f(x)$に対して$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$は$f(x)$の広義積分を表す。

きを表す。なお，離散分布，連続分布いずれの場合でも，

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

を，X の（分布の）**標準偏差**という。また

$$F(x) = P(X \leq x),\ x \in \mathbf{R}$$

を X の**分布関数**という。

例題 5 さいころを２回投げて，出る目の数の和を X とする。X の分布の分散 $V(X)$ を求めよ。

解 5 X のとりうる値は，*2, 3, ..., 12* である。起こりうる *36* 通りのうち，X の値が，n になる場合は
$n-1$ 通り, （$n = 2, 3, ..., 6$ のとき）
$13-n$ 通り, （$n = 7, ..., 12$ のとき）
あるから,

$$E[X] = \sum_{n=2}^{6} n\frac{n-1}{36} + \sum_{n=7}^{12} n\frac{13-n}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

よって,

$$V(X) = \sum_{n=2}^{6} (n-7)^2\frac{n-1}{36} + \sum_{n=7}^{12} (n-7)^2\frac{13-n}{36} = \frac{35}{6}$$

例題 6 さいころを１回または２回投げ，最後に出た目の数を得点とするゲームを考える。１回投げて出た目を見た上で，２回目を投げるか否かを決めるのであるが，どのように決めるのが有利であるか。

また，３回投げることも許されるとしたら，２回目，３回目を投げるか否かの決定はどのようにするのが有利か。

解 6 有利であるかどうかは得点の期待値を計算して比較することにより判断する。

まず，最大２回まで投げることができる場合。２回目に出る目の数の期待値は$\frac{7}{2} = 3.5$であるから，１回目に出た目の数が３以下ならば２回目を投げるほうが有利であり，そうでなければ２回目を投げないほうが有利である。

次に，最大３回まで投げることができる場合。最大２回投げて，２回目まで投げるルールを上のようにして行動すると，その場合の得点の期待値は

$$\frac{3}{6} \times 3.5 + \frac{1}{6}(4+5+6) = 4.25$$

である。よって，もし１回目の目の数が４以下ならば，２回目以降を続行するほうが有利である。もし１回目の目の数が５以上ならば，２回目を投げないほうが有利である。

１回目の目の数が４以下の場合，上と同様に考えて，もし２回目の目の数が３以下なら３回目を投げ，そうでなければ３回目を投げないほうが有利である。

例題 7 ２つの特製さいころがあり，*1*つ目のさいころの各面には *1, 3, 4, 5, 6, 8* という目が書かれており，*2*つ目のさいころの各面には *1, 2, 2, 3, 3, 4* という目が書かれている。この２つの特製さいころを同時に投げて出る目の数の和をYとする。Yの分布の分散$V(Y)$を求めよ。ただし，これら特製さいころの各面の出方は同等に確からしいとする。

解 7 Yのとりうる値は，*2, 3, ..., 12* である。起こりうる *36* 通りのうち，Yの値がnになる場合は，
$n-1$通り，($n = 2, 3, ..., 6$のとき）

$13-n$ 通り, ($n=7,...,12$ のとき)
ある。したがって，Y の分布は X の分布と同じであり,

$$E[Y]=\frac{252}{36}=7,$$

$$V(Y)=\frac{35}{6}$$

問 10 例題５，例題７における起こりうる場合を，各々すべて書き出せ。

例 8 x 歳で加入，n 年契約，死亡保険金 C 円の生命保険（掛け捨て）を考える。被保険者の余命を X で表し，この契約についての会社側の支払い金額の現在価値を Z とする。

年利率を i で表す。つまり，A 円を *1* 年間預けると $(1+i)A$ 円になる。$v=\frac{1}{1+i}$ を現価率という。A 円を j 年間預けると $(1+i)^jA$ 円になる。

$Z=Cv^j,\ (j-1\leq X<j),\ j=1,...,n$ である。この保険の保険料を B 円とすると，$B=Z$ の期待値，であるから

$$B=E[Z]=C\sum_{j=1}^{n}v^jP(j-1\leq X<j)$$

となる。したがって，X の分布がわかれば B を求めることができる。

例 9 確率変数 X のとる値 x の範囲が $0\leq x\leq 2$ で，その密度関数 $\rho(x)$ が

$$\rho(x)=\frac{1}{2}\quad(0\leq x\leq 2)$$

で与えられるとき,

$$P(0 \leq X \leq 2) = 1, \quad P(0 \leq X \leq \frac{3}{2}) = \int_0^{3/2} \frac{1}{2} dx = \frac{3}{4}$$

$$E[X] = \int_0^2 x\frac{1}{2}dx = 1, \quad V(X) = \int_0^2 (x-1)^2 \frac{1}{2} dx = 1/3$$

問 11 確率変数 X のとる値 x の範囲が $1 \leq x \leq 3$ で，その密度関数 $\rho(x)$ が

$$\rho(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x - \frac{9}{4} \quad (1 \leq x \leq 3)$$

で与えられるとき，X の平均と分散をもとめよ。

X, Y を確率変数とする。X, Y の分布が離散であっても連続であっても次の性質が成り立つ。

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

$$E[cX] = cE[X], \quad c \text{ は定数}$$

これらより，定数 a, b に対して，$E[aX+bY] = aE[X]+bE[Y]$, $E[aX+b] = aE[X]+b$ であることがわかる。また

$$V(aX+b) = a^2V(X), \quad a, b \text{ は定数}$$

がなりたつ。

X, Y を離散分布をもつ確率変数とする。X のとる任意の値 a と Y のとる任意の値 b について

$$P(X=a, Y=b) = P(X=a)P(Y=b)$$

が成り立つとき，X **と** Y **は（互いに）独立**であるという。
X, Y を連続分布をもつ確率変数とする。X のとる任意の値 $a_1 < b_1$ と Y のとる任意の値 $a_2 < b_2$ について

$$P(a_1 < X < b_1, a_2 < Y < b_2) = P(a_1 < X < b_1)P(a_2 < Y < b_2)$$

が成り立つとき，X **と** Y **は（互いに）独立**であるという。

X と Y が（互いに）独立であるとき次の性質が成り立つ。

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

例 10 例題７において，１つ目のさいころの目の数を Y_1，２つ目のさいころの目の数を Y_2 とすると，Y_1 と Y_2 は独立であり，$Y = Y_1 + Y_2$。また，

$$E[Y_1] = \frac{27}{6} = \frac{9}{2},$$

$$V(Y_1) = ((1-9/2)^2+(3-9/2)^2+(4-9/2)^2+(5-9/2)^2+(6-9/2)^2+(8-9/2)^2)\times\frac{1}{6} =$$

$$E[Y_2] = \frac{15}{6} = \frac{5}{2},$$

$$V(Y_2) = ((1-5/2)^2+(2-5/2)^2+(2-5/2)^2+(3-5/2)^2+(3-5/2)^2+(4-5/2)^2)\times\frac{1}{6} =$$

であるから，

$$E[Y_1] + E[Y_2] = E[Y], \quad V(Y_1) + V(Y_2) = V(Y)$$

が成り立っている。

問　題

1 原点Ｏを出発して，数直線上を動く点Ｐがある。さいころを投げて，５か６の目が出ればＰは＋１だけ移動し，それ以外の目が出ればＰは－１だけ移動する。この試行を10回繰り返した後の，点Ｐの座標を X とする。

（１）X の期待値（平均）と分散を計算せよ。

（２）X^2 の期待値（平均）を計算せよ。

2 10枚のカードがあり、その各々に0，2，6のいずれかの数を記入する。これら10枚のカードから１枚を選び，そのカードに記された数を X とするとき，その平均が3で分散が6以下になるようにしたい。数0，2，6の記されたカードの枚数をそれぞれいくらにすればよいか。

3 X は連続分布に従う確率変数で，その密度関数が

$$\rho(x) = C\frac{1}{(1+|x-1|)^5}$$

で与えられるとする。ただし，C は正定数である。

（１）定数 C を計算せよ。

（２）X の期待値と分散を計算せよ。

（３）$|X| \leq 1$ となる確率を計算せよ。

4 集団の中から無作為に13人を選ぶとき，日曜日生まれの人の数を X，土曜日生まれの人の数を Y とする。ただし，どの曜日に生まれる確率も $\frac{1}{7}$ とする。

（１）$X = k, Y = m$ となる確率 $P(X = k, Y = m)$ を k, m の式として表せ。ただし，$k \geq 0, m \geq 0, k+m \leq 13$ とする。

（２）$P(X = k), P(Y = m)$ をもとめよ。X, Y は独立か。

5 X は離散型または連続型確率分布にしたがう確率変数とし，X の平均 $E[X]$，分散 $V(X)$ ともに有限とする。次をしめせ。

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

発展　確率の公理的構成 2節はじめに触れた，近代的な確率の定義と性質を述べる。

近代的な確率の定義（コルモゴロフ）

事象の集合の上で定義され，実数値をとる関数 $P(A)$ で次の２つの条件を満たすものを**確率**という。

(1) 任意の事象 A について $0 \leq P(A) \leq 1$ かつ $P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = 1$

(2) $A \cap B = \emptyset$ ならば,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

近代的な確率は事象の "面積" のようなものである。各事象は無限集合でもよいし，事象の確率は等確率とは限らず,（有理数でも無理数でも）$[0, 1]$ 中の様々な値を取り得る。

上の（１）,（２）から次の性質を導くことができる。

（ア）

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

（イ）

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

（ウ）$A \subset B$ ならば，$P(A) \leq P(B)$，かつ，$P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$。

（エ）A, B, C のどの２つをとっても共通部分が空事象ならば

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$A_1, A_2, ..., A_n$ のどの２つをとっても共通部分が空事象ならば

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup C) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

（オ）全事象 Ω がいくつかの部分事象 $A_1, ..., A_n$ の互いに重なり合わない和事象となっているとき

$$P(B) = P(B \cap A_1) + ... + P(B \cap A_n)$$

この定義による確率においても，条件つき確率の定義，事象の独立の定義は，本文で述べたものが用いられる。逆に，これらの性質は本文で述べた古典的な確率についても成立する。

問 12 次をしめせ。

（１）$A_1, ..., A_n$ を事象とするとき

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

（２）A, B, C を事象とするとき

$$P(A \cap B \cap C) \geq 1 - P(A^c) - P(B^c) - P(C^c)$$

さらに，独立性の定義と $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$ を使うと，次の４つの性質は同値であることがわかる。

（１）A と B は独立である

（２）A と B^c は独立である

（３）A^c と B は独立である

（４）A^c と B^c は独立である

問 13 上の４つが同値であることを証明せよ。

章 末 問 題

[A]

問題1　n を2以上の整数とする。1つのさいころを n 回続けて投げ，同じ目が初めて2回続けて出るまで投げた回数を X とする。ただし，n 回までに続けて同じ目が出なかったときには，$X = n+1$ とする。X の期待値（平均）を求めよ。

問題2　1枚の硬貨を投げて，表が出ればAさんに1点を与え，裏が出ればBさんに1点を与える。硬貨を n 回投げるとき，Aさんの総得点を X，Bさんの総得点を Y とする。2人とも持ち点0から始めるとして

（1）X の確率分布と期待値を求めよ。

（2）$X-Y$ の確率分布と期待値を求めよ。

（3）n 回投げて $X=i$ であったとき，1回目に表が出ていた条件つき確率を，$i=1,2,...,n$ についてもとめよ。

問題3　1枚の硬貨を6回投げ，各回ごとに表が出たら次の規則にしたがって点を与え，裏が出たらその回は0点として，6回の合計点を X とする。

1回目 $\cdots$ 3点

2, 3回目 $\cdots$ 2点

4, 5, 6回目 $\cdots$ 1点

（1）X の期待値（平均）と分散を求めよ。

（2）$P(X=k)$ を $k=2,3,7,8$ について求めよ。

[B]

問題4　3つの箱A，B，Cがあり，箱Aには4個の赤球と2個の白球が入っている。箱Bには1から8までの数字を1つづつ書いた札が計8枚入れてあり，箱Cには4から11までの数字を1つづつ書いた札が計8枚入れてある。

まず箱Aから球を1個取り出して，もしそれが赤球ならば箱Bから札を1枚取り出し，もしそれが白球ならば箱Cから札を1枚取り出す。このようにして取り出される札の数を X とする。

（1）$3 \leq X \leq 5$ となる確率をもとめよ。

（2）X の期待値（平均）と分散をもとめよ。

問題5　つぼAには数字 $2, 4, 6, 8$ がひとつずつ書かれた札が計4枚，つぼBには数字 $1, 3, 5, 7$ がひとつずつ書かれた札が計4枚入っている。まず，つぼAから無作為に1枚取り出しその札に書かれた数を X とする。

もし $X = 8$ ならば，つぼBから無作為に1枚取り出しその札に書かれた数を Y とする。

もし $X \neq 8$ ならば，つぼAの残りの3枚から無作為に1枚取り出しその札に書かれた数を Y とする。

$Z = X + Y$ とする。

（1） $E[X]$ および $V(X)$ をもとめよ。

（2）$E[Y]$ および $V(Y)$ をもとめよ。

（3）X と Y は独立か。

（4）$E[Z]$ および $V(Z)$ をもとめよ。

4　いろいろな分布

離散分布，連続分布各々について，代表的な分布の性質を調べる。

4.1　離散分布

$X_1, X_2, ..., X_n$ を n 個の確率変数とし，それらは同一の確率分布にしたがうとする。

(1) **一様分布**　X のとる値は$\{1,2,...,n\}$であり，$P(X=k)=\frac{1}{n}, k=1,...,n$であるとき，$X$ は（離散型の）一様分布にしたがうという。

このとき

$$E[X]=\sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2}$$

$$E[X^2]=\sum_{k=1}^{n} k^2\frac{1}{n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

よって

$$V(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\frac{n^2-1}{12}$$

である。

(2)　**二項分布**　　X のとる値は $\{0,1,2,...,n\}$ であり，$P(X=k)={}_nC_kp^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,...,n$であるとき，$X$ は二項分布にしたがうという。ただし，$0\le p\le 1$である。このとき

$$E[X]=np, V(X)=np(1-p)$$

である。

証明

以下で$q=1-p$とおく。

$$E[X]=\sum_{k=0}^{n} k_nC_kp^kq^{n-k}=\sum_{k=1}^{n} k_nC_kp^kq^{n-k}$$

ここで，$k_nC_k=n_{n-1}C_{k-1}$ であるから，

$$E[X]=\sum_{k=1}^{n} n_{n-1}C_{k-1}p^kq^{n-k}=n\sum_{l=0}^{n-1} {}_{n-1}C_l\ p^{l+1}q^{n-l-1}$$

$$= np \sum_{l=0}^{n-1} {}_{n-1}C_l \, p^l q^{(n-1)-l} = np(p+q)^{n-1} = np$$

同様に計算すると

$$E[X(X-1)] = n(n-1)p^2$$

であることがわかるので,

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np(1-p) = npq$$

であることがわかる。

例題 8 1枚の硬貨を5回投げるとき，表の出る回数から裏の出る回数を引いた数 X の期待値および分散をもとめよ。

解 8 表の出る回数を Y とすると，Y は二項分布に従うから

$$E[Y] = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2},\ V(Y) = 5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$X = Y - (5 - Y) = 2Y - 5$ であるから

$$E[X] = 2E[Y] - 5 = 2 \times \frac{5}{2} - 5 = 0$$

$$V(X) = 4V(Y) = 2^2 \times \frac{5}{4} = 5$$

である。

問 14 ○，×で答える6つの問題が与えられている。この解答をするのに考えないででたらめに○，×をつけるとき，そのうちの正解数を X とする。X の期待値，分散および標準偏差をもとめよ。

問 15 日本人の血液型は，*10*人に３人の割合で O型である。*5*人の日本人を任意に選んだとき，そのうちの O型の人数を X とする。X の期待値，標準偏差をもとめよ。

(3) **幾何分布**　１枚の硬貨を投げつづけ，初めて表の出るまでの投げる回数の確率分布を考える。

X のとる値は $\{1, 2, ...\}$ であり，$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, ...$ であるとき，X はパラメータ p の幾何分布にしたがうという。ただし，$p > 0$ である。上の例では $p = \frac{1}{2}$ の場合に当たる。実際，事象 $X = k$ は $A \cap B$ に等しい。ここで

$$A = はじめの\,(k-1)\,回裏が出る$$

$$B = k\,回目に表が出る$$

である。A, B は独立であり、よって $P(X = k) = P(A \cap B) = (1-p)^{k-1}p$ となる。

このとき

$$E[X] = \frac{1}{p}, V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

である。

証明　$q = 1 - p$ とおく。

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = p\sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1}$$

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ であるから，$\sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ 。したがって

$$E[X] = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

一方

$$E[(X(X-1)] = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)pq^{k-1}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ の両辺を微分して

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

よって，$E[(X(X-1)] = pq\frac{2}{(1-q)^3} = 2\frac{q}{p^2}$。これより

$$V(X) = E[(X(X-1)]+E[X]-(E[X])^2 = 2\frac{q}{p^2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

となる。

(4) **ポアソン分布**

X のとる値は $\{0, 1, 2, ...\}$ であり，$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, ...$ であるとき，X はパラメータ λ のポアソン分布にしたがうという。ただし，$\lambda > 0$ である。

このとき

$$E[X] = \lambda, V(X) = \lambda$$

である。

証明

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

一方，

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda^2$$

したがって，

$$V(X) = E[X^2]-(E[X])^2 = E[X(X-1)]+E[X]-(E[X])^2$$
$$= \lambda^2+\lambda-\lambda^2 = \lambda$$

となる。

例 11 次のような変数はポアソン分布に従うことが知られている。

（1）単位時間にガソリンスタンドにくる自動車の数。
（2）単位時間に交換機が受ける電話の呼び出し数。
（3）一連の製造ラインで発生する不良品の個数。
（4）ある地域の火災件数。
（5）小さなスーパーマーケットのレジでの待ち人数。

このように，小さな確率で非恒常的に起こる現象の記述にはポアソン分布が適している。

例題 9 $\frac{1}{100}$ の確率であたるくじを *100* 回試したとき，実際 r 回当たる確率をもとめよ。

解 9 *100* 回のくじ引きをして当たる回数の平均は

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{100} = 1$$

そこで *100* 回のくじ引きを *1* 単位としてそこで平均 *1* 回当たると考える。実際 r 回当たる確率は

$$P_1(r) = \frac{1}{r!} 1^r e^{-1} = \frac{e^{-1}}{r!}$$

したがって

$$P_1(0) = 0.368,\ P_1(1) = 0.368,\ P_1(2) = 0.184,\ P_1(3) = 0.061, ...$$

である。

*100*回のくじ引きをして平均１回当たるといっても「１回も当たらない」確率が約 *37%* あることに注目すべきである。つまり，祭礼の餅播きなどで，参加者の約３倍の餅を用意しなければ，餅がほぼ確実に全員に行き渡るようにはならない。

なお，X_1, X_2 が独立で，X_1 がパラメータ λ_1 のポアソン分布にしたがい，X_2 がパラメータ λ_2 のポアソン分布にしたがうとき，$Y = X_1 + X_2$ はパラメータ $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ のポアソン分布にしたがう。

証明省略。

例題 10 正岡救急病院は道後町，秋山町を管轄区域とし４台のベッドがある。道後町，秋山町から搬送される救急患者数は，それぞれ $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ のポアソン分布にしたがっている。病院収容患者数が４人を超える確率をもとめよ。

解 10 $Y = X_1 + X_2$ とおく。道後町と秋山町は別の町内なので、X_1 と X_2 は独立。よって Y はパラメータ $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ のポアソン分布にしたがうと考えられる。これより

$$P(Y = k) = \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

したがってもとめる確率は

$$P(Y > 4) = 1 - \sum_{k=0}^{4} P(Y = k)$$

$$= 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{6}\lambda^3 + \frac{1}{24}\lambda^4)$$

となる。$\lambda = 3$ として、$\sim 1 - 0.815 = 0.185$。これは無視できない確率である。

問 16 ある家に *1* 日にかかってくる電話の回数はポアソン分布に従い，その平均は 8（回）である。この家に電話が *1* 日に *10* 回以上かかってくる確率と，*1* 日に高々 4 回しかかかってこない確率をもとめよ。

4.2 連続分布

(1) **一様分布** 確率密度関数 $\rho(x)$ がつぎで与えられる確率分布を一様分布という。$\rho(x) = \frac{1}{b-a}$ $(a \leq x \leq b)$ この分布では区間 $[a, b]$ 上の長さの等しい（互いに重ならない）小区間に値をとる事象は，どれも同等に "確からしい" とみなされる。

問 17 確率密度関数 $\rho(x)$ がつぎで与えられる確率分布にしたがう確率変数の期待値（平均），分散，標準偏差をもとめよ。

（1）$\rho(x) = \frac{1}{\beta-\alpha}$ $(\alpha \leq x \leq \beta)$

（2）$\rho(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)$ $(-1 \leq x \leq 1)$

(2) **指数分布** 確率密度関数 $\rho(x)$ がつぎで与えられる確率分布を指数分布という。$\rho(x) = 0$ $(x < 0)$, $= \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$ ただし，$\lambda > 0$ である。

X がこの分布にしたがうとき，$E[X] = \frac{1}{\lambda}$, $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ である。

問 18 ある電話局管内の電話の通話時間（分）は確率変数 X で表され，その確率密度関数 $\rho(x)$ は

$$\rho(x) = Ce^{-\frac{x}{3}} \ (0 \leq x < 180), \ = 0 \ (x \geq 180)$$

である。一方，通話料は $3(n-1) \leq x < 3n$ （n は自然数）の通話時間に対して $10n$ 円である。

（１）定数 C の値をもとめよ。

（２）*1* 回の通話時間の平均をもとめよ。

（３）*1* 回の通話料の平均をもとめよ。

(3) **正規分布**

ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

証明　2 重積分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2+s^2)} ds dt = \pi$$

をしめせばよい。詳細は省略。

$m \in \mathbf{R}, \sigma > 0$ に対し

$$\rho_{m,\sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$

を確率密度関数とする連続分布を，**パラメータ** m, σ^2 **の正規分布**といい，その分布を $N(m, \sigma^2)$ で表す。確率変数 X の分布がパラメータ m, σ^2 の正規分布のとき，X はパラメータ m, σ^2 の正規分布にしたがうといい，$X \sim N(m, \sigma^2)$ とかく。

ここで $y = \rho_{m,\sigma}(x)$ のグラフは，$x = m$ について対称であり，($\rho_{m,\sigma}(m-x) = \rho_{m,\sigma}(m+x)$)，$x < m$ で増加，$x > m$ で減少であり，さらに $x = m-\sigma, m+\sigma$ を変曲点にもつ。また $u = \frac{t-m}{\sqrt{2}\sigma}$ と変数変換すると

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{m,\sigma}(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sqrt{2}\sigma du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = 1$$

である。

　このとき

$$E[X] = m, V(X) = \sigma^2$$

である。

　証明

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t\rho_{m,\sigma}(t)dt$$

$u = \frac{t-m}{\sqrt{2}\sigma}$ と変数変換すると

$$R.H.S. = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m + u\sigma\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-u^2}\sqrt{2}\sigma du$$

$$= m\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du + \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} ue^{-u^2}du = m$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(t-m)^2\rho_{m,\sigma}(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sigma^2u^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-u^2}\sigma\sqrt{2}du = \sigma^2\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2e^{-u^2}du$$

$$= \sigma^2\frac{2}{\sqrt{\pi}}([-\frac{1}{2}ue^{-u^2}]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du) = \sigma^2\frac{2}{\sqrt{\pi}}(0 + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}) = \sigma^2$$

　とくに $m = 0, \sigma = 1$ のとき，この分布を**標準正規分布**という。つまり，$X \sim N(0,1)$ のとき，

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

である。標準正規分布には $\int_x^\infty \rho_{0,1}(t)dt$ の表があり，利用することができる。標準正規分布の分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ について，$F(-x) = 1 - F(x)$ である。標準正規分布の分布関数を $\Phi(x)$ で表すことが多い。

さらに，上の証明からわかるように，X がパラメータ m, σ^2 の正規分布にしたがうとき，変数変換 $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ をおこなえば Y は標準正規分布にしたがう。標準正規分布には表があるので，これを使って X の確率をもとめることができる。

例 12 $X \sim N(m, \sigma^2)$ のとき，表と変数変換より

$$P(m - \sigma \leq X \leq m + \sigma) \sim 0.683$$

$$P(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma) \sim 0.954$$

$$P(m - 3\sigma \leq X \leq m + 3\sigma) \sim 0.997$$

例題 11 $X \sim N(4, 3^2)$ であるとき，$P(3 < X < 6)$ および $P(X > 10)$ をもとめよ。

解 11 $Y = \frac{X-4}{3}$ とおくと $Y \sim N(0,1)$ である。よって

$$P(3 < X < 6) = P(\frac{3-4}{3} < \frac{X-4}{3} < \frac{6-4}{3}) = P(-0.333 < Y < 0.667)$$

$$= \Phi(0.667) - \Phi(-0.333) = 0.7475 - 0.3694 = 0.3781$$

同様に

$$P(X > 10) = P(Y > \frac{10-4}{3}) = 1 - \Phi(2) = 0.0228$$

問 19 ある試験での成績の結果は，平均点 *64* 点，標準偏差 *14* 点であった。得点の分布は正規分布にしたがうとするとき，次の問に答えよ。

（１）得点が *36* 点から *92* 点の者が *400* 人いた。受験者の総数は約何人か。

（２）合格点を *50* 点とすると，約何人が合格することになるか。

なお，$X_1 \sim N(m_1, \sigma_1^2), X_2 \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ であり，かつ X_1 と X_2 は独立であるとき，$Y = X_1 + X_2$ は $N(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ にしたがう。この証明には特性関数の議論が必要なため，詳細は省略する。

(4) **対数正規分布** $X \sim N(m, \sigma^2)$ であるとき，$Y = e^X$ の分布を対数正規分布という。つまり，Y の確率密度関数 $\rho(x)$ は

$$\rho(x) = 0, \quad x \leq 0$$

$$\rho(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}), \ x > 0$$

であたえられる。このとき

$$E[Y] = e^{m + \frac{\sigma^2}{2}},$$

$$V(Y) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2m+\sigma^2}$$

である。

対数正規分布は，株価過程の数学的モデル化の際に用いられる。

問　題

1　50 歳の夫と 48 歳の妻が 20 年後まで生存する確率は，夫が 0.15，妻が 0.2 である。現在夫が 50 歳，妻が 48 歳である夫婦が 10 組いるとして，このうち 20 年後に夫婦のうち少なくとも一方が生存している組の数を X とする。X が二項分布に従うとして，X の期待値，標準偏差をもとめよ。

2 じゃがいもの山積みがあって，その不良品率は 10% である。この中からでたらめに 25 個取り出すとき

（1）不良品がちょうど 3 個含まれる確率をもとめよ。

（2）良品が少なくとも 20 個含まれる確率をもとめよ。

（3）良品が 20 個以下である確率をもとめよ。

3 人口 100 万人のある県では，ある病気 B の発生が 1 年間に平均 10 件みられる。この県で病気 B にかかる人が 1 年間に 2 人以下である確率をもとめよ。

4 E 大学で花粉症が流行し，対策に追われた当局は花粉の数を調べるため構内に 10000 個の観測皿を設置してその中の花粉数を調べた。その結果，10000 個の観測皿のうち花粉が 2 個入っていたものが 109 個，3 個入っていたものが 6 個あった。

（1）10000 個の観測皿全体に何個の花粉が降りそそいだと考えられるか。

（2）花粉が 1 つも入っていない観測皿はいくつあると推測されるか。

5 次の表（次ページ）のような宝くじ（1 枚 200 円）の賞金額の期待値を計算せよ。

等級	当選金	本数
1等	40000000	7
1等前後賞	10000000	14
1等組違い賞	200000	903
2等	10000000	5
2等組違い賞	100000	645
3等	1000000	130
4等	140000	130
5等	10000	1300
6等	1000	26000
7等	200	1300000
はずれ	0	（引き算）
合計		13000000

6 次の問に答えよ。

（1）$X \sim N(4, 2^2)$ のとき $P(X \leq 6)$ をもとめよ。

（2） $X \sim N(3, (1.5)^2)$ のとき，$P(X \leq x) = 0.4218$ となる x をもとめよ。

（3）$X \sim N(5, 2^2)$ のとき $P(2.5 \leq X \leq 6.5)$ をもとめよ。

（4）$X \sim N(6, 2^2)$ のとき，平均を中心とする区間でその上の確率が 0.9 になるようなものをもとめよ。

5 正規分布の応用

5.1 チェビシェフの不等式

補題 X を確率変数で、平均 $E[X]$, 分散 $V(X)$ がともに有限とする。このとき任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$P(|X - E[X]| > \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

証明

$m = E[X]$ とおく。X を連続型確率変数とし、その密度関数を $f(x)$ とする。

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)dx$$

$$\geq \int_{-\infty}^{m-\epsilon} (x-m)^2 f(x)dx + \int_{m+\epsilon}^{\infty} (x-m)^2 f(x)dx$$

$$\geq \int_{-\infty}^{m-\epsilon} \epsilon^2 f(x)dx + \int_{m+\epsilon}^{\infty} \epsilon^2 f(x)dx$$

$$= \epsilon^2 \int_{\{x;|x-m|>\epsilon\}} f(x)dx$$

$$= \epsilon^2 P(|X-m| > \epsilon).$$

両辺を ϵ^2 で割ればよい。X が離散型確率変数の場合も同様にできる。

証明終

5.2 大数の弱法則

定理 1 （大数の弱法則）ーラプラス 1814

$X_1, X_2, X_3, ...$ を独立で同分布な確率変数、

平均 $m = E[X_1] = E[X_2] = ...,$

分散 $v = V(X_1) = V(X_2) = ...$

はいづれも有限とする。このとき任意の $\epsilon > 0$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - m| > \epsilon) = 0$$

例 13 確率変数 X_i を

$X_i = 1$ さいころを投げて i 回目に *3* の目が出るとき, $X_i = 0$ それ以外

とおく，$i=1,2,...$。このとき $E[X_i]=\frac{1}{6}=m, i=1,2,...$ である。$X_1+...+X_n$ は n 回中 3 の目が出る回数を表し、$\frac{X_1+...+X_n}{n}$ はその頻度を表す。このとき

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{X_1+...+X_n}{n}-\frac{1}{6}|>\epsilon)=0$$

である。

定理１では X_i の分布は何でもよい。E をある事象とし、もし E が起これば $X_i=1$、そうでなければ $X_i=0$ とすると、$m=E[X_i]$ は E の発生確率を表す。よってこの定理は、観測（頻度の測定）により事象の確率を推定することの正当性を保証している。

定理１の証明

$Y_n=X_1+...+X_n$ とおく。(X_i) の独立性から

$$V(Y_n)=V(X_1)+...+V(X_n)=nv$$

であり、よって

$$V(\frac{Y_n}{n})=\frac{1}{n^2}V(Y_n)=\frac{v}{n}$$

一方

$$E[\frac{Y_n}{n}]=\frac{1}{n}E[Y_n]=\frac{1}{n}\cdot nm=m$$

補題より

$$P(|\frac{Y_n}{n}-m|>\epsilon)\leq\frac{\frac{v}{n}}{\epsilon^2}=\frac{v}{n\epsilon^2}$$

これより $0\leq\lim_{n\to\infty}$ 左辺 $\leq\lim_{n\to\infty}\frac{v}{n\epsilon^2}=0.$

証明終

上の証明において、

$$P(|Y_n-nm|>n\epsilon)\leq\quad\frac{v}{n\epsilon^2}$$

である。そこで $\epsilon = c\sqrt{\frac{v}{n}}$ とおくと $(c > 0)$、

$$左辺 = P(Y_n - nm| > c\sqrt{vn})$$
$$= P(|\frac{1}{\sqrt{vn}}(X_1 + ... + X_n - nm)| > c) \leq \frac{1}{c^2}$$

ということになる。この評価は n によらないので、

$$\frac{1}{\sqrt{vn}}(X_1 + ... + X_n - nm) = \frac{1}{\sqrt{\frac{v}{n}}}(\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - m)$$

は、n が大きいとき、n によらない分布に近づくことが予想される。実際、次が成り立つ。

5.3 中心極限定理

定理２（中心極限定理）ードモアブル・ラプラス

$X_1, X_2, X_3, ...$ を独立で同分布な確率変数、
平均 $m = E[X_1] = E[X_2] = ...,$
分散 $v = V(X_1) = V(X_2) = ...$
はいづれも有限とする。さらに

$$E[|X - m|^3] < \infty$$

を仮定する。このとき、任意の $a < b$ について、

$$\lim_{n\to\infty} P(a < \frac{\frac{X_1+...+X_n}{n} - m}{\sqrt{\frac{v}{n}}} < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

となる。

これを、「$\frac{1}{\sqrt{nv}}(X_1 + ... + X_n - nm)$ が標準正規分布に法則収束する」という。

X_i の分布が何であっても、収束先が正規分布になるのがこの定理の強力なところである。

例題 12 *2*項分布に対する中心極限定理

なお、中心極限定理とはやや異なるが、次のことが知られている：*2*項分布 $B_{n,p}$ にしたがう確率変数 X は、n が大きいとき、近似的に正規分布 $N(np, npq)$ にしたがう。ただし、$q = 1 - p$。したがって、

$$T = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$$

とおくと、T の分布は、n が大きいとき、近似的に標準分布 $N(0,1)$ にしたがう。

この証明は比較的易しい。

解 12

問 題

問 20 *(1)* あるくじは *1000* 本発行され、このうち *2* 本が当たりである。このくじを何本か買って当たる確率を $\frac{1}{2}$ 以上にするためには、少なくとも何本買わなければならないか。

(2) このくじは毎週発行される。太郎君は毎週このくじを *1* 枚買う。少なくとも *1* 回当たる確率を $\frac{1}{2}$ 以上にするためには、少なくとも何本買わなければならないか。

問 21 次を示せ。

$$\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 - \frac{1}{x^2})$$

問 22 $(X_i)_{i=1,2,...}$ を平均 $\lambda = 1$ のポアソン分布をもつ独立同分布の確率変数列とし、$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ とする。

(1) S_n の分布は何か。
(2) $P(S_n \leq n) = e^{-n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{k!}$ を示せ。
(3) 中心極限定理を使って

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

を示せ。

問 23 ある町には *20000* 人の住人がいて、このうちある病気の免疫を持っていない人の割合は *0.4* である。この病気になる人の割合を全体の *1* 割以下にするためには、ワクチンを少なくとも何個用意しなければならないか。

6　保険とは何か

6.1　保険とは何か

将来に不確実性があるとき、それを回避する手段として代表的なものに先物と保険がある。次の例を見よ。

登場人物Ａ子Ｂ男（現在の彼氏）Ｃ男（イケメン）

Ａ子はＢ男を今年のクリスマス・イブにデートに誘いたい（誘わせたい）とする。

パターン１（先物）　Ａ子はＢ男と「今年のクリスマス・イブにデートをする」という契約（約束）を結ぶ。この契約により、Ｂ男もクリスマス・イブをひとりで過ごすリスクから逃れることができる。

このように「将来のある時点において、あらかじめ約束された義務を負う契約」を**先物**（サキモノ）という。

パターン２ (保険) Ａ子は、クリスマス・イブまでに、Ｂ男より更にイケメンである（好ましい）Ｃ男と偶然めぐり合い、クリスマス・イブのデートを申しこまれるかも知れない。もしＡ子が１のような先物契約をしていると、Ａ子はＣ男の申し出を断らなければならない。もしそうなればＡ子は早すぎた契約を後悔するであろう。

そこでＡ子は「今年のクリスマス・イブにデートをしたいが、もし（私の）都合が悪くなったらゴメンナサイ」という契約（約束）をＢ男と結ぶことにする。

このように「将来事態が変化したときには、その利益を保証（ないし損失をカバー）してくれる契約」を**保険**という。

これに対し先物では、将来事態が変化して自分にとっ

て有利でない状況が生じたとしても、契約を破棄することはできない。

パターン２のような契約はＡ子にとって一方的に有利なので、Ａ子はＢ男に対価を払わなければならない。これが保険料である。すなわち保険料は「悪い事態を回避し、望ましい事態の時には利益を得る」ための対価である。

6.2　なぜ保険が必要か

6.2.1　リスク

人間の知は有限であり、我々は将来起こることを事前にすべて知っているわけではない。自分の意思である行動をとった場合、その結果をすべて事前に予測できるわけではない。このように、不確実にしか予測できない（将来の）事象によって被る損失の可能性を**リスク**とよぶ。

例　（１）将来の収入、金利変動が不明なのに（変動金利で）住宅ローンを組むとする。このとき返済不能になるリスク

（２）知人の健康・経済状態をよく知らないのに（債務の）連帯保証人になるとする。この知人は行方不明になり、債務の返済を求められるリスク

（３）将来理想の相手と巡り合うかも知れないのに、成り行きで（勢いで）現在の交際相手と婚約してしまった。1ヵ月後理想の相手と巡り合い、後悔するリスク

6.2.2　リスク回避

ここにA,B2つの資産があり、現在非負の価値をもっているとする。

資産Ａは１年後に、1/2の確率で1000万円になるが、

1/2 の確率で 0 になる。
資産 B は 1 年後に、確実に 500 万円になる。
資産 A にはリスクがあるが、資産 B にはリスクがない。資産の例としては株、不動産などであり、ヒトの収入でいえば、A はスポーツ選手の場合であり、B は公務員の場合である。
1 年後の資産価値の期待値（平均）はともに 500 万円である。A,B どちらかの資産を選択してよいとすると、普通の人は B を選択する。つまり多くの人は不確実性を回避するように行動する。このことを「**リスク回避的**」という。
それどころか、人によっては、資産 B の 1 年後の価値が確実に 400 万円 ($<$ 500 万円) になる場合であっても、B を選択する。このことを「リスク回避的な人は確実に得られる価値に対して正の**リスク・プレミアム**を払う」という。今の場合、100=500-400(万円) がリスク・プレミアムになる。
このことが、「(少し割高な）保険料を払ってでもリスクを回避したい」という需要となり、保険が成立する理由になっている。つまり、リスクを引き受けることにより、利益を得ることができる。

6.2.3 保険の数学的原理

例　卵が 30 個あるとする。
（1）これらをすべて１つのバスケット（篭）に入れる場合。籠を落とす確率を 1/3 とすると、壊れる卵の期待値は

$$0 \times 2/3 + 30 \times 1/3 = 10(\text{個}),$$

分散は

$$(0-10)^2 \times 2/3 + (30-10)^2 \times 1/3 = (200+400)/3 = 200$$

である。

（2）これらをA, B, Cの籠に10個づつ入れる場合。籠を落とす確率を各々1/3とすると、壊れる卵の期待値は

$$3 \times (0 \times 2/3 + 10 \times 1/3) = 10(\text{個}),$$

分散は次のように計算される：

壊れる卵の数をXとすると、Xのとりうる値は$0, 10, 20, 30$であり、

$$P(X=0) = (2/3)^3,$$

$$P(X=10) = {}_3C_1(1/3)(2/3)^2,$$

$$P(X=20) = {}_3C_2(1/3)^2(2/3),$$

$$P(X=30) = (1/3)^3$$

よって、分散を$V(X)$と書くと

$$V(X) = (0-10)^2 \times P(X=0) + (10-10)^2 \times P(X=10)$$

$$+(20-10)^2 \times P(X=20) + (30-10)^2 \times P(X=30)$$

$$= 200/3 = 66.67 < 200$$

となる。

上のように籠の数を増やすことにより、壊れる卵数の期待値は変わらないのだが、壊れる卵数の分散を減少させることができる。つまり、壊滅的被害を回避できる。

籠の数をさらに増やせば、壊れる卵の数は殆どの場合期待値10に集中することを証明できる。これは確率論における「**大数の法則**」による。

保険も共通の原理で運営されている。契約期間1年の自動車保険を考える。

各人は300万円の価値をもつ自動車を1台ずつ所有しているとする。各人にとって、1年後の自動車の価値は、期間中に1年間に事故を起こせば0であり、起こさなければ300万円である。ただし、1年間での自動車価値の減価はないとし、事故を起こした場合の対物・対人賠償は（ここでは）考えない。

保険料は10万円とし、事故率は1/30とする。もし期間中に事故に遭った場合、300万円が給付され、遭わなかった場合、保険料は掛け捨てになる。

もしこの保険に入らなければ、1年後に各人に残る資産価値の期待値は

$$300 \times (29/30) + 0 \times (1/30) = 290(\text{万円})$$

である。この保険に入る場合、1年後に各人に残る資産価値の期待値は

$$(300 \times (29/30) + (+300) \times (1/30)) - 10 = 290(\text{万円})$$

となって、どちらも変わらない。しかし、保険に入ることにより、大きな支出(300万円)から逃れることができる。

つまり、保険に入ることにより、大きな被害を回避しながら、所有価値を保持することができる。実際には、多くの人はリスク回避的なので、上の保険料に上乗せしてリスク・プレミアムを払う（10万円より高くても保険に入る）。これが保険会社の営業益となる。

上記の保険機能を、主に人の生死にかかわるリスクのカバーに用いるものが**生命保険**、物品の損壊、傷害、火

災、航海などに関する比較的短期のリスクのカバーに用いるものが**損害保険**である。

本稿では、以下、生命保険（生保）および年金について述べる。

7 金利計算

7.1 年利率 i

A 円を**年利率** i で n 年間運用した場合 n 年後の元金と利息を合わせた金額は $(1+\mathrm{i})^n A$ 円となる。つまり、時点 0 での A 円を将来の時点 n での価値に変換するときに、$(1+i)^n$ がかけられたと考えることができる。

7.2 現価率 v

年利率 i で n 年後に元金と利息を合わせた金額が B 円となるためには、時点 0(現在) がいくらであればよいか考える。年利率 i で A 円を n 年間運用すると元利合計は $(1+i)^n A$ となるから、$(1+i)^n A = B$ となればよい。よって、時点 0 で必要となる A 円は $A = \dfrac{1}{(1+i)^n} B$ となる。ここで、$v = \dfrac{1}{1+i}$ とおくと、$A = v^n B$ となる。つまり、v は将来の価値を現在の価値に変換している。この v を**現価率**とよぶ。

例題 (1) n_1 年後, n_2 年後, n_3 年後にそれぞれ K_1 円, K_2 円, K_3 円返済しなければならない負債がある。現在いくら持っているべきか。

(2) (1) において m 年後に K_0 円の収入があることがわかっている。現在いくら持っているべきか。ただし、現

価率は v とする。

解 (1) $K_1v^{n_1}+K_2v^{n_2}+K_3v^{n_3}$ (2) $K_1v^{n_1}+K_2v^{n_2}+K_3v^{n_3}-K_0v^m$

問題 5 年後に 10 万円、10 年後に 20 万円を返済する負債がある。一方、7 年後に定期預金が満期になり、3 万円の収入がある。現在いくら持っているべきか。ただし、年利率は i, 現価率は v とする。

8 確定年金

年金には、被保険者の生存を条件に支払われる**生命年金**と被保険者の生存を条件にしない**確定年金**とがある。生命年金の場合は、年金の支払いが何回受けられるかは被保険者の余命によって変わる。これに対して確定年金では、被保険者の生存によらないので支出金額は確定する。
n 年契約、期始払い、年金年額 1 の確定年金の現価を考える。

時点 0,1,$\cdots$,$(n-1)$ での 1 円の価値を時点 0 での価値に変換すると、1,v,$\cdots$,v^{n-1} 円となるので、n 年契約期始払い確定年金の現価を $\ddot{a}_{\overline{n|}}$ で表すと

$$\ddot{a}_{\overline{n|}} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k$$

となる。

例題 期間 20 年、総額 1000 万円の負債を、初年度期始から年 1 回払いで 20 回にわたって返済する。1 回の支払い額 K を求めよ。ただし、年利率を i とする。

解 $K\ddot{a}_{\overline{20|}}(i) = 1000$ より、$K = \frac{1000}{\ddot{a}_{\overline{20|}}(i)}$。

問題 (1) 毎年始に一定金額L円を積み立ててn年後にA円にするにはLをいくらにすればよいか。ただし、年利率をiとする。

(2) $L=1$とする。$A \geq 2n$となるnはいくつ以上か。ただし、年利率をiとする。

(3) $i=0.03$とする。(2) のnを具体的に求めよ。ただし、$\log 2=0.7, \log(1.03)=0.03$としてよい。

9 生命確率

x歳の人の余命を確率変数Xで表す。生命表 (ある瞬間に$l_0=100{,}000$人生まれたとして、n年後の生存者数をl_n人として表にしたもの。この集団は単調に減少していき、ある時間ωで0となる。) を用いて、生命確率${}_tp_x$, ${}_tq_x$を次で定義する。

$$
{}_tp_x = P(X \geq t) = \frac{l_{x+t}}{l_x}
$$

$$
{}_tq_x = P(X < t) = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x}
$$

特に、$t=1$のとき、p_x、q_xと表される。次に、Xの確率密度関数$f_X(t)$について考える。$f_X(t)$は$f_X(t)=\frac{d}{dx}P(X \leq \mathrm{t})$と定まる。ここで、$x$歳での生存者数$l_x$人が実数$x(\geq 0)$で定められていて、$l_x$はすべて$x$について微分可能であることを仮定する。このとき、**死力**μ_xを$\mu_x=-\frac{1}{l_x}\frac{d}{dx}l_x$で定義する。すると、確率密度関数$f_X(t)$は、

$$
\begin{aligned}
f_X(t) &= \frac{d}{dt}P(X \leq t) = \frac{d}{dt}(1-P(X \geq t)) = \frac{d}{dt}(1-\frac{l_{x+t}}{l_x}) \\
&= -\frac{1}{l_x}\frac{d}{dt}l_{x+t} = \frac{l_{x+t}}{l_x}(-\frac{1}{l_{x+t}}\frac{d}{dt}l_{x+t}) = {}_tp_x\mu_{x+t}
\end{aligned}
$$

と表せる。

ここで $\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\log_{x+t}$ であるから、

$$\frac{d}{ds}\log l_{x+s} = -\mu_{x+s}$$

両辺を s について 0 から t まで積分すると

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\log l_{x+s}ds = -\int_0^t \mu_{x+s}ds$$

よって

$$\log\frac{l_{x+s}}{l_x} = -\int_0^t \mu_{x+s}ds$$

すなわち

$$_tp_x = \exp(-\int_0^t \mu_{x+s}ds)$$

と表せる。

例題 死力 μ_x が

$$\mu_x = \frac{1}{100-x}, \quad 0 \leq x \leq 100$$

で与えられるとき、40 歳の人の余命 X の確率密度関数を求めよ。

解

$$_tp_{40} = \exp\{-\int_0^t \mu_{40+s}ds\} = \exp\{-\int_0^t \frac{1}{60-s}ds\}$$

$$= \exp\{\log(60-t) - \log 60\} = \frac{60-t}{60}.$$

よって

$$f_X(t) = \frac{60-t}{60}\cdot\frac{1}{60-t} = \frac{1}{60}$$

問題 9-1 死力 μ_x が

$$\mu_x = \frac{1}{100-x}, \quad 0 \leq x \leq 100$$

で与えられるとき、現在50歳の人が20年後と30年後の間で死亡する確率を求めよ。

9.1 定期保険

x 歳加入,n 年契約, 死亡保険金 C 円の定期保険を考える。被保険者の余命を X で表し, この契約についての会社側の支出金額の現価を Z とすると

$$Z = \begin{cases} Cv & (0 \leq X < 1) \\ Cv^2 & (1 \leq X < 2) \\ \vdots & \\ Cv^k & (k-1 \leq X < k) \\ \vdots & \\ Cv^n & (n-1 \leq X < n) \\ 0 & (n \leq X) \end{cases}$$

で与えられる。これを余命 x の整数部分 K を用いて表現すると

$$Z = Cv^{K+1}$$

となる。この定期保険の一時払い純保険料を A とすると, A の値は収支のバランスが統計的に取れたものとして決定されるので

$$A = Z \text{ の期待値}$$

と定められる。ゆえに,Zの期待値を生命確率を用いて表すことにより,Aの値は

$$\begin{aligned} A = E[Z] &= C\sum_{t=1}^{n} v^t P(t-1 \leq X < t) \\ &= C\sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_{t-1|}q_x \end{aligned}$$

と定められる。

特に, $C = 1$ のときの一時払い純保険料を $A^{\ 1}_{x:\overline{n|}}$ で表すと

$$\begin{aligned} A^{\ 1}_{x:\overline{n|}} &= \sum_{t=1}^{n} v^t\ {}_{t-1|}q_x \\ &= vq_x + v^2\ {}_{1|}q_x + \cdots + v^n\ {}_{n-1|}q_x \\ &= v\frac{d_x}{l_x} + v^2\frac{d_{x+1}}{l_x} + \cdots + v^n\frac{d_{x+n-1}}{l_x} \\ &= \frac{v^{x+1}d_x + v^{x+2}d_{x+1} + \cdots + v^{x+n}d_{x+n-1}}{v^x l_x} \end{aligned}$$

となる。

9.2 生存保険

x歳加入,n年後に生存しているときに,生存保険金C円が支払われる生存保険の一時払い純保険料Aを求める。この保険の会社側の支出金額の現価Zは

$$Z = \begin{cases} Cv^n & (X \geq n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

によって与えられるので, A は Z の期待値として

$$A = E[Z] = Cv^n P(X \geq n) = Cv^n \ {}_np_x$$

となる。

特に, $C = 1$ のときの一時払い純保険料を $A_{x:\overline{n|}}^{\ 1}$ とすると

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n|}}^{\ 1} &= v^n \ {}_np_x \\ &= v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} \end{aligned}$$

となる。

9.3 養老保険

養老保険とは, 生存保険と定期保険とを合わせたものである. x 歳加入, n 年契約, 生存保険金 1, 死亡保険金 1,(死亡時期末払い) の養老保険では, n 年以内に死亡すれば死亡保険金 1 が期末に支払われ, n 年後に生存していれば生存保険金 1 が支払われるものである。

問題 9-2

生命表が次で与えられるとする。

年度 x	0	1	2	3	4	5	6
人口（期始）l_x	100	70	60	50	40	20	0

(1) $d_x = l_x - l_{x-1}$ とおく。$d_x, x = 1, ..., 6$ を求めよ。
(2) $A^1_{0:\overline{3|}}, A^1_{0:\overline{5|}}, A^1_{0:\overline{6|}}$ を求めよ。
(3) $A_{0:\overline{3|}}^{\ 1}, A_{0:\overline{5|}}^{\ 1}, A_{0:\overline{6|}}^{\ 1}$ を求めよ。
たたし、現価率を v とする。

9.4　生命年金

x 歳加入、n 年契約、期始払い、年金年額 1 の生命年金の現価を $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ で表す。, 会社側の支出金額の現価を Z とすると

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E[Z]$$

である。

まず Z を n 個の確率変数の和として表す。m 年度の始め, すなわち時点 $(m-1)$ における会社側の支出金額の現価を Z_m とすると, 時点 $(m-1)$ で年金支給が行われる条件は被保険者が生きていることなので

$$Z_m = \begin{cases} v^{m-1} & (X \geq m-1) \\ 0 & (X < m-1) \end{cases}$$

となり, この Z_m の期待値は

$$E[Z_m] = v^{m-1} P(X \geq m-1) = v^{m-1}\ {}_{m-1}p_x$$

で与えられる。会社側の支出金額の現価 Z は $Z_1, \cdots Z_n$ の和となるので, 期始払い生命年金現価は

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{m=0}^{n-1} v^m\ {}_m p_x$$

となる。

x 歳加入、f 年後開始、n 年契約、期始払い、年金年額 1 の生命年金を考える。この年金の現価を ${}_{f|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ で表す。上と同様にして考えれば、

$${}_{f|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{m=1}^{n} v^{f+m-1}\ {}_{f+m-1}p_x$$

となる。

問題 9-3
生命表が次で与えられるとする。

年度 x	0	1	2	3	4	5	6
人口（期始）l_x	100	70	60	50	40	20	0

$\ddot{a}_{1:\overline{3}|}, \ddot{a}_{0:\overline{6}|}, \ddot{a}_{2:\overline{4}|}$ を求めよ。ただし、現価率を v とする。

10　計算基数

以後の計算のため、次の記号を導入する。

$$
\begin{aligned}
d_x &= l_x - l_{x+1} \\
D_x &= v^x l_x & N_x &= D_x + \cdots + D_{\omega-1} \\
C_x &= v^{x+1} d_x & M_x &= C_x + \cdots + C_{\omega-1} \\
R_x &= M_x + \cdots + M_{\omega-1} & S_x &= N_x + \cdots + N_{\omega-1}
\end{aligned}
$$

11　年払い保険料

平準年払い保険料

支払保険金の現価の期待値を一時払い保険料という。

一時払いの場合 A となる保険の保険料の払い込みを、年1回払いで m 回にわたって払い込むときの年払い保険料 P を考える。$(m = 1, 2, 3, \cdots)$ 契約時から $(k-1)$ 年後における保険料収入の現価を Z_k とする。保険料は被保険者が生存しているときのみに支払われるので、Z_k は

$$
Z_k = \begin{cases} Pv^{k-1} & (X \geq k-1) \\ 0 & (X < k-1) \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots, m)
$$

となる。会社側の保険料収入の現価は、$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_m$ であり、この Z の期待値が一時払い純保険料と等価と考えられるので、(**収支相等の原則**)

$$
\begin{aligned}
A &= E[Z_1] + E[Z_2] + \cdots + E[Z_m] \\
&= P(1 + vp_x + v^2{}_2p_x + \cdots + v^{m-1}{}_{m-1}p_x) \\
&= P\ddot{a}_{x:\overline{m}|}
\end{aligned}
$$

が成り立つ。これより、年払い純保険料 P は、

$$
P = \frac{A}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}
$$

と求まる。

このとき、x 歳加入、n 年契約、死亡保険金 1 で死亡時期末払い、生存保険金 1 となる養老保険の保険料を n 年間の年払いとしたときの年払い保険料 $P_{x:\overline{n}|}$ は $P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ となる。ただし、$A_{x:\overline{n}|}$ は養老保険の一時払い保険料である。$A_{x:\overline{n}|}$ は、上のように、保険会社の保険契約に基づく支払い現価の期待値として計算される。

同様の計算により、x 歳加入、n 年契約、死亡保険金 1 の定期保険の年払い保険料、x 歳加入、n 年契約、生存保険金 1 の生存保険の年払い保険料は、各々

$$
P = \frac{A^{\ 1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}
$$

$$
P = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ \ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}
$$

となる。

据え置き年金の年払い保険料

x 歳加入、f 年後開始、n 年契約、期始払い、年金年額 1 の生命年金の保険料を f 年間の年払いにするときの

年払い保険料 P を考える。

まず、x 歳から $(x+f)$ 歳までが保険料払い込み期間で、$(x+f)$ 歳から $(x+f+n)$ 歳までが年金受給期間となる。前と同様に考えると、${}_{f|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = P\ddot{a}_{x:\overline{f}|}$ となるので、年払い保険料 P は $P = \frac{{}_{f|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{f}|}}$ となる。

例題 30 歳加入、30 年後開始、期始払い、60 歳から 70 歳までの年金年額が 200 万円、70 歳から 80 歳までの年金年額が 100 万円となる生命年金がある。保険料は 30 年間の年払いとする。年払い保険料はいくらか。

解 保険料を P とすると、

$$P\ddot{a}_{30:\overline{30}|} = 200{}_{30|}\ddot{a}_{30:\overline{10}|} + 100{}_{40|}\ddot{a}_{30:\overline{10}|}$$

よって

$$P = \frac{200{}_{30|}\ddot{a}_{30:\overline{10}|} + 100{}_{40|}\ddot{a}_{30:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{30}|}}$$

12 純保険料式責任準備金

保険会社は保険加入者から保険料を集め、それを運用し、保険金支払いが生じたときに保険金を支払っている。保険金支払いがどれくらい生ずるかは不確定なことであるが、将来の保険金支払いに対して、最低これだけの金額は準備しておかなければならないという金額が、統計的に定められている。これが**責任準備金**というものである。

12.1 責任準備金の算出方法

過去法とよばれる方法と**将来法**とよばれる方法の二つがある。過去法とは、過去の保険料収入と保険金支出から、現在保険会社が保持しているべき金額を算出する

方法である。一方、将来法とは、将来発生する保険金支出と保険料収入から、将来の支払いに対して準備しておくべき金額を算出する方法である。　ある保険契約に対する過去法による t 年度末の責任準備金 ${}_tV^1$、および将来法による t 年度末の責任準備金 ${}_tV^2$ は、それぞれ次のように定義される。

(1) 過去法

${}_tV^1$=(一契約当たりの過去の収入の t 年度末での価値)−(一契約当たりの過去の支出の t 年度末での価値)

(2) 将来法

${}_tV^2$=(一契約当たりの将来の支出の t 年度末での価値)−(一契約当たりの将来の収入の t 年度末での価値)

12.2　養老保険の責任準備金

x 歳加入、n 年契約、死亡保険金１ (死亡時期末払い)、生存保険金１、保険料全期払い込み (n 年間の年払い) とした養老保険の t 年度末の責任準備金を過去法と将来法で求める。

まず、過去法で考える。1 年度から t 年度までの保険会社の収入と支出を考える必要があるので、

時点	x	$x+1$	$\cdots$	$x+t-1$	$x+t$
収入	$P_{x:\overline{n}\vert}l_x$	$P_{x:\overline{n}\vert}l_{x+1}$	$\cdots$	$P_{x:\overline{n}\vert}l_{x+t-1}$	0
支出	0	d_x	$\cdots$	d_{x+t-2}	d_{x+t-1}

過去の収入の時点 $(x+t)$ での価値

$$= P_{x:\overline{n}\vert}\left\{(1+i)^t l_x + (1+i)^{t-1} l_{x+1} + \cdots + (1+i) l_{x+t-1}\right\}$$

過去の支出の時点 $(x+t)$ での価値

$$= (1+i)^{t-1}d_x + (1+i)^{t-2}d_{x-1} + \cdots + (1+i)d_{x+t-2} + d_{x+t-1}$$

時点 $(x+t)$ で残存している契約の数は l_{x+t} で、それ以外は、それまでに死亡が発生して、死亡保険金が支払われ、契約が終了している。したがって、t 年度末での過去法による責任準備金の総額 l_{x+t} となるので、

$$\begin{aligned} l_{x+t\,t}V^1 &= P_{x:\overline{n}|}\left\{(1+i)^t l_x + (1+i)^{t-1}l_{x+1} + \cdots + (1+i)l_{x+t-1}\right\} \\ &\quad -\left\{(1+i)^{t-1}d_x + (1+i)^{t-2}d_{x+1} + \cdots + (1+i)d_{x+t-2} + d_{x+t-1}\right\} \end{aligned}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} {}_tV^1 &= P_{x:\overline{n}|}\frac{(1+i)^t l_x + (1+i)^{t-1}l_{x+1} + \cdots + (1+i)l_{x+t-1}}{l_{x+t}} \\ &\quad -\frac{(1+i)^{t-1}d_x + (1+i)^{t-2}d_{x+1} + \cdots + (1+i)d_{x+t-2} + d_{x+t-1}}{l_{x+t}} \\ &= P_{x:\overline{n}|}\frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - Mx + t}{D_x} \end{aligned}$$

となる。

次に、将来法では、$(t+1)$ 年度から n 年度までの収入と支出を考える必要があるので、

時点	$x+t$	$x+t+1$	$\cdots$	$x+n-1$	$x+n$
収入	$P_{x:\overline{n}|}l_{x+t}$	$P_{x:\overline{n}|}l_{x+t+1}$	$\cdots$	$P_{x:\overline{n}|}l_{x+n-1}$	0
支出	0	d_{x+t}	$\cdots$	d_{x+n-2}	$d_{x+n-1} + l_{x+n}$

将来の収入の時点 $(x+t)$ での価値

$$= P_{x:\overline{n}|}(l_{x+t} + vl_{x+t+1} + \cdots + v^{n-t-1}l_{x+n-1})$$

将来の支出の時点 $(x+t)$ での価値

$$= vd_{x+t} + \cdots + v^{n-t-1}d_{x+n-2} + v^{n-t}d_{x+n-1} + v^{n-t}l_{x+n}$$

これより、時点 $(x+t)$ での責任準備金は、

$$\begin{aligned}
l_{x+tt}V^2 &= (vd_{x+t} + \cdots + v^{n-t}d_{x+n-1} + v^{n-t}l_{x+n}) \\
&\quad -P_{x:\overline{n}|}(l_{x+t} + vl_{x+t-1} + \cdots + v^{n-t-1}l_{x+n-1}) \\
{}_tV^2 &= \frac{vd_{x+t} + \cdots + v^{n-t}d_{x+n-1} + v^{n-t}l_{x+t}}{l_{x+t}} \\
&\quad -P_{x:\overline{n}|}\frac{l_{x+t} + vl_{x+t+1} + \cdots + v^{n-t-1}l_{x+n-1}}{l_{x+t}} \\
&= \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+n}} - P_{x:\overline{n}|}\frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_{x+n}}
\end{aligned}$$

と求まる。

以上のことから、${}_tV^1 = {}_tV^2$ を示す。

$$\begin{aligned}
{}_tV^1 - {}_tV^2 &= P_{x:\overline{n}|}\frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - Mx + n + D_{x+n}}{D_x} \\
&= \frac{1}{D_{x+t}}(P_{x:\overline{n}|}(N_x - N_{x+n}) - (M_x - M_{x+n} + D_{x+n}))
\end{aligned}$$

となるが、

$$P_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - Mx + n + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

であることにより、${}_tV^1 = {}_tV^2$ となることがわかる。
過去法と将来法により求められる責任準備金が等しくなることがわかったので、これを ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ と表す。すなわち、

$${}_tV_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} P_{x:\overline{n}|}\frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - Mx + t}{D_x} \\ A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \end{cases}$$

となる。

12.3 遺族年金が付いた据え置き生命年金の責任準備金

x 歳加入、f 年据え置き、n 年契約、期始払い、年金年額 1 の生命年金がある。保険料は f 年間の年払いとし、年金支給期間に死亡の場合は、遺族が年額 $\frac{1}{2}$ を次の年金支給日から $(f+n)$ 年度期始まで確定年金として受け取る。

まず、この年金の年払い保険料 P を求める。遺族年金の時点 $(x+f)$ での価値は、

$$\frac{1}{2}(\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x+f:\overline{n}|})$$

であり、加入者が f 年後生存していると、これが支給されると考えられるので、

$$P\ddot{a}_{x:\overline{f}|} = {}_{f|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \frac{1}{2}(\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x+f:\overline{n}|})A_{x:\overset{1}{\overline{f}|}}$$

が成り立つ。これより、

$$\begin{aligned} P &= \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}A_{x:\overset{1}{\overline{f}|}} + {}_{f|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{2\ddot{a}_{x:\overline{f}|}} \\ &= \frac{D_{x+f}\ddot{a}_{\overline{n}|} + (N_{x+f} - N_{x+f+n})}{2(N_x - N_{x+f})} \end{aligned}$$

となる。

次に、責任準備金 ${}_tV$ を、$(i) 1 \leq t \leq f$ と $(ii) f+1 \leq t \leq f+n$ の場合に分けて考える。

$(i) 1 \leq t \leq f$ のとき．将来法で考えると、時点 $(x+t)$ でこの年金に加入すると考えたときの支出現価から収入現価を引けばよいので、

$$\begin{aligned} {}_tV &= {}_{f-t|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n}|} + \frac{1}{2}(\ddot{a}_{\overline{n}|} - \ddot{a}_{x+f:\overline{n}|})A_{x+t:\overset{1}{\overline{f-t}|}} - P\ddot{a}_{x+t:\overline{f-t}|} \\ &= \frac{D_{x+f}\ddot{a}_{\overline{n}|} + (N_{x+f} - N_{x+f+n})}{2D_{x+t}} - P\frac{N_{x+t} - N_{x+f}}{D_{x+t}} \end{aligned}$$

となる。

$(ii) f+1 \leq t \leq f+n$ のとき．この場合の残存契約には2種類ある。加入者が生存している場合と加入者が死亡している場合である。$1 \leq t \leq f$ の場合には加入者が死亡していれば契約終了となっているが、$f+1 \leq t \leq f+n$ の場合には加入者が死亡していても、遺族年金が確定年金として支給されているので、契約終了とはならない。

(a) 加入者が生存している場合。保険料の払い込みは終わっているので、

$$\begin{aligned} {}_tV &= \ddot{a}_{x+t:\overline{f+n-t|}} + \frac{1}{2}(\ddot{a}_{\overline{f+n-t|}} - \ddot{a}_{x+t:\overline{f+n-t|}}) \\ &= \frac{1}{2}(\ddot{a}_{\overline{f+n-t|}} + \ddot{a}_{x+t:\overline{f+n-t|}}) \end{aligned}$$

となる。

(b) 加入者が死亡している場合。確定年金はあと、$(f+n-t)$ 年分残っているから

$$ {}_tV = \frac{1}{2}\ddot{a}_{\overline{f+n-t|}} $$

となる。

12.4　一時払い保険の責任準備金

x 歳加入、n 年契約、保険金1の養老保険の一時払い保険料 t 年度末の過去法による責任準備金 ${}_tV^1$ とすると

$$ l_{x+t}{}_tV^1 = l_x(1+i)^t A_{x:\overline{n|}} - \left\{ d_x(1+i)^{t-1} + \cdots + d_{x+t-1} \right\} $$

となるので、

$$ {}_tV^1 = \frac{D_x}{D_{x+t}} A_{x:\overline{n|}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} $$

となる。

また、将来法による責任準備金 ${}_tV^2$ で表すと、

$$ {}_tV^2 = A_{x+t:\overline{n-t|}} $$

ここで、${}_tV^1 = A_{x+t:\overline{n-t|}}$ と ${}_tV^2 = A_{x+t:\overline{n-t|}}$ が一致することは

$$
\begin{aligned}
{}_tV^1 - {}_tV^2 &= \frac{Dx}{D_{x+t}} \frac{M_x - M_{x+t} + Dx + n}{D_x} - \frac{M_x - M_{x+t}}{Dx + t} \\
&\quad - \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + Dx + n}{D_{x+t}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となることよりわかる。

参考文献

[1] 黒田耕嗣　生保年金数理 I(改訂版), 培風館, 2007

[2] 黒田耕嗣, 斧田浩二, 松山直樹, アクチャリー数学入門, 日本評論社, 2010

[3] 成川 淳, 生命保険の数学, オーム社, 2011

[4] 藤田岳彦, 大学生の確率・統計, 東京図書, 2010

13　問題の答え

1章（確率の基礎）

問１（１）$\frac{4}{9}$（２）$\frac{1}{3}$（３）$\frac{1}{3}$

問２略

問３略

問４略

問５（１）0.1（２）0.7

問６ 略

問題1.1 ${}_{10}C_9(\frac{1}{6})^9 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5^2}{2^9 \cdot 3^{10}}$

問題1.2（１）$\frac{1}{9}$（２）$\frac{1}{9}$（３）$\frac{5}{81}$（４）$\frac{4}{27}$

問題1.3 $\frac{4n-5}{4(2n-1)}$

問題1.4 略

問７ $\frac{36}{125}$

問８ $\frac{14}{3}$倍

問９（１）独立である（２）独立でない（３）独立でない（４）独立である

問題2.1 $\frac{\frac{1}{2}((\frac{4}{5})^3)}{\frac{1}{2}((\frac{1}{5})^3+(\frac{4}{5})^3)} = \frac{64}{65}$

問題2.2 $\frac{49}{248}$

問題2.3（１）$\frac{19}{500}$（２）$\frac{10}{19}$

問題2.4（１）$P(A|B_i) = {}_{10-i}C_{7-i}(\frac{1}{3})^{7-i}(\frac{2}{3})^3, i = 0, ..., 7$
（２）$\frac{120}{({}_{10}C_7+3{}_9C_6+...+1\cdot 1)}$

問10 略

問11 順に2, $\frac{1}{5}$

問題3.1
（１）$-\frac{10}{3}, \frac{80}{9}$（２）20

問題3.2 順に１枚，６枚，３枚

問題3.3（１）2（２）1, $\frac{1}{3}$（３）$\frac{40}{81}$

問題3.4（１）$\frac{13!}{k!m!(13-m-k)!}(\frac{1}{7})^{k+m}(\frac{5}{7})^{13-k-m}$（２）$k = 1$ および2

問題3.5 略

問12 略

問13 略

問14 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{\sqrt{6}}{2}$

問15 $\frac{3}{2}$, $\frac{\sqrt{105}}{10}$

問16 0.283, 0.0996

問 17 (1) $\frac{(\beta+\alpha)}{2}, \frac{\beta-\alpha}{2\sqrt{3}}$ (2) $0, \frac{\sqrt{5}}{5}$
問 18 (1) $\frac{1}{3}$ (2) 3 (3) 42.96
問 19 (1) 419 (2) 353
問 20 略
問 21 略
問 22 略
問 23 略
問題 4.1 3.2, 1.475
問題 4.2 略
問題 4.3 略
問題 4.4 略
問題 4.5 略
問題 4.6 略
章末問題 [A] 問題１　$7-5(\frac{5}{6})^{n-1}$
問題２（１）${}_nC_k(\frac{1}{2})^n$ （２）0 （３）$\frac{i}{n}$
問題３（１）5, 5 （２）順に $\frac{5}{64}, \frac{8}{64}, \frac{8}{64}, \frac{5}{64}$
[B] 問題４（１）$\frac{3r+2s}{8(r+s)}$ （２）$\frac{3(3r+5s)}{2(r+s)}$ ただし $r=4, s=2$
問題５（１）5 （２）$\frac{67}{12}$ （３）独立でない（４）$\frac{87}{12}$

２章（生保数理）
問題 7 $10v^5+20v^10-3v^7$ 万円
問題 8 (1) $L\ddot{s}_{\overline{n}|}=A$ による。ただし、$\ddot{s}_{\overline{n}|}=(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\cdots+1$。
(2) $(1+i)^n=2$ より、$n \geq \frac{\log 2}{\log(1+i)}$。
(3) 24
問題 9-1 $\frac{1}{6}$
問題 9-2 (1) 順に 30, 10, 10, 10, 20, 20
(2) 順に $\frac{3}{10}v+\frac{1}{10}v^2+\frac{1}{10}v^3$, $\frac{3}{10}v+\frac{1}{10}v^2+\frac{1}{10}v^3+\frac{1}{10}v^4+\frac{2}{10}v^5$, $\frac{3}{10}v+\frac{1}{10}v^2+\frac{1}{10}v^3+\frac{1}{10}v^4+\frac{2}{10}v^5+\frac{2}{10}v^6$。
(3) 順に $\frac{50}{100}v^3=\frac{1}{10}v^3$, $\frac{1}{5}v^5$, 0。
問題 9-3 順に $\frac{70+60v+50v^2}{70}$, $\frac{100+70v+60v^2+50v^3+40v^4+20v^5}{100}$, $\frac{60+50v+40v^2+20v^3}{60}$。