ジャンプ型確率過程とその応用

講義ノート２０１４, 大阪市立大学

目次

第0章　基礎概念

この章ではまず初等的な確率概念と確率分布を復習する。初等確率論の基本的な知識を仮定する。

0.1　復習

試行の結果によってその値が定まる変数を**確率変数**という。測度論の立場では、確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ から実数 $\mathbf{R}$ への可測関数のことを確率変数とよぶ。

確率変数 X のとる値が $x_1, x_2, ...$ であるとき、$X = x_i$ となる確率 $P(X = x_i)$ を p_i と表わす。

確率変数 X がとびとびの値のみをとるとき、X は**離散確率変数**とよび、その分布を**離散確率分布**という。

確率変数 X が特定の値を正の確率でとることがないとき，すなわち，X の値が区間全体に亘り、すべての $x \in \mathbf{R}$ について $P(X = x) = 0$ となるとき、、X は**連続確率変数**とよび、その分布を**連続確率分布**という。

期待値、分散の定義

(1) 離散分布の場合

確率変数 X のとる値が $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ であるとき、

$$m = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i),$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2 P(X = x_i)$$

を、各々X の**分布の平均、分散**という。誤解が生じないときには，たんに X の**平均，分散**という。m を $E[X]$、v を $V(X)$ と書くこともある。また，平均のことを**期待値**ともいう。X のとる値 x_i とその確率 p_i の組 $((x_i, p_i); i = 1, ..., n)$ を**確率分布**という。

（2）連続分布の場合

この場合、$\rho(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1$ を満たす関数 $\rho(x)$ が存在して[1],

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \rho(x)dx$$

と表される。 $\rho(x)$ を **(確率) 密度関数**という。

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)dx,$$

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2\rho(x)dx$$

を，各々 X の **(分布の) 平均，分散**という。m を $E[X]$，v を $V(X)$ と書くこともある。また，平均のことを**期待値**ともいう。密度関数 $\rho(x)$ と X のとる値の範囲 (たとえば (a,b)) の組 $(\rho(x); x \in (a,b))$ を**確率分布**という。

なお，離散分布と連続分布が組み合わさった分布を**混合分布**という。

0.2　測度論的基礎

近代的な確率論は測度論の概念・用語を用いて記述される。確率解析の理論もそうである。基本的に次のような対応がある：

確率論		測度論
全事象	Ω	全体集合
事象	A	可測集合 E
確率	P	$P(\Omega) = 1$ なる測度 P
確率変数	X	可測関数 f
期待値	$E[X]$	積分 $\int f d\mu$

Ω を抽象集合とする。これを標本空間とよぶ。Ω の部分集合の族 $\mathcal{F}$ で次の性質を満たすものを σ-加法族とよぶ。

$$(i)\Omega \in \mathcal{F}$$

[1]実数全体で定義された関数 $f(x)$ に対して $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ は $f(x)$ の広義積分を表す。

$$(ii) A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

$$(iii) A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, ... \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

Ω を定義域とし $\mathbf{R}$ を値域とする関数 $X(\omega)$ が、任意の a, b に対して

$$X^{-1}((a, b]) \in \mathcal{F}$$

を満たすとき、X を**確率変数**という。

Lemma 1 実数値関数 X についてつぎの *3* 条件は同値である。

$$(i) X \text{ は可測関数}$$

$$(ii) \text{ 任意の } a, b (a < b) \text{ に対して } X^{-1}((a, b]) \in \mathcal{F}$$

$$(ii) \text{ 任意の } \mathit{1} \text{ 次元ボレル集合 } B \text{ に対して } X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

この補題により、任意の 1 次元ボレル集合 B に対して $P(X^{-1}(B))$ が定義できる。これを確率変数 X の**確率分布**とよぶ。

確率変数 X の平均 $E[X]$ は X の P による積分

$$E[X] = \int_{\Omega} X(\omega) P(d\omega)$$

として定義する。このルベーグ式積分の定義は、単関数による下からの近似による。

第1章　Poisson過程とLévy過程

Happy families are all alike; every unhappy family is unhappy in its own way.
Lev Tolstoj, Anna Karenina

この章ではPoisson分布とPoisson過程およびPoisson ランダム測度とLévy過程に関する基礎事項について述べる。測度論の知識はある程度既知とする。

1.1　Poisson分布とPoisson過程

1.1.1　確率過程

確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$の上で定義され、連続時間をパラメータとする確率変数の族$(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$を**確率過程**という。ただし、$\mathbf{T}$は時間パラメータの集合である。

以下で標本$\omega \in \Omega$に依存するある主張$A = A(\omega)$を考えるとき、Aが確率1で成立するとは

$P(A) = 1$を満たす適当な事象Λがあって、すべての$\omega \in \Lambda$に対して$A(\omega)$が成立する

という意味である。

$(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$は共通の確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$の上で定義されているので、標本ωを固定すると、時間$t \in \mathbf{T}$を変数とする1つの見本関数

$$t \mapsto X_t(\omega)$$

が定まる。この関数をωの**道**という。ωの道が

すべての$t \in \mathbf{T}$に対して$\lim_{s\to t} X_s(\omega) = X_t(\omega)$

を満たすとき、連続であるといわれる。

Definition 1 確率過程 X_tについて
「$0 \leq s < t \leq u \leq v$　のとき、$X_t - X_s$と $X_v - X_u$は独立」が成り立つとき、$\{X_t\}$ は**加法過程**または**独立増分過程**という。

確率過程 $X = (X_t)$ は次の性質をみたすとき**ブラウン運動**という。
(1) 加法過程であり、増分 $X_t - X_s$ の分布は $t - s$ のみに依存する
(2)　X_t の分布は、平均 0 分散 t の正規分布である
(3)　ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対し、その道は連続である

1.1.2　ポアソン過程

見本 X を固定して時間の関数 $t \mapsto X_t$ を記録したものを**計数過程**という。X のとる値が非負整数の場合には**件数過程**ともいう。たとえば、店への顧客の訪問数がこれにあたる。

Definition 2　λを正の実数とするとき、件数過程 $\{N_t\}$ が次の (1) ～ (3) を満たすとき、$\{N_t\}$ を**パラメータλのポアソン過程**という。あるいは、$\{N_t\}$　はパラメータがλのポアソン過程に従うという。また､λは起こりやすさを表す指標であり､**強度**という。
(1) $0 \leq s < t \leq u < v, N_t - N_s$と $N_v - N_u$は独立
(2) $P(N_{t+dt} - N_t = 1) = \lambda dt$
(3) $P(N_{t+dt} - N_t \geq 2) = 0$
　$(P(N_{t+dt} - N_t = 0) = 1 - \lambda dt)$

条件 (2) はつまり $P(N_{t+dt} - N_t = 1) = \lambda h + o(h)$ ということであり、

$$\lim_{h \to 0+} \frac{P(N_{t+h} - N_t = 1)}{h} = \lambda$$

と言ってもよい。(3) はつまり $P(N_{t+h} - N_t = 2) = o(h)$　$P(N_{t+h} - N_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$, ただし $o(h)$ はランダウの記号, ということであり

$$\lim_{h \to 0+} \frac{P(N_{t+h} - N_t \geq 2)}{h} = 0$$

と言ってもよい。

つまり、ポアソン過程とは過去や未来とは独立に（定義の (1)）、常に一定の起こりやすさで生起し（定義の (2)）、同時に２件は生じない（定義の (3)）事柄の件数過程のことである。

ポアソン過程の場合、見本 X を固定して時間の関数 $t \mapsto X_t$ を記録したものを**計数過程**または**件数過程**という。たとえば、店への顧客の訪問数がこれにあたる。

Theorem 1 $\{N_t\}$が、パラメータがλのポアソン過程であるとき、$t > 0$について、N_tはパラメータがλtのポアソン分布 $Po(\lambda t)$ に従う。

Proof. 時間 t を m 分割する。m を十分大きくすると、$\frac{t}{m}$ は短いので、$\frac{t}{m} = dt$ とみなせる。すると、各区間は事柄が生じる件数はせいぜい１件または０件であり、それぞれの確率は他の区間 N_t がパラメータ $m, \dfrac{\lambda t}{m}$ の二項分布に従うことが分かる $(N_t \sim Bin(m, \frac{\lambda t}{m})$ と表す) また、実際には $dt = \frac{t}{m} \to 0$ すなわち $m \to \infty$ なので、$P(N_t = n) = P(\sum_{k=1}^{m}(N_{\frac{k}{m}t} = n))$

$$= \Pi_{k=1}^{m} P(N_{\frac{k}{m}t}) = \lim_{m\to\infty} {}_mC_n(\frac{\lambda t}{m})^n(1 - \frac{\lambda t}{m})^{m-n}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{m!}{(m-n)!n!}(1 - \frac{\lambda t}{m})^{-n}(1 - \frac{\lambda t}{m})^m \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

q.e.d.

Theorem 2 件数過程 $\{N_t\}$ について
(1) 加法過程
(2) $0 \le s < t$ のとき $N_t - N_s \sim Po(\lambda(t-s))$
(1),(2) が成り立つとき、$\{N_t\}$ はパラメータ λ のポアソン過程である。

Proof. (2) より
$$\begin{aligned}P(N_{t+h}-N_t=1) &= e^{-ih}\lambda h\\ &= (1-h\lambda+o(h))\lambda h\\ &= \lambda h+o(h)\\ P(N_{t+h}-N_t\geq 2) &= 1-P(N_{t+h}-N_t=1)-P(N_{t+h}-N_t=0)\\ &= 1-e^{-\lambda h}\lambda h-e^{-\lambda h}\\ &= 1-(1+\lambda h)(1-\lambda h+o(h))=o(h)\end{aligned}$$
これらのことから、ポアソン過程である。q.e.d.

Definition 3 ある出来事の生起間隔 $D_1, D_2, \cdots$ が互いに独立なら、その出来事の件数過程 $\{N_t\}$ のことを**再生過程**という。

Theorem 3 ある出来事の生起間隔 $D_1, D_2, \cdots$ が互いに独立に同一の指数分布に従うなら、その出来事に再生過程 $\{N_t\}$ はポアソン過程である。

Prrof. 時刻 t からはじめた生起間隔を $D_{t_1}, D_{t_2}, \ldots$ とすると、指数分布の無記憶性から D_{t_1} は t 以前の生起間隔とは独立に D_1 と同一の分布に従い、$D_1, D_2, \ldots$ の独立性から $D_{t_2}, D_{t_3}, \ldots$ も t 以前の生起間隔および D_{t_1} とは独立に同意いつの分布に従う。
つまり、斉次である加法過程を意味する。
また、斉次性より
$P(N_{t+h}-N_t\geq 2)=P(N_h-N_0\geq 2)$
また、$D_1, D_2, \ldots$ の従う指数分布を $\exp(\lambda)$ とすると、
$$\begin{aligned}P(N_h-N_0\geq 2) &= P(D_1+D_2\leq h)\\ D_1+D_2\sim\Gamma(2,\lambda)\text{ より} \quad &= \int_0^h \lambda e^{-\lambda s}\lambda s ds\\ &= -[\lambda s e^{-\lambda s}]_0^h+\int_0^h \lambda e^{-\lambda s}ds\\ &= -\lambda h e^{-\lambda h}-[e^{-\lambda s}]_0^h\\ e^{-\lambda h}=1-\lambda h+o(h)\text{ より} \quad &= 1-e^{-\lambda h}(\lambda h+1)\\ &= 1-(1-\lambda h+o(h))(\lambda h+1)\\ &= o(h)\end{aligned}$$
以上よりポアソン過程の定義 (1) $\sim$ (3) を満たすのでポアソン過程である。q.e.d.

Theorem 4 単位時間当たりの発生件数の期待値が同一である斉次な加法過程のうち、単位時間当たりの発生件数の分散が最小なのはポアソン過程である。

Proof. 斉時な加法過程であれば、単位時間あたりの発生件数の期待値はある正の定数となるので、その値を λ とする、すなわち、件数過程を $\{N_t\}$ とすれば、
$\lambda = \lim_{h\to 0+} \frac{E(N_{t+h} - N_t)}{h}$
また、$n = 1, 2, \cdots$ について
$\lambda_n = \lim_{h\to 0+} \frac{P(N_{t+h} - N_t = n)}{h}$ とすると
$\lambda = \lim_{h\to 0} \frac{P(N_{t+h} - N_t)}{h} = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda_n$ と表せる

$$\begin{aligned}
(\text{単位時間当たりの発生件数の分散}) &= \lim_{h\to 0+} \frac{V(N_{t+h} - N_t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0+} \left(\frac{E((N_{t+h} - N_t)^2)}{h} - \frac{E(N_{t+h} - N_t)^2}{h}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^2\lambda_n - 0 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^2\lambda_n
\end{aligned}$$

この条件で最小にするには
$\lambda_1 = \lambda, \lambda_n = 0 (n = 2, 3, \cdots)$
すなわち
$\lim_{h\to 0+} \frac{P(N_{t+h} - N_t = 1)}{h} = \lambda, \lim_{h\to 0} \frac{P(N_{t+h} - N_t \geq 2)}{h} = 0$
ポアソン過程の定義に含まれる。q.e.d.

1.1.3 複合ポアソン過程

以下 $X_1, X_2 \ldots$ は、互いに独立な同一の分布に従う確率変数の列であるとする。これらの確率変数は同一の分布に従うので、便宜のため、それらの確率変数を代表する確率変数を X と表す。N は $X_1, X_2, \ldots$ とは独立であり、取りうる値の範囲がが自然数である確率変数である。S は次のように定義される確率変数である。

Definition 4

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_N & (N > 0) \\ 0 & (N = 0) \end{cases} \tag{1.1}$$

複合分布の特性値を求めるにあたっては、次の三つの公式が基本となる。

Theorem 5 複合分布の基本的性質

(1)$E(S) = E(N)E(X)$

(2)$V(S) = E(N)V(X) + V(N)E(X)^2$

(3)$M_S(t) = G_N(M_X(t)) = M_N(\log M_X(t)) = M_N(C_X(t))$

Proof.

(1)

$$
\begin{aligned}
E(S) &= E(E(S|N)) \\
E(S|N=n) &= E(X_1 + \cdots + X_n) \\
&= E(nX) \\
&= nE(X) \text{ より} \\
E(S|N) &= NE(X) \text{ となる。}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
V(S) &= V(E(S|N)) + E(V(S|N)) \\
V(S|N=n) &= nV(X) \text{ より} \\
V(S|N) &= NV(X) \\
V(E(S|N)) + E(V(S|N)) &= V(NE((X))) + E(NV(X)) \\
&= E^2(X)V(N) + V(X)E(N)
\end{aligned}
$$

(3)

$M_S(t) = E(e^{ts}) = E(E(e^{ts}|N))$

$E(e^{ts}|N=n) = E(e^{tx})^n$ より

$E(e^{ts}|N) = E(e^{tx})^N$

よって

$E(E(e^{tx})^N) = E(M_X(t)^N) = G_N(M_X(t))$

また、

$$
\begin{aligned}
E(M_X(t)^N) &= E(exp\{N \log M_X(t)\}) \\
&= M_N(\log M_X(t)) \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}
$$

Definition 5 N がポアソン分布にしたがうとき、S を**複合ポアソン分布**という。N_t がポアソン過程のとき、S_t を**複合ポアソン過程**という。

Proposition 1 複合ポアソン分布の特性値

(1) 平均 $E(S) = \lambda E(X)$

(2) 分散 $V(S) = \lambda E(X^2)$

Proof.

$$
\begin{aligned}
M_S(t) &= M_N(\log M_X(t)) \\
&= \exp\{\lambda(e^{\log M_X(t)} - 1)\} \\
&= \exp\{\lambda(M_X(t) - 1)\}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
C_S(t) &= \log M_S(t) \\
&= \lambda(M_X(t) - 1) \text{ から}
\end{aligned}
$$

k 次の $t = 0$ のキュムラントは

$$
\begin{aligned}
C_S^{(k)}(0) &= \lambda M_X^{(k)}(0) \\
&= \lambda E(X^k)
\end{aligned}
$$

(1)
平均は 1 次のキュムラントより

$$E(S) = \lambda E(X)$$

(2)
分散は 2 次のキュムラントより

$$V(S) = \lambda E(X^2) \quad \text{q.e.d.}$$

1.1.4 Poisson ランダム測度と Lévy 過程

この章では Poisson ランダム測度と Lévy 過程に関する基礎事項を振り返る。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする。ここで Ω は $\mathbf{T} = [0, T]$ 上定義された軌跡の集合である。ここで $T \leq \infty$ であり、$T = +\infty$ の場合には $\mathbf{T} = [0, +\infty)$ とする。多くの場合 T は有限として扱う。

$(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbf{T}}$ は $\mathcal{F}$ の sub-σ-fields の増大する族である。これを**フィルトレーション**という。 ここで $\mathcal{F}_t$ は、右連続かつ、各軌跡 $s \mapsto \omega(s)$ が時刻 t までは可測となるような最小の σ-field である。

Definition 6 $\mathbf{T}$ 上の *Lévy* 過程 $(z(t))_{t \in \mathbf{T}}$ とは Ω 上の m 次元確率過程で次の *(1)–(5)* を満たすもののことである。

(1) $z(0) = 0$ $a.s.$[1]

(2) $z(t)$ は独立増分をもつ *(*つまり $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n, t_i \in \mathbf{T},$ に対し確率変数 $z(t_i) - z(t_{i-1})$ 達は独立*)*

(3) $z(t)$ は定常増分をもつ *(*つまり $z(t+h) - z(t)$ は h によるが、t によらない*)*

[1] ここで a.s. は ‘almost surely’(ほとんど確実に) の意味である。

(4) $z(t)$ は確率連続 *(*つまり任意の $t \in \mathbf{T} \setminus \{0\}$ と任意の $\epsilon > 0$ に対し $P(|z(t+h) - z(t)| > \epsilon) \to 0$ *as* $h \to 0$*)*

(5) $z(t)$ は *càdlàg* な軌跡をもつ *(càdlàg : right continuous on* $\mathbf{T}$ *with left limits on* $\mathbf{T} \setminus \{0\}$*)*

ここで $m \geq 1$ とする。$m = 1$ の場合には $z(t)$ は実数値過程である。

本講では主にジャンプ過程を扱う。時刻 t での増分を

$$\Delta z(t) = z(t) - z(t-).$$

とする。以下では $X_t, M_t, x_t, ...$ 等にも同じ記法 Δ を用いる。

$z(t)$ に対し計数過程 N を次のように導入する：

$A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ に対し

$$N(t, A) = \sum_{0 \leq s \leq t} 1_A(\Delta z(s)),\ t > 0.$$

とおく。これは時刻 t までの $z(.)$ の A へのジャンプ回数をはかる計数過程である。Lévy 過程 z の軌跡は càdlàg であるから、$\bar{A} \subset \mathbf{R}^m \setminus \{0\}$ であるような $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ に対し $N(t, A) < +\infty$ a.s. である。

$$N((a, b] \times A) = N(b, A) - N(a, A),$$

により $\mathbf{T} \times (\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ 上のランダム測度が定義できる。ここで $a \leq b$。このランダム測度 N が平均 $E[N((a, b] \times A)]$ をもつ Poisson 分布にしたがい、かつ、互いに素な $(a_1, b_1] \times A_1, ..., (a_r, b_r] \times A_r \in \mathcal{B}(\mathbf{T} \times (\mathbf{R}^m \setminus \{0\}))$ に対して $N((a_1, b_1] \times A_1), ..., N((a_r, b_r] \times A_r)$ が独立であるとき、**Poisson ランダム測度**という。

Proposition 2 *(Lévy-Itô decomposition theorem, [25] Theorem I.42)* $z(t)$ を *Lévy* 過程とする。$z(t)$ は以下の表現をもつ。

$$z(t) = tc + \sigma W(t) + \int_0^t \int_{|z|<1} z\tilde{N}(dsdz) + \int_0^t \int_{|z|\geq 1} zN(dsdz),$$

for a.e. ω *for all* $t \in \mathbf{T}$*.*

ここで $c \in \mathbf{R}^m$, σ は $m \times m$ 行列である。$(W(t))_{t \in \mathbf{T}}, W(0) = 0$ は m 次元 *(*標準*)Wiener* 過程、$N(dtdz)$ は平均測度 $\hat{N}(dtdz) = E[N(dtdz)]$ をもつ *Poisson* ランダム測度であり、$\tilde{N}(dtdz) = N(dtdz) - \hat{N}(dtdz)$ である。ここで $W(t)$ と $t \mapsto (\int_0^t \int_{|z|<1} z\tilde{N}(dsdz) + \int_0^t \int_{|z|\geq 1} zN(dsdz))$ は独立であり、さらに表現は一意的である。

ここで $\int_0^t \int zN(dsdz)$ と $\int_0^t \int z\tilde{N}(dsdz)$ は確率積分の意味である。その正確な定義については後で述べる。

Poisson ランダム測度を使って

$$\mu(A) = E[N(1, A)],\ A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m \setminus \{0\}) \tag{1.1}$$

とおく。これは **Lévy 測度**とよばれる。測度 μ は次を満たす。

$$\int_{\mathbf{R}^m \setminus \{0\}} (1 \wedge |z|^2)\mu(dz) < +\infty. \tag{1.2}$$

N に対応する**補償つき Poisson ランダム測度**を

$$\tilde{N}(dtdz) = N(dtdz) - dt\mu(dz).$$

により定義する。

とくに、もし $\mu(dz)$ が

$$\int_{|z| \geq 1} |z|\mu(dz) < +\infty,$$

を満たせば $z(t)$ は次のように書ける：

$$z(t) = tc' + \sigma W(t) + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^m \setminus \{0\}} z\tilde{N}(dsdz),$$

where $c' = c + \int_{|z| \geq 1} z\mu(dz)$.

$\mathbf{R}^m \setminus \{0\}$ 上の測度 μ は (1.2) を満たすとき、そしてそのときに限り、ある Lévy 過程の Lévy 測度になる。実際次の **Lévy-Khintchine** 表現がなりたつ。

Proposition 3 *(1)* z を $\mathbf{R}^m \setminus \{0\}$ 上の *Lévy* 過程とする。このとき

$$E[e^{i(\xi, z(t))}] = e^{t\Psi(\xi)},\ \xi \in \mathbf{R}^m, \tag{1.3}$$

where

$$\Psi(\xi) = i(c, \xi) - \frac{1}{2}(\xi, \sigma\sigma^T\xi) + \int (e^{i(\xi, z)} - 1 - i(\xi, z)1_{\{|z|<1\}})\mu(dz). \tag{1.4}$$

ここで $c \in \mathbf{R}^m$, $\sigma\sigma^T$ は非負行列であり、μ は *(1.2)* を満たす測度である。

(2) $c \in \mathbf{R}^m$, 行列 $\sigma\sigma^T \geq 0$ および *(1.2)* を満たす $\mathcal{B}(\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ 上の σ-*finite* 測度 μ に対して、*(1.3), (1.4)* を満たす確率過程 z が存在する。この z は *Lévy* 過程である。

証明は [27] Theorem 8.1、および [8] Sect. 0 を参照せよ。

$D_p = \{t \in \mathbf{T}; \Delta z(t) \neq 0\}$ とおく。これは a.s. に $\mathbf{T}$ の可算部分集合である。 $A \subset \mathbf{R}^m \setminus \{0\}$ とする。$\mu(A) < +\infty$ のとき、$D_p \ni t \mapsto \sum_{s \leq t, \Delta z(s) \in A} \delta_{(s,\Delta z(s))}$ により定義される測度は **Poisson 計数測度**という。関数 $D_p \ni t \mapsto p(t) = \Delta z(t)$ は **Poisson 点過程**という。

1.1.5 Lévy 過程の例

(1) Poisson 過程

強度 $\lambda > 0$ をもつ Poisson 過程とは $[0, +\infty)$ 上の非負整数値過程で次を満たすものである：

(i) $N_0 = 0, \Delta N_t = N_t - N_{t-}$ は 0 か 1

(ii) $s < t$ に対し $N_t - N_s$ は $\mathcal{F}_s$ と独立。

(iii) すべての t_1, t_2 とすべての $s > 0$ に対し、$N_{t_1+s} - N_{t_1}$ は $N_{t_2+s} - N_{t_2}$ と同分布。

(iv)

$$P(N_t = k) = \frac{1}{k!}(\lambda t)^k e^{-\lambda t}, k = 0, 1, 2, ...$$

実際には (iv) は (i)–(iii) からしたがう (cf. [25] Theorem I.23)。Poisson 過程の Lévy 測度は $\lambda\delta_{\{1\}}$ であり、$b = 0, \sigma = 0$ である。

(2) 複合 Poisson 過程

複合 Poisson 過程 $Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$ は、$(Y_k), k = 1, 2, ...$ は共通の有限分布 μ をもつ i.i.d. 確率変数とし、N_t は (Y_k) と独立な、強度 $\lambda > 0$ をもつ Poisson 過程とする。このとき $Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$ と表される確率過程を複合 Poisson 過程という。Y_t は次の表現をもつ：

$$Y_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^m \setminus \{0\}} z \ N(dsdz),$$

ここで $N(dsdz)$ は平均測度 $\lambda ds\mu(dz)$ をもつ $\mathbf{T} \times (\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ 上の Poisson ランダム測度である。

(3) Stable 過程

Lévy 測度 μ が

$$\mu(dz) = c_\alpha \frac{dz}{|z|^{m+\alpha}},$$

で与えられる Lévy 過程を**対称安定過程**という。ここで $\alpha \in (0, 2)$ である。

μ が、 S^{m-1} 上の関数 $a(.) \geq 0$ により

$$\mu(dz) = c'_\alpha a(\frac{z}{|z|})\frac{dz}{|z|^{m+\alpha}},$$

で与えられる場合には、この過程は**非対称安定過程**という。$m=1$ の場合には μ は次の形になる

$$\mu(dz) = (c_- 1_{\{z<0\}} + c_+ 1_{\{z>0\}})\frac{dz}{|z|^{1+\alpha}},$$

where $c_- \geq 0, c_+ \geq 0$.

(4) Wiener 過程

(1.4) の表現において $c = 0, \sigma\sigma^T = I, \mu \equiv 0$ となるものを (標準)Wiener 過程 (Brown 運動) という。

Wiener 過程 (Brown 運動)$W(t)$(で $W(0) = 0$ を満たすもの) は定義 6 を満たす連続 Lévy 過程である。

Wiener 過程は次のスケーリング性をもつ：$c^{-\frac{1}{2}}W(ct)$ は $W(t)$ と同分布 for all $c > 0$。

1.1.6 伊藤の公式

この節では Lévy 過程に対する伊藤の公式を述べる。

Proposition 4 *([19] Theorems 9.4, 9.5)*

(1) $X(t)$ を次で与えられる実数値過程とする：

$$X(t) = x + tc + \sigma W(t) + \int_0^t \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} \gamma(z)\tilde{N}(dsdz),\ t \geq 0$$

ここで $\gamma(z)$ は $\int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} \gamma(z)^2\mu(dz) < \infty$ なる関数である。$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を $C^2(\mathbf{R})$ 関数とし、

$$Y(t) = f(X(t))$$

とおく。このとき実数値過程 $Y(t), t \geq 0$ は次を満たす：

$$dY(t) = \frac{df}{dx}(X(t))cdt + \frac{df}{dx}(X(t))\sigma dW(t) + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(X(t))\sigma^2 dt$$

$$+ \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} [f(X(t) + \gamma(z)) - f(X(t)) - \frac{df}{dx}(X(t))\gamma(z)]\mu(dz)dt$$

$$+\int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}}[f(X(t-)+\gamma(z))-f(X(t-))]\tilde{N}(dtdz).$$

(2) $X(t)=(X^1(t),...,X^d(t))$ を次で与えられる d 次元過程とする：

$$X(t)=x+tc+\sigma W(t)+\int_0^t\int\gamma(z)\tilde{N}(dsdz),\ t\geq 0.$$

ここで $c\in\mathbf{R}^d$, σ は $d\times m$ 行列、 $\gamma(z)=[\gamma_{ij}(z)]$ は $d\times m$ 行列値関数で上の確率積分が存在するもの、$W(t)=(W^1(t),...,W^d(t))^T$ は m 次元標準 *Wiener* 過程とし、

$$\tilde{N}(dtdz)=(N_1(dtdz_1)-1_{\{|z_1|<1\}}\mu(dz_1)dt,...,N_m(dtdz_m)-1_{\{|z_m|<1\}}\mu(dz_m)dt)$$

とする。ここで N_j は独立な *Poisson* ランダム測度で *Lévy* 測度 $\mu_j, j=1,...,m$ をもつものである。つまり、$X^i(t)$ は次で与えられる：

$$X^i(t)=x_i+tc_i+\sum_{j=1}^m\sigma_{ij}W_j(t)+\sum_{j=1}^m\int_0^t\int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}}\gamma_{ij}(z)\tilde{N}_j(dsdz_j), i=1,...,d.$$

$f:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ を $C^2(\mathbf{R}^d)$ 関数とし、

$$Y(t)=f(X(t))$$

とおく。このとき $Y(t), t\geq 0$ は実数値確率過程であり、次を満たす：

$$dY(t)=\sum_{i=1}^d\frac{\partial f}{\partial x_i}(X(t))c_idt+\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^m\frac{\partial f}{\partial x_i}(X(t))\sigma_{ij}dW_j(t)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X(t))(\sigma\sigma^T)_{ij}dt$$

$$+\sum_{j=1}^m\int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}}[f(X(t)+\gamma^j(z_j))-f(X(t))-\sum_{i=1}^d\frac{\partial f}{\partial x_i}(X(t))\gamma_{ij}(z)]\mu_j(dz_j)dt$$

$$+\sum_{j=1}^m\int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}}[f(X(t-)+\gamma^j(z))-f(X(t-))]\tilde{N}_j(dtdz_j).$$

ここで γ^j は $\gamma=[\gamma_{ij}]$ の第 j 成分を表す。

上の命題における、 $dW(t)$ および $\tilde{N}(dtdz)$ に関する確率積分の正確な定義は後で述べる。

例 (1) $b=0, \gamma(z)=0, \sigma=1$ そして $f(x)=x^2$ とする。このとき伊藤の公式より

$$df(W(t)) = 2W(t)dW(t) + \frac{1}{2}2dt = 2W(t)dW(t) + dt.$$

よって

$$df(W(t)) - dt = 2W(t)d(t)$$

であり

$$\int_{\mathbf{T}} W(t)dW_t = \frac{1}{2}(W(T)^2 - T)$$

(2) $b=0, \gamma(z)=z, \sigma=0$ そして $f(x)=x^2$ とする。 つまり $X(t) = z(t) = \int_0^t \int z\tilde{N}(dsdz)$。このとき伊藤の公式より

$$\begin{aligned} df(z(t)) = &\int \{(z(t)+z)^2 - z(t)^2 - 2zz(t)\}\mu(dz)dt \\ &+ \int \{(z(t-)+z)^2 - z(t-)^2\}\tilde{N}(dtdz) \\ = &\int z^2\mu(dz)dt + \int (2z(t-)+z)z\tilde{N}(dtdz) \end{aligned}$$

したがって

$$z(t)^2 = T\int z^2\mu(dz) + \int_0^t \int (2z(t-)+z)z\tilde{N}(dtdz).$$

空間 D

$\mathbf{T}=[0,T],\ T<+\infty$ とおく。$\mathbf{T}$ 上で定義され $\mathbf{R}^m$- または or $\mathbf{R}^d$-値をとり、$[0,T)$ 上右連続で左極限をもつ (càdlàg paths) 関数の全体を $\mathrm{D}=D(\mathbf{T})$ とかく。$D(\mathbf{T})$ 上につぎのように与えられる Skorohod 距離 d_T を使って位相を導入する。d_T を

$$d_{\mathbf{T}}(f,g) = \inf_{\tau}\{|f(t) - g(\tau(t))| + |\tau(t) - t|\}$$

とおく。ここで τ は $\mathbf{T}$ から $\mathbf{T}$ への狭義増加連続関数で、$\tau(0)=0, \tau(T)=T$ となるものである。位相空間 $(D(\mathbf{T}), d_{\mathbf{T}})$ は **Skorohod 空間**とよばれ

る。空間 $(D(\mathbf{T}), d_{\mathbf{T}})$ は可分であり、同値な距離 $d^{\circ}_{\mathbf{T}}$ を導入することにより完備となる (see [2] Sect. 12)。

$D([0,+\infty))$ を $[0,+\infty)$ 上の càdlàg 関数全体を表す。この空間は次の距離 d により Fréchet 空間となり、

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(1 \wedge d^{\circ}_{[0,n]}(f,g)),$$

位相空間 $(D([0,+\infty)), d)$ は完備かつ可分である。

もし sup-ノルム

$$d^{\infty}(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(1 \wedge \sup_{s\in[0,n]} |f(s)-g(s)|),$$

を導入すれば、空間 $(D([0,+\infty)), d^{\infty})$ は完備であるが、可分にはならない。

1.2 余談（コラム）: 確率とは何か

古典的な確率の定義 (ラプラス) では,「N 個の場合の確からしさの同等性」を根拠にして確率を決めている。

では,「同等に確からしい」とは何か。つまり，扱っている対象の何と何を同一視し，何と何を区別すればよいか。そして，いかにして「どれが起こることも同程度に期待できる」と考えうるのか。

問 1 次の確率計算は実験にあうか。

（1）明日の天気は，雨が降るか（A），降らないか（A^c）のどちらかである。よって，$P(A) = 1/2$。

よって，$P(A) = 1/2$。

（2）植物（たとえばひな菊）の花びらを使った恋占いでは，結論となる事象には「愛してる」と「愛してない」の 2 つがあり，花びらの数の奇数・偶数に「愛してる」と「愛してない」を対応させる。偶数と奇数は交互に並んでいるから，これはこれら 2 つの事象が同等に確からしいことを（暗黙のうちに）仮定していることになる。この仮定は妥当か。

じつは，それは先験的には知りえない。「同等に確からしい」事象は,実験に合うように設定するものなのである。

例 1 N 個の箱に r 個の玉を入れる問題

＜仮定 I＞　1 つの玉がどの箱に入るかは同等に確からしく、各々$1/N$ である。

次のように書いても同じ：

＜仮定 I'＞　いろいろな玉の入れ方は全部で N^r 通りあるから、これらの書く場合を同等に確からしいと仮定して、各々$1/N^r$ とする。

これは重複順列 ${}_N\Pi_r = N^r$ 個の場合をすべて同等とみなす立場。

この仮定は，箱を空間の小領域、玉を気体の分子と見たときに,「マックスウエル-ボルツマンの統計」とよばれる。しかし、この統計（確率の決め方）では実験にあわなかった（黒体輻射の実験を説明できない）。

＜仮定 II＞　玉は区別がつかない。

区別がつくのは、どの箱に何個づつ玉が入っているか、という様相のみである。したがって、重複組み合わせ（異なる N 種類のものから重複を許して r 個とる組み合わせ）${}_NH_r = {}_{N+r-1}C_r$ 個の場合をすべて同等とみなす立場。言い換えると、

＜仮定 II'＞　玉の盛り分け方は全部で ${}_NH_r$ 通りあり、それらをすべて同等とする。

問 2　例えば、$N = 3, r = 2$ ならば、${}_3H_2 = 6$。これら 6 通りをすべて書き出せ。

この仮定は,「ボーズ-アインシュタインの統計」とよばれる（光子 (ボーズ粒子）を取り扱うときに用いられる)。この場合実験に当う。

さらに、次の仮定を考える。

＜仮定 III＞　1 つの箱に玉は 1 つしか入らない

とする。この場合には重複を許さない組み合わせ ${}_NC_r$ 通りの場合がある。言い換えると、

＜仮定 III'＞　玉の盛り分け方は全部で ${}_NC_r$ 通りあり、それらをすべて同等とする。

この仮定は、電子や陽子（フェルミ粒子）を取り扱うときに用いられ,「フェルミ-ディラクの統計」とよばれる（この場合実験に当てはまる)。(物理では＜仮定 III＞は,「パウリの排他原理」（異なる粒子は同時に同一状態を取ることはない）に対応する。)

問 3　$N = 4, r = 3$ とする。仮定 I – III のもとで同等に確からしい場合を、各々すべて書き出せ。

上の仮定 II, III を現実離れしたものと思ってはいけない。

ある種の色盲の人は赤と緑の区別がつかない。青，赤，緑の 3 種類のランプ（発光ダイオード）を暗闇で等頻度で発光させるとする。この色盲の人には，赤のランプと緑のランプは区別がつかず，事象 $A =$「青が発光する」，事象 $B =$「赤（= 緑）が発光する」，の 2 つの事象に対して，$P(A \cup B) = 1, P(A) = 1/3, P(B) = 2/3$ と感じるであろう。

また，モンシロチョウは紫外線が見えるが，ヒトには紫外線が見えない。紫外線の発光によってある事象 A の発生が伝えられたとき，モンシロチョウには $P(A) > 0$ だとしても，ヒトには $P(A) = 0$ でなければ正しい確率と思われない（ヒトの目から見た実験に合わない）。

このように，何をもって「同等に確からしい」とするかは先見的には決まらない。確率は，光や熱のように物理量として実在するものではなく，我々の脳の中で「実験に合うように」設定されるものなのである。

第2章　ジャンプ型SDE

Let me have men about me that are fat; Sleek-headed men and such as sleep o' nights: Yond Cassius has a lean and hungry look; He thinks too much: such men are dangerous. W. Shakespeare, Julius Caesar, Act 1, Scene 2

この章ではジャンプのついた確率微分方程式 (SDE) について述べる。マルチンゲールおよびセミマルチンゲールの定義から始めて確率積分に至る。

2.1　マルチンゲールとセミマルチンゲール

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする。フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbf{T}}$ は次の (i), (ii) を満たすとき *usual condition* (通常の条件) をみたすという： (i) $\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{F}$ の零集合を含む (ii) 右連続である。以下では the usual condition を満たすフィルトレーションをもつ確率空間を考察する。

確率過程 $(X_t)_{t\in\mathbf{T}}$ は、任意の t について X_t が $\mathcal{F}_t$-可測であるとき **適合している** (*adapted*) という。関数 $X_. : [0,t]\times\Omega$ が任意の $t \geq 0$ について $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$-可測であるとき**プログレッシブに可測** (発展的可測) という。

càdlàg な軌跡をもつ適合過程 M_t は次をみたすとき**マルチンゲール**という：

$$(1)\ M_t \in L^1(P),\ t\in\mathbf{T} \tag{2.1}$$

$$(2)\ もし\ s\leq t\ ならば\ E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s, a.s.,\quad s,t\in\mathbf{T}. \tag{2.2}$$

ここで (2) の代わりに

$$もし\ s\leq t\ ならば\ E[M_t|\mathcal{F}_s] \geq M_s, a.s.,\quad s,t\in\mathbf{T},$$

がなりたつときには、X_t は **劣マルチンゲール**という。また、(2) の代わりに

$$もし\ s\leq t\ ならば\ E[M_t|\mathcal{F}_s] \leq M_s, a.s.,\quad s,t\in\mathbf{T},$$

がなりたつときには、X_t は **優マルチンゲール**という。

確率変数 $\mathrm{T} : \Omega \to [0, +\infty]$ は、 任意の $t \in \mathbf{T}$ について $\{\mathrm{T} \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ となるとき、 **停止時刻**という。停止時刻の全体を $\mathcal{T}$ とかく。

$0 = \mathrm{T}_0 \leq \mathrm{T}_1 \leq ... \leq \mathrm{T}_n \leq ...$ を停止時刻の列で $\mathrm{T}_n \to +\infty$ $a.s$ となるものとする。適合過程 M_t で、上のようなある停止時刻の列があって、任意の n について $M_{t \wedge \mathrm{T_n}}$ がマルチンゲールになるものを、**局所マルチンゲール**という。

マルチンゲールは局所マルチンゲールである。これは Doob の optimal sampling theorem による。

確率過程 X_t は、局所マルチンゲール M_t と、有界変動で càdlàg な適合過程 A_t を使って

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

とかけるとき、**セミマルチンゲール**という。マルチンゲールはセミマルチンゲールである。

1 次元 (標準)Poisson 過程 N_t はセミマルチンゲールである。じっさい

$$N_t = \tilde{N}_t + t,$$

とかける。ここで $\tilde{N}_t = N_t - t$ は局所マルチンゲール (実際はマルチンゲール) である。

ジャンプ型の Lévy 過程 $z(t)$ について、もし $\int |z|\mu(dz) < +\infty$ ならば補償つき Lévy 過程 $\tilde{z}(t) = z(t) - \int_0^t ds \int z\mu(dz)$ は局所マルチンゲールである。

2.1.1　セミマルチンゲールに関する確率積分

セミマルチンゲール X_t についての上の分解を使って、有界かつ (局所的に) 可予測過程 $h(u)$ に関する確率 (伊藤) 積分を

$$\int_s^t h(u)dX_u = \int_s^t h(s)dM_u + \int_s^t h(s)dA_u \tag{2.3}$$

により定義する。

確率過程 $h(u)$ は、 $\Omega \times \mathbf{R}_+$ 上の σ-field $\mathcal{P}$ に関し可測であるとき**可予測**という。ここで $\mathcal{P}$ は、左連続かつ右極限をもつ適合過程から生成される σ-field を表す。

$t \mapsto A_t$ は有界変動過程であるから、右辺第 2 項は通常の積分として定義できる。積分 $\int_s^t h(s)dM_u$ を以下のように定義する。

時間の列を $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ とする。単純過程 $h(t)$ とは

$$h(t) = h_0 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} h_i 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t),$$

と表わされるものである。ここで h_i は $\mathcal{F}_{t_i}$-可測かつ $|h_i| < +\infty$ a.s. となるものである。$\mathbf{S}$ で単純過程の全体を表す。位相は (t, ω) に関する一様収束の位相である。

単純過程 $h \in \mathbf{S}$ の、 càdlàg 軌跡をもつマルチンゲール M に関する確率積分 $I(h)$ を次で定義する：

$$I(h) = h(0)M_0 + \sum_{i=0}^{n} h_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$$

$I(h)$ を **h の M に関する確率積分**という。

$I(h)$ は次の性質をもつ。

(1) もし $M_t = W(t)$ (Brown 運動) ないし $M_t = \tilde{N}_t$ (補償つき Poisson 過程) ならば、 $I(h)(t)$ はマルチンゲールである。すなわち、

$$E[I(h)(t)|\mathcal{F}_s] = I(h)(s), s \leq t$$

(2) $I^2(h)(t) - \int_0^t h^2(s)d[M]_s$ はマルチンゲールである。
(3) $E[I^2(h)(t)] = E[\int_0^t h^2(s)d[M]_s]$

ここで $[M]$ は M の **2 次変分**を表す (2 次変分については [25]Section II.6 を参照)。性質 (1) については [24] Proposition 2.5.7 を見よ。

性質 (1) は後で述べる「可予測表現性」(定理 6) に関連している。つまり、$dM_t = \phi(t)dW(t)$ ないし $dM_t = \phi(t)d\tilde{N}(t)$ と表現できれば、$I(h)(t) = \int_0^t h(s)dM_s = \int_0^t h(s)\phi(s)dW(s)$ ないし $I(h)(t) = \int_0^t h(s)d\tilde{N}(s) = \int_0^t h(s)\phi(s)d\tilde{N}(s)$ となり、$I(h)$ はマルチンゲールになる。。

性質 (3) から、写像 $h \mapsto I(h)$ は、$L^2(\Omega \times [0, +\infty), P \times d[M]_s)$ における適合過程から $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ への同相写像に拡張されることがわかる。

さらに $\mathbf{S}$ は $L^2(\Omega \times [0, +\infty), P \times d[M]_s)$ において稠密であり、$h \in L^2(\Omega \times [0, +\infty), P \times d[M]_s)$、可予測、の元は $\mathbf{S}$ の元で近似されることから、I は $I : L^2(\Omega \times [0, +\infty), P \times d[M]_s) \to \mathbf{D}$ に拡張される。この I を**確率積分**という。

まとめると、確率積分 $I(h), h \in L^2(\Omega \times [0,+\infty), P \times d[M]_s)$ は次を満たす。

(1) 定数 α, β および $h, g \in L^2(\Omega \times [0,+\infty), P \times d[M]_s)$ について

$$I(\alpha h + \beta g) = \alpha I(h) + \beta I(g), a.e.$$

(2) $0 \le t_1 \le t_2 \le t_3$ に対し

$$\int_{t_1}^{t_3} h(t)dM_t = \int_{t_1}^{t_2} h(t)dM_t + \int_{t_2}^{t_3} h(t)dM_t$$

(3) $t \mapsto I(h)(t)$ は適合過程であり、càdàg な軌跡の変形をもつ。
(4) $I(h)(0) = 0$ a.s.
(5) $M_t = W(t)$ または $M_t = \tilde{N}_t$ のとき、 $t \mapsto I(h)$ はマルチンゲールであり、よって

$$E[I(h)(t)] = 0, t > 0$$

(6)

$$[I(h)]_t = \int_0^t |h(s)|^2 d[M]_s,\ [I(h), I(g)]_t = \int_0^t h(s)g(s)d[M]_s$$

以下では、 $(\mathcal{F}_t)$ は Lévy 過程 $z(t)$ によって生成され、 usual condition を満たすフィルトレーションとする。

次にランダム測度 $\tilde{N}$ の z 変数に関する積分を定義する。

$$I(\varphi) = \int \varphi(z)\tilde{N}((s,t] \times dz),\ I(\psi) = \int \psi(z)\tilde{N}((s,t] \times dz),$$

とおく。ここで

$$[I(\varphi), I(\psi)]_t = (t-s)\int \varphi(z)\psi(z)\mu(dz)$$

となる。ここで φ と ψ は

$$\int (|\varphi(z)|^2 + |\psi(z)|^2)\mu(dz) < +\infty.$$

なる可測関数である。

次に、積分

$$\int \int_0^t h(s,z)\tilde{N}(dsdz)$$

は、単純可予測過程

$$h(t,z)=\sum_i \psi_i(z)1_{[t_i,t_{i+1})}(t),$$

から始めて、

$$E[\int_0^t\int|h(s,z)|^2 ds\mu(dz)]<+\infty \tag{2.4}$$

なる可測な $h(t,z)$ を単純可予測過程で近似することにより定義される。

以下のマルチンゲール表現定理がなりたつ。$m=1$ とする。

Theorem 6 *(Kunita-Watanabe* 表現定理 *cf. [10], [25] Theorem IV.43)* M_t を $(\Omega,\mathcal{F},P)$ に定義された局所 *2* 乗可積分マルチンゲールとする。可予測な *2* 乗可積分過程 $\phi(t),\psi(t,z)$ があって

$$M_t=M_0+\int_0^t\phi(s)dW(s)+\int_0^t\int\psi(t,z)d\tilde{N}(dsdz)$$

がなりたつ。

この性質を**可予測表現性**という。
証明省略。

2.2　ジャンプのある伊藤過程

$z(t)$ を $\mathbf{R}^m$ 値の Lévy 過程で、 Lévy 測度 $\mu(dz)$ をもち、その特性関数 ψ_t が

$$\psi_t(\xi)=E[e^{i(\xi,z(t))}]=\exp(t\int(e^{i(\xi,z)}-1-i(\xi,z)1_{\{|z|\le 1\}})\mu(dz)).$$

で与えられるものとする。

$$z(t)=(z_1(t),...,z_m(t))=\int_0^t\int_{\mathbf{R}^m\setminus\{0\}}z(N(dsdz)-1_{\{|z|\le1\}}.\mu(dz)ds),$$

とかく。ここで $N(dsdz)$ は $\mathbf{T}\times\mathbf{R}^m\setminus\{0\}$ 上の平均測度 $ds\times\mu(dz)$ の Poisson ランダム測度である。Lévy 測度 μ の指数を β とする：

$$\beta=\inf\{\alpha>0;\int_{|z|\le1}|z|^\alpha\mu(dz)<+\infty\}$$

以下しばらく

$$\int_{\mathbf{R}^m \setminus \{0\}} |z|^2 \mu(dz) < +\infty \tag{2.5}$$

を仮定する。

次の形の確率微分方程式 (SDE) を考察する。

$$X_t = x + \int_0^t b(X_{s-})ds + \int_0^t f(X_{s-})dW(s) + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^m \setminus \{0\}} g(X_{s-}, z)\tilde{N}(dsdz). \tag{$*$}$$

以下、この形で表される確率過程を**伊藤過程**という。ここで次を仮定する：

$$|b(x)| \le K(1+|x|),\ |f(x)| \le K(1+|x|),\ |g(x,z)| \le K(z)(1+|x|),$$

$$|b(x)-b(y)| \le L|x-y|,\ |f(x)-f(y)| \le L|x-y|,$$

$$|g(x,z)-g(y,z)| \le L(z)|x-y|.$$

ここで K, L は正定数、$K(z), L(z)$ は

$$\int_{\mathbf{R}^m \setminus \{0\}} \{K^p(z) + L^p(z)\}\mu(dz) < +\infty,$$

を満たす正値関数である。たたし、 $p \ge 2$。

Theorem 7 x は p 次可積分とする。$b(x),\ f(x), g(x,z)$ に関する上の仮定のもとで、 *SDE* $(*)$ は一意の解をもち、それは L^p に属す。

証明省略

次に下の SDE を考察する。

$$x_t(x) = x + \int_0^t b(x_s(x))ds + \sum_{s \le t}^{c} \gamma(x_{s-}(x), \Delta z(s)), \quad x_0(x) = x. \tag{2.6}$$

ここで $\sum^c$ は補償された和である。すなわち、

$$\sum_{s \le t}^{c} \gamma(x, \Delta z(s)) = \lim_{\epsilon \to 0} \{ \sum_{s \le t, |\Delta z(s)| \ge \epsilon} \gamma(x, \Delta z(s)) - \int_0^t ds \int_{|z| \ge \epsilon} \gamma(x,z)\mu(dz) \},$$

cf. [9] Chapter II.

関数 $\gamma(x,z):\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^d$ および $b(x):\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^d$ は C^∞ 関数であり、そのすべての階数の導関数は有界であり、また $\gamma(x,0)=0$ を満たすとする。

別の記法では

$$x_t(x)=x+\int_0^t b'(x_s(x))ds+\int_0^t\int_{|z|\le 1}\gamma(x_{s-}(x),z)\tilde N(dsdz) \qquad (2.7)$$
$$+\int_0^t\int_{|z|>1}\gamma(x_{s-}(x),z)N(dsdz)$$

ここで $\tilde N$ は補償つき Poisson ランダム測度 $\tilde N(dsdz)=N(dsdz)-ds\mu(dz)$, $b'(x)=b(x)-\int_{|z|\ge 1}\gamma(x,z)\mu(dz)$ である。ここで $\gamma(x,z)$ の $1_{\{|z|\ge 1\}}d\mu(z)$ に関する可積分性は仮定されている。関数 γ は以下の形を仮定する：

$$\gamma(x,z)=\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,0)z+\tilde\gamma(x,z) \qquad (2.8)$$

ただし、 $\tilde\gamma(x,z)=o(|z|)$ as $z\to 0$。

更に以下を仮定する。

(A.0) ある $0<\beta<2$ と正定数 C_1,C_2 があって、$\rho\to 0$ なるとき

$$C_1\rho^{2-\beta}I\le\int_{|z|\le\rho}zz^T\mu(dz)\le C_2\rho^{2-\beta}I$$

(A.1) (a) 任意の $p\ge 2$ と任意の $k\in\mathbf{N}^d\setminus\{0\}$ に対し

$$\int|\gamma(x,z)|^p\mu(dz)\le C(1+|x|)^p,\qquad \sup_x\int|\frac{\partial^k\gamma}{\partial x^k}(x,z)|^p\mu(dz)<+\infty$$

(b) ある $\delta>0$ があって

$$\inf\{y^*(\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,0))(\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,0))^*y;x\in\mathbf{R}^d\}\ge\delta|y|^2$$

on $\mathbf{R}^m$

(A.2) ある $C>0$ があって

$$\inf_{x\in\mathbf{R}^d,z\in\mathrm{supp}\ \mu}|\det(I+\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,z))|>C$$

条件 **(A.2)** は、 flow $\phi_{st}(x)(\omega):\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^d, x_s(x)\mapsto x_t(x)$ の存在を保証するものである。

第3章　マリアバン解析とその応用(I)

You must take your chance, And either not attempt to choose at all Or swear before you choose, if you choose wrong Never to speak to lady afterward In way of marriage: therefore be advis'd. W. Shakespeare, The merchant of Venice, Act 2, Scene 1

この章では Wiener-Poisson 空間上の integration-by-parts formula を述べる。この際 Skorohod 積分 $\delta(Z)$ の評価が重要になる。

3.1 Poisson空間におけるIntegration-by-parts公式

Malliavin 解析を用いて、jump-diffusion 型の SDE の解の汎関数について、推移確率測度の絶対連続性と密度関数の絶対連続性について調べる。ジャンプ型の Malliavin 解析では、確率過程のジャンプ時またはジャンプの大きさと方向について摂動をとる。

以下では、 d 次元 Poisson 汎関数 F について integration-by-parts 公式を示すことを目的とする。すなわち、なめらかな確率変数 G について、F と G からきまる L^p-確率変数 $\mathcal{H}(F,G)$ がきまり、任意のなめらかな関数 ϕ について

$$E[\partial\phi(F)G] = E[\phi(F)\mathcal{H}(F,G)] \tag{3.1}$$

がなりたつ。公式 (3.1) を **integration-by-parts 公式**という。 この章では、上の公式がいろいろな "非退化" Poisson 汎関数についてなりたつことを示す。

この公式により、 F の確率法則になめらかな密度関数が存在すること

を導くことができる。$p_F(dx)$ を F の分布を表す確率法則とする。$p_F(dx)$ の Fourier transform $\hat{p}_F(v)$ は $E[\phi_v(F)]$ と書ける。ただし、$\phi_v(x) = \exp(-i(x,v))$ である。ここに上の公式を、$\phi = \phi_v$, $G = 1$ として、k 回適用すると

$$E[\partial^k \phi_v(F)] = E[\partial^{k-1}\phi_v(F)\mathcal{H}(F,1)] = ... = E[\phi_v(F)\mathcal{H}(F,\mathcal{H}(F,\cdots,\mathcal{H}(F,1)))]$$

が得られる。任意の $v \in \mathbf{R}^d$ について $|\phi_v(F)| \leq 1$ であるから、$\mathcal{H}(F,\mathcal{H}(F,\cdots,\mathcal{H}(F,1))) \in L^p$ ならば、ある正定数 C_k が存在して、任意の multi-index k について

$$|E[\partial^k \phi_v(F)]| \leq C_k, \quad \forall\ v \tag{3.2}$$

となる。

$\partial^k \phi_v = (-i)^k v^k \phi_v$ であるから、$\mathcal{H}(F,\mathcal{H}(F,\cdots,\mathcal{H}(F,1))) \in L^p$ ならば、これより、各 k について

$$|v^k||\hat{p}_F(v)| \leq C_k, \quad \forall\ v$$

よって

$$(\frac{1}{2\pi})^d \int e^{i(x,v)} i^{|l|} v^l \hat{p}_F(v) dv$$

は $|l| < |k| - d$ なる各 l について well defined である。[26] Lemma (38.52) を見よ。

Fourier 変換の理論により、 このことは $p_F(dx)$ が密度関数をもち、上の積分は $\partial_x^l p_F(x)$ に等しいことが導かれる。

3.2　Poisson 空間と Picard の摂動

$U = \mathbf{T} \times (\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ 上の非負整数値測度で $\omega(\mathbf{T} \times \{0\}) = 0, \omega(\{u\}) \leq 1$ for all u, かつ $\hat{N}(A) < +\infty$ なる任意の $A \in \mathcal{U}$ に対し $\omega(A) < +\infty$ となるもの全体を Ω_2 と書く。ここで $u = (t,z)$ は集合 U の要素を表す。$\mathcal{U}$ は U 上の Borel σ-field であり、$\hat{N}(dtdz) = dt\mu(dz)$ である。

Ω_2 上の σ-field で、 $\omega(A) \in \mathcal{F}_2, A \in \mathcal{U}$ となる最小のものを $\mathcal{F}_2$ と書く。$(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ 上の確率測度で $N(dtdz) := \omega(dtdz)$ が Poisson ランダム測度になるようなものを P_2 とする。確率空間 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ を **Poisson 空間**という。

関数 $\varphi(\rho)$ を $\varphi(\rho) = \int_{|z|\leq\rho} |z|^2 \mu(dz),\ \rho > 0$ とおく。次の **order 条件**がなりたつとする：ある $c > 0$ と $\alpha \in (0,2)$ があって

$$\varphi(\rho) \geq c\rho^\alpha \quad \text{as} \quad \rho \to 0 \tag{$*$}$$

ここで Lévy 測度 μ は Lebesgue 測度に関して特異であってもよい。

Remark. order 条件は Picard の摂動を用いる際の Lévy 測度への基本的要請である。 $2-\alpha$ は特性指数とよばれる。べき α は原点の近傍における、 μ の質量の集中のしかたを記述している。

以下では Poisson 空間 $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ において確率変分 (Malliavin 解析) をおこなう。空間 Ω_2 の要素を (ω_2 でなく) ω と書く。

$u=(t,z)$ とし、$\hat{N}(du)=\hat{N}(dtdz)$, $\tilde{N}(du)=N(du)-\hat{N}(du)$ と書く。

可測空間 $(U\times\Omega_2,\ \mathcal{U}\otimes\mathcal{F}_2)$ において、測度を

$$\mu^+(dud\omega)=N(\omega,du)P(d\omega)\ \mu^-(dud\omega)=\hat{N}(\omega,du)P(d\omega).$$

および $|\mu|=\mu^++\mu^-$ とおく。

Poisson 空間上に次のように差分作用素 $\tilde{D}_u, u\in U$ を導入する。

$u=(t,z)=(t,z_1,...,z_m)\in U$ に対し $\varepsilon_u^-:\Omega_2\to\Omega_2$ を

$$\varepsilon_u^-\omega(E)=\omega(E\cap\{u\}^c)$$

$\varepsilon_u^+:\Omega_2\to\Omega_2$ を

$$\varepsilon_u^+\omega(E)=\omega(E\cap\{u\}^c)+1_E(u).$$

と定義する。ここで $\varepsilon_u^\pm\omega=\omega\circ\varepsilon_u^\pm$ と書く。

ここで

$$\text{if } u_1\neq u_2 \text{ then } \varepsilon_{u_1}^{\theta_1}\circ\varepsilon_{u_2}^{\theta_2}=\varepsilon_{u_2}^{\theta_2}\circ\varepsilon_{u_1}^{\theta_1},\quad \theta_1,\theta_2\in\{+,-\}$$

および

$$\varepsilon_u^{\theta_1}\circ\varepsilon_u^{\theta_2}=\varepsilon_u^{\theta_1},\quad \theta_1,\theta_2\in\{+,-\}$$

である。

$\mathcal{F}_2$ 可測な確率変数 F に対し差分作用素 $\tilde{D}_u$ を

$$\tilde{D}_uF=F\circ\varepsilon_u^+-F \tag{3.3}$$

と定義する。操作 ε_u^+ による P_2 の像は P_2 に関して絶対連続ではないので、各 u に対しては $\tilde{D}_u$ は well defined でない。しかし $\hat{N}(u)\otimes P_2$-a.s. には定義できる。

$\tilde{D}_u$ は差分作用素であるから、次の性質を満たす：

$$\tilde{D}_u(FG)=F\tilde{D}_uG+G\tilde{D}_uF+\tilde{D}_uF\tilde{D}_uG,\ a.s.$$

$\tilde{D} = (\tilde{D}_u)_{u \in U}$ の随伴作用素 $\tilde{\delta}$ は次のように与えられる。

Z_u を $Z_u \in L^2(U \times \Omega_2, \mathcal{U} \otimes \mathcal{F}_2, \mu^-)$ かつ $\|Z\| < +\infty$ なるものとし、その全体を $\mathcal{Z}$ とする。

$Z \in \mathcal{Z}$ に対し

$$\tilde{\delta}(Z) = \int_U Z_u \circ \varepsilon_u^- \tilde{N}(du) \tag{3.4}$$

とおく。このとき次がなりたつ。$\mathcal{F}_2$ 可測な確率変数 F に対し

$$E[F\tilde{\delta}(Z)] = E\left[\int_U \tilde{D}_u F Z_u \hat{N}(du)\right] \tag{3.5}$$

(see [20] (1.12))

3.3 Wiener-Poisson 空間上の Sobolev 空間

3.3.1 Wiener 空間上の Sobolev ノルム

$\mathbf{K}_1 = L^2(\mathbf{T}; \mathbf{R}^m)$ とする。$f = (f^1, \ldots, f^m) \in \mathbf{K}_1$ に対し

$$W(f) = \sum_{i=1}^m \int_{\mathbf{T}} f^i(s) dW^i(s).$$

とおく。$\mathcal{P}_1$ を

$$X = g(W(f_1), \cdots, W(f_n)),$$

の形に書ける確率変数 X の全体とする。ただし、 $g(x_1, ..., x_n)$ は有界、$\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$-可測で、$(x_1, ..., x_n)$ についてなめらかな関数である。ここで $n \in \mathbf{N}$。

X の Malliavin-Shigekawa 微分は m 次元確率過程であり

$$D_t X = \sum_{l=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_l}(W(f_1), ..., W(f_n)) h_l(t) \tag{3.6}$$

と定義される。作用素 $D : L^2(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1) \to L^2(\Omega_1; \mathbf{K}_1)$ は、閉かつ非有界な作用素である。$(t_1, ..., t_j) \in \mathbf{T}^j$ に対し $D^j_{t_1,...,t_j} = D_{t_1} \cdots D_{t_j}$ とおく。

l を非負整数、$p \geq 1$ とする。$X \in \mathcal{P}_1$ のノルム $|\cdot|_{0,l,p}$ を

$$|X|_{0,l,p} := \left(E[|X|^p] + \sum_{j=1}^l E\left[\left(\int_{\mathbf{T}^j} |D^j_{\mathbf{t}} X|^2 d\mathbf{t}\right)^{p/2}\right]\right)^{1/p} \tag{3.7}$$

とおく。ただし、 $D^j_{\mathbf{t}} = D^j_{t_1,...,t_j}$, $d\mathbf{t} = dt_1 \cdots dt_j$ である。$\mathbf{D}_{0,l,p}$ を $|\cdot|_{0,l,p}$ による $\mathcal{P}_1$ の完備化：

$$\mathbf{D}_{0,l,p} = \bar{\mathcal{P}_1}^{|\cdot|_{0,l,p}}.$$

とする。このとき $\mathbf{D}_{0,l,p} \subset L^p(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ であり、 作用素 $D^j, j = 1, ..., l$ は $\mathbf{D}_{0,l,p}$ 上に拡張される。

3.3.2 Poisson 空間上の Sobolev ノルム

$U = \mathbf{T} \times (\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ とし、$A(\rho) := \{u \in U\,;\, \gamma(u) \leq \rho\}$, $\varphi(\rho) := \int_{A(\rho)} \gamma(u)^2\, \hat{N}(du) = \int_{\{|z|\leq\rho\}} |z|^2\, \mu(dz)$ とする。ただし $\gamma(u) = |z|$ for $u = (t, z)$ である。Lévy 測度 μ satisfies an **オーダー条件** ：ある $0 < \alpha < 2$ に対し

$$\liminf_{\rho\to 0} \frac{\varphi(\rho)}{\rho^\alpha} > 0 \tag{3.8}$$

を満たすとする。

複合測度 $\hat{M}(du), \hat{M}(d\mathbf{u})$ および $\bar{M}(d\mathbf{u}; du)$ を次のように定義する。対角線集合の外 $\{(\mathbf{u}, u) = (u_1, ..., u_k, u); u_i \neq u, i = 1, ..., k\}$ では

- $\hat{M}(du) := \dfrac{1}{\varphi(1)}\gamma(u)^2 1_{A(1)}(u)\hat{N}(du), \quad \hat{M}(d\mathbf{u}) = \hat{M}(du_1)\cdots\hat{M}(du_k),$

  $\bar{M}(d\mathbf{u}; du) = \hat{M}(d\mathbf{u})\hat{M}(du)$

さらに k 次元対角集合 $\{(\mathbf{u}, u) = (u_1, ..., u_k, u); \text{for some } i\ u_i = u\}$ 上で

- $\bar{M}(d\mathbf{u}; du) = \displaystyle\sum_{i=1}^k \hat{M}(d\mathbf{u}^{(i)}) \otimes \hat{M}(du).\delta_{\{u_i = u\}}$

とおく。ただし、 $\mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{u} \setminus \{u_i\}$ を $(k-1)$-ベクトルとみなす。

$U \times \Omega_2$ 上の差分作用素 $\tilde{D}_u$ は Sect. 3.2 で導入された。作用素 $\tilde{D}$ viewed as that $\tilde{D} : L^2(\Omega_2) \to L^2(\Omega_2; \mathbf{K}_2)$ は閉作用素である (cf. [20], p.487 Remark)。たたし、 $\mathbf{K}_2 = L^2(U, \hat{N})$。

$\mathbf{u} = (u_1, ..., u_k) = ((t_1, z_1), ..., (t_k, z_k)) = (\mathbf{t}, \mathbf{z})$ とする。$|\mathbf{u}| = |\mathbf{z}| = \max_{1\leq i\leq k} |z_i|$ and $\gamma(\mathbf{u}) = |z_1|\cdots|z_k|$ と書く。 また $\varepsilon^+_{\mathbf{u}} = \varepsilon^+_{u_1} \circ \cdots \circ \varepsilon^+_{u_k}$ および $\tilde{D}_{\mathbf{u}} = \tilde{D}^k_{\mathbf{u}} = \tilde{D}_{u_1}\cdots\tilde{D}_{u_k}$ と定義する。

作用素 $\tilde{D}$ に関する計算規則。

$$(1) \qquad \tilde{D}(XY) = (\tilde{D}X)Y + X(\tilde{D}Y) + (\tilde{D}X)(\tilde{D}Y)$$

$$(2) \qquad X \circ \varepsilon_u^+ = \tilde{D}_u X + X$$

(1) より

$$\tilde{D}^2(XY) = \tilde{D}(\tilde{D}(XY)) = \tilde{D}\{(\tilde{D}X)Y + X(\tilde{D}Y) + (\tilde{D}X)(\tilde{D}Y)\}$$

$$= (\tilde{D}^2X)Y + (\tilde{D}X)(\tilde{D}Y) + (\tilde{D}^2X)\tilde{D}Y$$
$$+\tilde{D}X\tilde{D}Y + X\tilde{D}^2Y + \tilde{D}X\tilde{D}^2Y$$
$$+(\tilde{D}^2X)\tilde{D}Y + (\tilde{D}X)\tilde{D}^2Y + (\tilde{D}^2X)(\tilde{D}^2Y)$$

また

$$\tilde{D}(XYZ) = \tilde{D}((XY)Z) = \tilde{D}(XY)Z + XY\tilde{D}Z + \tilde{D}(XY)\tilde{D}Z$$

$$= (\tilde{D}X)YZ + X(\tilde{D}Y)Z + (\tilde{D}X)(\tilde{D}Y)Z + XY\tilde{D}Z$$
$$+(\tilde{D}X)Y(\tilde{D}Z) + X(\tilde{D}Y)(\tilde{D}Z) + (\tilde{D}X)(\tilde{D}Y)(\tilde{D}Z)$$

(1) を使うことにより

$$\tilde{D}_u(XY) = (XY) \circ \varepsilon_u^+ - XY = (X \circ \varepsilon_u^+)(Y \circ \varepsilon_u^+) - XY$$

を確認できる。また、 (2) より

$$X \circ \varepsilon_{u_1}^+ \circ \varepsilon_{u_2}^+ = (X \circ \varepsilon_{u_1}^+) \circ \varepsilon_{u_2}^+ = (\tilde{D}_{u_1}X + X) \circ \varepsilon_{u_2}^+$$

$$= \tilde{D}_{u_2}(\tilde{D}_{u_1}X + X) + \tilde{D}_{u_1}X + X$$
$$= \tilde{D}_{u_2}\tilde{D}_{u_1}X + \tilde{D}_{u_2}X + \tilde{D}_{u_1}X + X$$

次の “連鎖律” がなりたつ。

Lemma 2 F および連続な φ で $\varphi(F) \in L^p(\Omega_2)$, $\varphi(F + \tilde{D}_u F) \in L^2(U \times \Omega_2)$ なるものに対し

$$\tilde{D}_u \varphi(F) = \varphi(F \circ \varepsilon_u^+) - \varphi(F) = \varphi(F + \tilde{D}_u F) - \varphi(F). \qquad (3.9)$$

証明は [19] Theorem 12.8 を見よ。

この作用素 $\tilde{D}$ により、ノルム

$$|F|_{k,0,p} := \left(|F|_{0,0,p}^p + \sum_{k'=1}^{k} E\left[\int_{A(1)^{k'}} \left| \frac{\tilde{D}_{\mathbf{u}}^{k'} F}{\gamma(\mathbf{u})} \right|^p \hat{M}(d\mathbf{u}) \right] \right)^{1/p}$$

を導入する。ただし、 $k=1,2,...,$ $p\geq 1$。

$\varphi \in C_0^\infty(U)$ に対し

$$N(\varphi)=\int_U \varphi(t,z)N(dtdz),\ \tilde{N}(\varphi)=\int_U \varphi(t,z)\tilde{N}(dtdz)$$

とおく。$\mathcal{P}_2$ を X

$$X=f(\tilde{N}(\varphi_1),\cdots,\tilde{N}(\varphi_n))$$

と書ける確率変数 X の全体とする。ただし、 $f(x_1,...,x_n)$ は、有界、$\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$-可測かつ $(x_1,...,x_n)$ に関してなめらかな関数である。

$\mathbf{D}_{k,0,p}$ を空間 $\mathcal{P}_2$ のノルム $|\cdot|_{k,0,p}$ に関する完備化とする：

$$\mathbf{D}_{k,0,p}=\bar{\mathcal{P}_2}^{|\cdot|_{k,0,p}}$$

このとき $\mathbf{D}_{k,0,p}\subset L^p(\Omega_2,\mathcal{F}_2,P_2)$ であり、 $\tilde{D}^j_{\mathbf{u}},\mathbf{u}=(u_1,...,u_j),j=1,...,l$ は $\mathbf{D}_{k,0,p}$ 上に拡張される。

$\tilde{D}_u$ の $L^2(\mathbf{T}\times\Omega_2)$ における随伴作用素 $\tilde{\delta}$ は Sect. 3.2 で導入された。

ランダム場 $V=V_u$ で、 $V_{(t,0)}=0$ となり $\tilde{N}=N-\hat{N}$ に関して可積分なもののノルムを $k=0$ のとき

$$\|V\|^{\sim}_{0,0,p}=E\left[\int_{A(1)}\left|\frac{V_u}{\gamma(u)}\right|^p\hat{M}(du)\right]^{1/p}, \tag{3.10}$$

$k\geq 1$ のとき

$$\|V\|^{\sim}_{k,0,p}=\left\{\|V\|^{\sim p}_{0,0,p}+\sum_{k'=1}^{k}E\left[\int_{A(1)^{k'}\times A(1)}\left|\frac{\tilde{D}^{k'}_{\mathbf{u}}V_{\mathrm{u}}}{\gamma(\mathbf{u})\gamma(\mathrm{u})}\right|^p\bar{M}(d\mathbf{u};d\mathrm{u})\right]\right\}^{1/p} \tag{3.11}$$

により定義する。

$\chi_\rho=1_{A(\rho)}$ とおく。次の不等式が成り立つ：

Theorem 8 (Theorem 3.2 in [6]) k を非負整数、 $p\geq 2$ を偶数とする。正定数 $c=c(k,p)$ があって任意の $s\geq 2$ と $0<\rho<1$ に対し

$$|\tilde{\delta}(V\chi_\rho)|_{k,0,p}\leq c\varphi(\rho)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2s}}\|V\chi_\rho\|^{\sim}_{k+p,0,(k+p)s} \tag{3.1}$$

が任意の V についてなりたつ。

3.3.3 Wiener-Poisson 空間上の Sobolev ノルム

$(\Omega, \mathcal{F})$ を積空間 $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2$ とし、$\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ と書く。積確率測度 $P = P_1 \otimes P_2$ を $(\Omega, \mathcal{F})$ で考える。フィルトレーション $\mathcal{F}$ の P に関する完備化を $\bar{\mathcal{F}}$ と書く。部分 σ-fields $\mathcal{F}_1 \otimes \{\phi, \Omega_2\}$, $\{\phi, \Omega_1\} \otimes \mathcal{F}_2$ は、各々$\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ と同一視される。空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は *Wiener-Poisson* 空間とよばれる。以下 $W(t)(\omega) = W(t)(\omega_1) = \omega_1(t), N(dtdz)(\omega) = N(dtdz)(\omega_2) = \omega_2(dtdz)$ と書くこともある。

$\mathbf{K} := \mathbf{K}_1 \oplus \mathbf{K}_2$ とする。$\mathbf{K}$ は

$$(h_1, h_2) = (f_1, f_2)_{\mathbf{K}_1} + (g_1, g_2)_{\mathbf{K}_2}$$

を内積とするヒルベルト空間になる。ただし、 $h_i = f_i \oplus g_i \in \mathbf{K}$。以下では D_t, $\tilde{D}_u$ を各々 $D_t \oplus id$, $id \oplus \tilde{D}_u$ と同一視する。作用素 $\varepsilon_u^{\pm}$ は次のようにして Ω 上に拡張される：$\varepsilon_u^{\pm}(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1, \varepsilon_u^{\pm}\omega_2)$

$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$ とする。空間 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ を各々 $\mathcal{P}_1 \oplus 1, 1 \oplus \mathcal{P}_2$ と同一視する。$p \geq 2$ に対し

$$\mathbf{D}_{k,l,p} = \bar{\mathcal{P}}^{|\cdot|_{k,l,p}}$$

ただし、

$$|F|_{k,l,p} := \left(|F|^p_{0,l,p} + \sum_{k'=1}^{k} \sum_{l'=0}^{l} E\left[\int_{A(1)^{k'}} \left(\int_{\mathbf{T}^{l'}} \left| \frac{D_{\mathbf{t}}^{l'} \tilde{D}_{\mathbf{u}}^{k'} F}{\gamma(\mathbf{u})} \right|^2 d\mathbf{t} \right)^{p/2} \hat{M}(d\mathbf{u}) \right] \right)^{1/p}$$

作用素 $\mathcal{D}_{(t,u)} = D_t \oplus \tilde{D}_u$ は連続的に $\mathbf{D}_{k,l,p}$ 上に拡張される。

$$\mathbf{D}_\infty = \cap_{k,l=0}^{\infty} \cap_{p \geq 2} \mathbf{D}_{k,l,p}$$

とおく。

さらに、随伴作用素 $\delta, \tilde{\delta}$ も各々 $\delta \otimes id$, $id \otimes \tilde{\delta}$ と同一視する。こうして作用素 $\bar{\delta}$ を

$$\bar{\delta} = \delta \oplus \tilde{\delta}.$$

と定義する。このとき (3.5) などから次がなりたつ：

Proposition 5 $Z = U_t \oplus V_u \in L^2(\Omega\,; \mathbf{K})$ とし、$V_{(t,0)} = 0$, $U_t \in Dom(\delta)$, $V_u \in Dom(\tilde{\delta})$ を仮定する。このとき任意の $H \in \mathbf{D}_{1,1,2}$ に対し

$$E[H\bar{\delta}(Z)] = E[\int D_t H\, U_t\, dt + \int \tilde{D}_u H\, V_u\, \hat{N}(du)]. \tag{3.12}$$

次にノルム $\| \|_{k,l,p}$, $\| \|^{\sim}_{k,l,p}$ を導入する。$U_t \in L^2(\Omega;\mathbf{K}_1)$ に対し

$$\|U\|_{k,l,p} := \left(\|U\|^p_{0,l,p} + \sum_{k'=1}^{k}\sum_{l'=0}^{l} E\left[\int_{A(1)^{k'}} \left(\int_{\mathbf{T}^{l'+1}} \left|\frac{D^{l'}_{\mathbf{t}}\tilde{D}^{k'}_{\mathbf{u}}U_t}{\gamma(\mathbf{u})}\right|^2 d\mathbf{t}\right)^{p/2} \hat{M}(d\mathbf{u})\right]\right)^{1/p}. \tag{3.13}$$

$V_u \in L^2(\Omega;\mathbf{K}_2)$ で $V_{(t,0)} = 0$ なるものに対し、$k=0$ の場合

$$\|V\|^{\sim}_{0,l,p} = \sum_{l'=0}^{l} E\left[\int_{A(1)} \left[\int \left|\frac{D^{l'}_{\mathbf{t}}V_u}{\gamma(u)}\right|^2 d\mathbf{t}\right]^{\frac{p}{2}} \hat{M}(du)\right]^{1/p} \tag{3.14}$$

$k \geq 1$ の場合

$$\|V\|^{\sim}_{k,l,p} \quad = \quad \left\{\|V\|^{\sim p}_{0,0,p} + \sum_{k'=1}^{k}\sum_{l'=0}^{l} E\left[\int_{A(1)^{k'}\times A(1)} \left[\int \left|\frac{D^{l'}_{\mathbf{t}}\tilde{D}^{k'}_{\mathbf{u}}V_{\mathrm{u}}}{\gamma(\mathbf{u})\gamma(\mathrm{u})}\right|^2 d\mathbf{t}\right]^{\frac{p}{2}} \bar{M}(d\mathbf{u};d\mathrm{u})\right]\right\}^{1/p}$$

とおく。$Z = U_t \oplus V_u$ に対しては

$$\|Z\|_{k,l,p} := (\|U\|^2_{k,l,p} + \|V\|^{\sim}_{k,l,p}{}^2)^{\frac{1}{2}}$$

とする。

また空間を $n \geq 0, p \geq 2$ に対し

$$\mathbf{D}^{\sim(1)}_{k,l,p} = \{U_t \in L^2(\Omega;\mathbf{K}_1)\,;\, \|U\|_{k,l,p} < +\infty\}$$
$$\mathbf{D}^{\sim(2)}_{k,l,p} = \{V_u \in L^2(\Omega;\mathbf{K}_2)\,;\, V_{(t,0)} = 0, \|V\|^{\sim}_{k,l,p} < +\infty\}$$
$$\mathbf{D}^{\sim}_{k,l,p} = \mathbf{D}^{\sim(1)}_{k,l,p} \oplus \mathbf{D}^{\sim(2)}_{k,l,p}$$
$$\mathbf{D}^{\sim}_{\infty} = \cap_{k,l=0}^{\infty} \cap_{p\geq 2} \mathbf{D}^{\sim}_{k,l,p}$$

と定義する。

次の補題は随伴作用素の評価を与える。

Lemma 3 k, l を非負整数、 $p \geq 2$ を偶数とする。

(i) $U = \{U_t\} \in \mathbf{D}^{\sim(1)}_{k.l,p}$ とする。ある正定数 $c = c(k,l,p)$ があって

$$|\delta(U)|_{k,l,p} \leq c\|U\|_{k,l+1,p} \tag{3.15}$$

(ii) $V = \{V_u\} \in \mathbf{D}^{\sim(2)}_{k.l,p}$ とする。 ある正定数 $c = c(k,l,p)$ があって、任意の $s \geq 2$ と $0 < \rho < 1$ に対し

$$|\tilde{\delta}(V\chi_\rho)|_{k,l,p} \leq c\varphi(\rho)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2s}}\|V\chi_\rho\|^{\sim}_{k+p,l,(k+p)s} \tag{3.16}$$

がなりたつ。

第4章　超関数との合成

Incessant is the change of water where the stream glides on calmly: the spray appears over a cataract, yet vanishes without a moment's delay. But none of them has resisted the destructive work of time. Kamo no Chomei (1155–1216), Hojoki/The Ten Foot Square Hut (Japanese classic)

この章では Wiener-Poisson 空間上の確率変数 F と超関数 T との合成について述べる。$T = e_v = e^{i(\cdot,v)}$ との合成 $e_v \circ F$ の平均の評価から、F の密度関数の存在が導かれる。

4.1　(ND) 条件

4.1.1　$\mathcal{S}'$ の元との合成

L. Schwartz による、$\mathbf{R}^d$ 上の C^∞ 急減少関数の全体を $\mathcal{S}$ と書く。$\varphi \in \mathcal{S}$ に対しノルムを

$$\|\varphi\|_{2m} = (\int \sum_{i+j\le m} \{|(1-\Delta)^j (1+|y|^2)^i \varphi|^2\} dy)^{\frac{1}{2}} \tag{4.1}$$

for $m = 1, 2, ...$ で定義する。$\mathcal{S}_{2m}$ を空間 $\mathcal{S}$ のこのノルムによる完備化とする。$\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_{2m}, m = 1, 2, ..$ である。

$\|\varphi\|_{2m}$ の双対ノルム $\|\psi\|_{-2m}$ を

$$\|\psi\|_{-2m} = \sup_{\varphi\in\mathcal{S}_{2m}, \|\varphi\|_{2m}=1} |(\varphi, \psi)| \tag{4.2}$$

で定義する。ただし $(\varphi, \psi) = \int \varphi(x)\bar{\psi}(x)dx$ $\mathcal{S}_{-2m}$ を空間 $\mathcal{S}$ のこのノルムによる完備化とする。さらに

$$\mathcal{S}_\infty = \cap_{m\ge1}\mathcal{S}_{2m}, \quad \mathcal{S}_{-\infty} = \cup_{m\ge1}\mathcal{S}_{-2m}$$

とおく。

$\mathcal{S}'$ を緩増加超関数の全体 ($\mathcal{S}$ の双対空間) とする。次の表現定理がある。

Proposition 6 *([16] Theorem 2.14)* 各 $\Phi \in \mathcal{S}'$ に対し $k, m \in \mathbf{N}$ と $(f_\alpha), f_\alpha \in L^2(\mathbf{R}^d)$ で

$$\Phi = (1+|x|^2)^k \sum_{|\alpha| \le m} D^\alpha f_\alpha(x)$$

と表現されるものが存在する。

これより

Proposition 7

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\infty,\ \mathcal{S}' = \mathcal{S}_{-\infty}$$

証明省略

注意渡辺 [28] は Wiener 空間の解析において

$$|||\varphi|||_{2m} = |(1+|x|^2 - \Delta)^m \varphi|_\infty \tag{4.3}$$

というノルムを使った。ここでは次のような分解が成り立つ。

$$\mathcal{S}' = \cup_{m \ge 1} \tilde{C}^{-2m}$$

ただし

$$\begin{aligned}\tilde{C}^{-2m} = \{g \in \mathcal{S}'; A^{-m}g \in \hat{C}, &\text{there exists } g_n \in \mathcal{S} \\ \text{such that }\ |A^{-m}g_n - A^{-m}g|_\infty &\to 0\ (n \to +\infty)\}\end{aligned}$$

ここで $\hat{C}$ は 0 に減少する連続関数を表し、$A = (1+|x|^2 - \Delta)$ である。この分解を使って、Wiener-Poisson 汎関数の $\mathcal{S}'$ の元との合成を定義することもできる (cf. [29])。

$\varphi \in \mathcal{S}$ のフーリエ変換を

$$\hat{\varphi}(v) = \mathcal{F}\varphi(x) = (\frac{1}{2\pi})^d \int e^{-i(v,y)} \varphi(y) dy$$

とおく。 $\psi \in \mathcal{S}'$ のフーリエ変換は超関数の元として適切に定義される。。ここで

$$\mathcal{F}\mathcal{S} = \mathcal{S},\ \mathcal{F}\mathcal{S}' = \mathcal{S}'$$

である。

もし確率変数 F の特性関数 $\phi(v) = E[e^{i(v,F)}]$ がなめらかかつ遠方で急減少すれば、それは $\mathcal{S}$ に属し、よって F の密度関数 $p_F(x) = \mathcal{F}\phi(x)$ が存在しそれは $\mathcal{S}$ に属す。

以下では

$$\psi_G(v) = E[e^{i(v,F)}G] \tag{4.4}$$

for $G \in \mathbf{D}_\infty$ とかく。またとかく。

Definition 7 *(* **(ND)** 条件*)*
確率変数 F が **(ND)** 条件を満たすとは、任意の $p \geq 1, k \geq 0$ に対し $\beta \in (\frac{\alpha}{2}, 1]$ が存在して

$$\sup_{\rho\in(0,1)} \sup_{\substack{v\in\mathbf{R}^d, \\ |v|=1}} \sup_{\tau\in A^k(\rho)}$$

$$E\left[\left|\left((v,\Sigma v) + \varphi(\rho)^{-1}\int_{A(\rho)} |(v,\tilde{D}_u F)|^2 1_{\{|\tilde{D}_u F| \leq \rho^\beta\}}\hat{N}(du)\right)^{-1} \circ \varepsilon_\tau^+\right|^p\right] < +\infty \tag{4.5}$$

を満たすことである。ただし、Σ はマリアバン共分散行列 $\Sigma = (\Sigma_{i,j})$, $\Sigma_{i,j} = \int_{\mathbf{T}} (D_t F_i, D_t F_j) dt$ を表す。

この定義で $\left((v,\Sigma v) + \varphi(\rho)^{-1}\int_{A(\rho)} \cdots \hat{N}(du)\right)$ の部分は、Wiener-Poisson 空間でのマリアバン行列とみなすこともできる。

Proposition 8 $F \in \mathbf{D}_\infty$ とし、 **(ND)** 条件を満たすとする。このとき任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し $k, l \in \mathbf{N}, p \geq 2$ および $C = C_{k,l,p} > 0$ が存在して

$$|E[Ge_v(F)]| \leq C(1+|v|^2)^{-\frac{1}{2}nq_0}|G|_{k,l,p}|F|^n_{k,l,p} \sup_{|v|>1} |Q^F(v)^{-1}|^n_{k,l,p} \tag{4.6}$$

が任意の $|v| \geq 1$ について成り立つ。ただし、 $B_v = A(|v|^{-\frac{1}{\beta}})$,

$$Q^F(v) = (v', \sum v') + \frac{1}{|v|^2\varphi(|v|^{-\frac{1}{\beta}})}\int_{B_v} |e^{i(v,\tilde{D}_u F)} - 1|^2 \hat{N}(du),$$

$\sum = (\int_{\mathbf{T}} (D_t F)^i (D_t F)^j dt)$ であり、また $q_0 > 0$ である。

Remark. (i) $q_0 > 0$ は次のように選ばれる：偶数 k_0 を $\frac{1}{k_0} < \frac{2\beta}{\alpha} - 1$ となるように選ぶ。

$$q_0 = 1 - \frac{\alpha}{2\beta}(1 + \frac{1}{k_0}) > 0 \tag{4.7}$$

とおく。実際には $q_0 = 1 - \frac{\alpha}{2}$ と選べば、上のような k_0, β をとれる。

(ii) **(ND)** 条件のもとで $\sup_{|v|>1} \sup_{\mathbf{u} \in B_v^k} E[|Q^F(v)^{-1} \circ \varepsilon_{\mathbf{u}}^+|^p.1_{E_v}]$ は各 $p \geq 1, k = 0, 1, 2, ...$ について有限である。これは

$$\int_{B_v} |e^{i(v,\tilde{D}_u F)} - 1|^2 \hat{N}(du) \geq c \int_{B_v} |(v, \tilde{D}_u F)|^2 1_{\{|\tilde{D}_u F| \leq \frac{1}{|v|}\}} \hat{N}(du)$$

for $|v| > 1$ となる $0 < c < 1$ が存在することによる。ただし、$B_v = A(|v|^{-\frac{1}{\beta}})$、$E_v = \{\sup_{u \in A(|v|^{-1/\beta})} |\tilde{D}_u F| \leq |v|^{-1}\}$。

証明

$$Z^F(v) = Z_t^F(v) = -i \frac{(v, D_t F)}{|v|^2 Q^F(v)},$$

$$\tilde{Z}^F(v) = \tilde{Z}_u^F(v) = \frac{(e^{-i(v,\tilde{D}_u F)} - 1).1_{B_v}(u)}{|v|^2 \varphi(|v|^{-\frac{1}{\beta}}) Q^F(v)}$$

とおく。また、$\mathbf{Z}^F(v) = Z^F(v) \oplus \tilde{Z}^F(v)$ とおく。

恒等式

$$e_v(F) = (Z^F(v) D_t \oplus \tilde{Z}^F(v) \tilde{D}_u) e_v(F)$$

が成り立つので、

$$E[G e_v(F)] = E[e_v(F) \{\delta(Z^F(v) G) + \tilde{\delta}(\tilde{Z}^F(v) G)\}]$$

よって

$$E[e_v(F) G] = E[e_v(F) \bar{\delta}(\mathbf{Z}^F \bar{\delta}(\mathbf{Z}^F \cdots \bar{\delta}(\mathbf{Z}^F \bar{\delta}(G \mathbf{Z}^F)) \cdots))]$$

ただし

$$\bar{\delta}(\mathbf{Z}^F(v)) = \delta(Z^F(v)) + \tilde{\delta}(\tilde{Z}^F(v))$$

次が成り立つ：

Lemma 4 **(ND)** 条件のもとで、任意の $k, l \in \mathbf{N}, p \geq 2$ に対し $C > 0$ が存在して

$$|\delta(Z^F(v) G)|_{k,l,p} \leq \frac{C}{|v|} |F|_{k,l+2,3p} \sup_{|v|>1} |Q^F(v)^{-1}|_{k,l+1,3p} |G|_{k,l+1,3p}$$

$$|\tilde{\delta}(\tilde{Z}^F(v)G)|_{k,l,p} \leq \frac{C}{|v|}\varphi(|v|^{-\frac{1}{\beta}})^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{k_0})}|F|_{k',l,p'} \sup_{|v|>1}|Q^F(v)^{-1}|_{k',l,p'}|G|_{k',l,p'} \tag{4.8}$$

ただし $k' = k+p+1$, $p' = 3(k+p)k_0$

Proof of Lemma 4.

The first inequality follows from the extended Meyer's type inequality (Lemma 3), and from the Hölder's inequality :

$$|XYZ|_{k,l+1,p} \leq c|X|_{k,l+1,3p}|Y|_{k,l+1,3p}|Z|_{k,l+1,3p}.$$

For the second inequlaity, we use Theorem 8 in Sect. 3.3 as $V\chi_\rho = \tilde{Z}^F(v)G = \tilde{Z}^F(v)G1_{\{|u|\leq|v|^{-1/\beta}\}}$. Then we have

$$|\tilde{\delta}(\tilde{Z}^F(v)G)|_{k,l,p} \leq c\varphi(|v|^{-\frac{1}{\beta}})^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{k_0})}\|\tilde{Z}^F(v)G\|^{\sim}_{k+p,l,(k+p)k_0}.$$

Here we use a Hölder's inequality

$$\|\tilde{Z}^F(v)G\|^{\sim}_{k+p,l,(k+p)k_0} \leq \frac{C}{|v|^2\varphi(|v|^{-\frac{1}{\beta}})}\|\tilde{F}_u(v)\|^{\sim}_{k+p,l,p'}|Q^F(v)^{-1}|_{k',l,p'}|G|_{k',l,p'},$$

where $\tilde{F}_u(v) = (e^{i(v,\tilde{D}_uF)}-1)1_{B_v(u)}$.

We use the mean value theorem

$$\tilde{D}_{u'}\psi(G) = (\tilde{D}_{u'}G)\int_0^1 \partial\psi(G+\theta\tilde{D}_{u'}G)d\theta$$

for $G = (v, \tilde{D}_uF)$ and $\psi(x) = e^{ix}-1$. Further we parametrize $u = |v|^{-1/\beta}\tilde{u}$ for sufficiently large $|v|$. As $|u| \leq |v|^{-1/\beta}$ with $\frac{\alpha}{2} < \beta \leq 1$, we have $|v|^{-1/\beta} \leq |v|^{-1}$, and

$$\int_{B_v(u)} |\tilde{D}_{u'}(e^{i(v,\tilde{D}_uF)}-1)|^2\hat{N}(du)$$

$$= \int_{B_v(u)} ||v|(\frac{v}{|v|},\tilde{D}_{u'}\tilde{D}_uF)\int_0^1 \partial\psi(\tilde{D}_uF+\theta\tilde{D}_{u'}(v,\tilde{D}_uF))d\theta|^2\hat{N}(du)$$

$$\leq |v|^2\cdot|v|^{-1}\int_{|\tilde{u}|\leq 1}|(\frac{v}{|v|},\tilde{D}_{u'}\tilde{D}_uF)|^2\hat{N}(d\tilde{u}).$$

Hence $\|\tilde{F}_u(v)\|^{\sim}_{k+p,l,p'} \leq c|v||F|_{k+p+1,l,p'}$. Combining this with the above, we have the assertion for the second inequality. q.e.d.

この補題により

$$|\bar{\delta}(G\mathbf{Z}^F)|_{k,l,p}$$

$$\leq C\frac{1}{|v|}(1+\varphi(|v|^{-\frac{1}{\beta}})^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{k_0})})|F|_{k',l',p'}\times|Q^F(v)^{-1}|_{k',l',p'}|G|_{k',l'p'}$$

となる。

ここで

$$\frac{1}{|v|}+\frac{1}{|v|}\varphi(|v|^{-\frac{1}{\beta}})^{-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{k_0})}\leq C|v|^{-q_0}$$

である。

これらの不等式を組み合わせると、命題 8 の主張を得る。q.e.d.

次にノルムを使った評価式を述べる。

Proposition 9 $F\in\mathbf{D}_\infty$ は **(ND)** 条件を満たすとする。任意の m に対し $k,l,\ p>2$ および $C_m>0$ が存在して

$$|\varphi\circ F|'_{k,l,p}\leq C_m(\sum_{\beta\leq m}|(1+|F|^2)^\beta|_{k,l,p})\|\varphi\|_{-2m} \tag{4.9}$$

for $\varphi\in\mathcal{S}$ である。

証明

$$E[\varphi(F)G]=E[\int e^{i(v,F)}\hat{\varphi}(v)dv\cdot G]$$

$$=\int\hat{\varphi}(v)E[e^{i(v,F)}\cdot G]dv=\int\hat{\varphi}(v)\psi_G(v)dv$$

がなりたっている。

Step 1 はじめに $\psi_G\in\mathcal{S}_\infty$ をいう。じっさい、

$$(1-\Delta)^\beta\psi_G(v)=E[G(1+\sum_{j=1}^d(F_j)^2)^\beta e^{i(v,F)}]$$

ここで、命題 8 より、任意の n に対し k,l,p があって |R.H.S.| は

$$C|(1+\sum_{j=1}^d(F_j)^2)^\beta|_{k,l,p/2}|G|_{k,l,p/2}(1+|v|^2)^{-nq_0/2}$$

$$\leq C|(1+|F|^2)^\beta|_{k,l,p}|G|_{k,l,p}(1+|v|^2)^{-nq_0/2}$$

で抑えられる。

したがって

$$|(1+|v|^2)^{nq_0/2}(1-\Delta)^\beta \psi_G(v)| \le C|(1+|F|^2)^\beta|_{k,l,p}|G|_{k,l,p}$$

n を $n \le 2m/q_0$ について動かすと、(4.1) より

$$\|\psi_G\|_{2m} \le C_m|G|_{k,l,p}, m=1,2,..$$

with some $k=k_m, l=l_m, p=p_m$ である。これは $\psi_G \in \mathcal{S}_\infty$ を意味する。

Step 2 (4.9) が成立することをいう。Step 1 より

$$\begin{aligned}
|\varphi \circ F|'_{k,l,p} &= \sup_{|G|_{k,l,p}=1} |E[\varphi \circ FG]| \\
&\le \sup_{|G|_{k,l,p}=1} |\int \psi_G(v)\hat{\varphi}(v)dv| \\
&\le \sup_{|G|_{k,l,p}=1} \|\psi_G\|_{2m}\|\hat{\varphi}\|_{-2m} \\
&\le C_m \sup_{|G|_{k,l,p}=1} |G|_{k,l,p}\|\varphi\|_{-2m}
\end{aligned}$$

よって (5.10) が成立する。q.e.d.

上の命題は $\Phi \in \mathcal{S}_{-2m}$ と $F \in \mathbf{D}_\infty$ に対し $\Phi \circ F$ が $\mathbf{D}'_\infty$ の元として定義できることを意味する。$\cup_{m\ge 1}\mathcal{S}_{-2m} = \mathcal{S}'$ であるから、$\Phi \in \mathcal{S}'$ と $F \in \mathbf{D}_\infty$ に対し合成 $\Phi \circ F$ を $\mathbf{D}'_\infty$ の元として定義できる。

Definition 8 F は (**ND**) 条件を満たすとする。超関数 $T \in \mathcal{S}'$ に対し合成 $T \circ F$ は

$$\langle T \circ F\,,\, G\rangle = {}_{\mathcal{S}'}\langle \mathcal{F}T\,,\, E[Ge^{i\cdot F}]\rangle_{\mathcal{S}},\ G \in \mathbf{D}_\infty.$$

なる $\mathbf{D}_\infty$ 上の線形汎関数として定義される。

命題 8 の証明より次が成り立つ。

Proposition 10 $F \in \mathbf{D}_\infty$ は **(ND)** 条件を満たすとし、$G \in \mathbf{D}_\infty$ とする。任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し $k, l \in \mathbf{N}$, $p > 2$ および $C > 0$ があって

$$|\psi_G(v)| \le C(1+|v|^2)^{-\frac{q_0}{2}n}|F|^n_{k,l,p}|G|_{k,l,p} \tag{4.10}$$

がなりたつ。

$G = 1$ ととる。3.1 節で述べたように、この命題は F がなめらかな密度関数 $p_F(y)$ をもつことを意味する。

4.2　密度関数の存在

4.2.1　合成のための十分条件

F を Wiener-Poisson 確率変数とする。特性関数 $\psi_F(v) = E[e^{i(v,F)}]$ を計算する。合成 $e^{i(v,F)} = e_v \circ F$ を定義するため、**(ND)** 条件がなりたつための十分条件を捜す。

条件 (R) F が条件 **(R)** を満たすとは、任意の正整数 $k = 0, 1, 2, ...$ と任意の $p > 1$ に対し導関数が

$$\sup_{t\in\mathbf{T},\mathbf{u}\in A(1)^k} E\left[\sum_{i=1}^{m} \sup_{|z|\le 1} |\partial_{z_i}\tilde{D}_{t,z}F \circ \varepsilon_{\mathbf{u}}^{+}|^p + \sum_{i,j=1}^{m} \sup_{|z|\le 1} |\partial_{z_i}\partial_{z_j}\tilde{D}_{t,z}F \circ \varepsilon_{\mathbf{u}}^{+}|^p\right] < +\infty$$

を満たすことである。

条件 **(D)** を満たす SDE の解 $F = X_t$ は条件 **(R)** を満たす。

条件 **(ND)** が成り立つための条件を捜す。このため、次の記法を導入する。

$$R = \int_{\mathbf{T}} D_t F (D_t F)^T dt = \Sigma^F$$

$$\tilde{K} = \int_{\mathbf{T}} (\partial\tilde{D}_{t,0}F) B (\partial\tilde{D}_{t,0}F)^T dt$$

$$\tilde{K}_\rho = \int_{\mathbf{T}} \partial\tilde{D}_{t,0}F B_\rho (\partial\tilde{D}_{t,0}F)^T dt, \rho > 0$$

ただし、 $\partial\tilde{D}_{t,0}F = \partial_z\tilde{D}_{t,z}F|_{z=0}$

また

$$Q(v) = (v', (R+\tilde{K})v')$$

$$Q_\rho(v) = (v', (R+\tilde{K}_\rho)v')$$

ただし、 $v' = \frac{v}{|v|}, v \in \mathbf{R}^d$, $\rho > 0$、$B_\rho = \frac{1}{\varphi(\rho)}\int_{|z|\le\rho} zz^T \mu(dz)$、$B \le B_\rho$

Definition 9 *(1)* F が条件 **(ND2)** を満たすとは $R + \tilde{K}$ が可逆で任意の正整数 k および $p > 1$ について

$$\sup_{v\in\mathbf{R},|v|=1,\mathbf{u}\in A(1)^k} E[(v, (R+\tilde{K}) \circ \varepsilon_{\mathbf{u}}^{+} v)^{-p}] < +\infty$$

が成り立つことである。

(2) F が条件 **(ND3)** を満たすとは $R+\tilde{K}$ が可逆で任意の正整数 k および $p>1$ についてある $\rho_0>0$ があって

$$\sup_{0<\rho<\rho_0}\ \sup_{v\in\mathbf{R},|v|=1,\mathbf{u}\in A(1)^k} E[|(v,(R+\tilde{K}_\rho)\circ\varepsilon^+_{\mathbf{u}}v)^{-p}|]<+\infty$$

が成り立つことである。

Lemma 5 F は条件 **(R)** を満たすとする。

(i) 条件 **(ND2)** は条件 **(ND3)** を意味する。

(ii) 条件 **(ND3)** は条件 **(ND)** を意味する。

証明省略

Proposition 11 **(R)** 条件および **(ND2)** 条件を仮定する。

(1) 任意の n に対し $C>0$ および k,l,p があって

$$|E[Ge_v(F)]|\le C(\epsilon)(1+|v|^2)^{-\frac{1}{2}nq_0}|G|_{k,l,p}|F|^n_{k,l,p}\sup_{|v|>1}|\{Q^F(v)\}^{-1}|_{k,l,p}$$

である。ただし

$$Q^F(v)=(v',\Sigma^F v')+\frac{1}{|v|^2\varphi(|v|^{-\frac{1}{\beta}})}\int_{B_v}|e^{i(v,\tilde{D}_uF)}-1|^2\hat{N}(du)$$

(2)

$$\sup_{|v|>1}|\{Q^F(v)\}^{-1}|_{k,l,p}<+\infty$$

が任意の k,l,p について成り立つ。

証明

補題 5 により **(ND)** 条件が成り立つ。主張 (1) の証明の残りの部分は命題 8 のそれと同様である。

次に主張 (2) を示す。

$$\int_{B_v}|e^{i(v,\tilde{D}_uF)}-1|^2\hat{N}(du)\ge c\int_{B_v}|(v,\tilde{D}_uF)|^2 1_{\{|\tilde{D}_uF|\le\frac{1}{|v|}\}}\hat{N}(du)$$

for $|v|>1$ となる $0<c<1$ が存在するので、**(ND)** 条件のもとで、$\sup_{|v|>1}\sup_{\mathbf{u}\in B_v^k}E[|Q^F(v)^{-1}\circ\varepsilon^+_{\mathbf{u}}|^p]$ は任意の $p\ge 1, k,l=0,1,2,...$ について有限である。よって主張 (2) が成り立つ。q.e.d.

第5章　マリアバン解析とその応用(II)

A friend of Diagoras tried to convince him of the existence of the gods, by pointing out how many votive pictures tell about people being saved from storms at sea by dint of vows to the gods, to which Diagoras replied that there are nowhere any pictures of those who have been shipwrecked and drowned at sea, Marcus Tullius Cicero (1st century BC), De natura decorum III 89

この章では $F = X_t$(SDE の解) の場合に、第 3 章で得られた密度関数 $p_t(x, y)$ の $t \to 0$ の時の評価について述べる。

5.1 密度関数の評価 (Markov chain による近似)

Sect. 2.2 で述べた次の SDE を考察する。

$$x_t(x) = x + \int_0^t b(x_s(x))ds + \sum_{s \le t}^{c} \gamma(x_{s-}(x), \Delta z(s)). \tag{5.1}$$

別の書き方では

$$x_t(x) = x + \int_0^t b'(x_s(x))ds + \int_0^t \int_{|z|\le 1} \gamma(x_{s-}(x), z)\tilde{N}(dsdz) \tag{5.2}$$

$$+ \int_0^t \int_{|z|>1} \gamma(x_{s-}(x), z)N(dsdz)$$

ここで $\tilde{N}$ は補償つき Poisson ランダム測度 $\tilde{N}(dsdz) = N(dsdz) - ds\mu(dz)$, $b'(x) = b(x) - \int_{|z|\ge 1} \gamma(x, z)\mu(dz)$ である。ここで、

$$|(\frac{\partial}{\partial x})^k \tilde{\gamma}(x, z)| \le C_k |z|^\alpha$$

であるような $\tilde{\gamma}(x,z)$ に対し

$$\gamma(x,z) = \frac{\partial \gamma}{\partial z}(x,0)z + \tilde{\gamma}(x,z),\ k \in \mathbf{N}^d \text{ on } \{|z| \le 1\} \tag{5.3}$$

となっているとする。

この節を通じて $x_t(x)$ は Sect. 2.2 の仮定 **(A.0)** $\sim$ **(A.2)** および次の **(A.3)** を満たすことを仮定する：

(A.3)

(3-a) $0 < \beta < 1$ の場合 $c = \int_{|z|\le 1} z\mu(dz)$, $b = 0$ とし、さらに任意の $u \in S^{d-1}$ に対し

$$\int_{\{|z|\le\rho\}} \langle z,u\rangle^2 1_{\{\langle z,u\rangle>0\}}(z)\mu(dz) \asymp \rho^{2-\beta} \tag{5.4}$$

as $\rho \to 0$

(3-b) $\beta = 1$ の場合

$$\limsup_{\epsilon\to 0} |\int_{\{\epsilon<|z|\le 1\}} z\mu(dz)| < +\infty \tag{5.5}$$

この仮定のもので (5.1) は一意な解をもつ。これは、(5.1) が

$$dx_t(x) = d\Theta_t(x_{t-}(x)), \quad x_0(x) = 0 \tag{5.6}$$

の形に書けること、そして SDE (5.6) は一意解をもつこと ([11] Theorem 3.1) による。ここで

$$\Theta_t(y) = b'(y)t + \int_0^t \{\int_{|z|\le 1} \gamma(y,z)\tilde{N}(dsdz) + \int_{|z|>1} \gamma(y,z)N(dsdz)\}$$

である。

さらに、可逆性の仮定 **(A.2)** より、可逆な確率的フロー $\phi_{s,t}(s<t) : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ で $x_t(x) = \phi_{s,t}(x_s(x))$ となるものがとれる。([15] Section 1, [1]; および ($\gamma(x,z) = X(x)z$ なる単純な場合については) [25] Theorem V.65 を参照。)

Sect.3.1 で述べた摂動を使った Picard [23] の基本的な結果を述べる。

Proposition 12 *([23] Theorem 1])*

(A.0) $\sim$ **(A.3)** の仮定のもとで、 各 $t>0$ について $x_t(x)$ は C_b^∞-密度関数 $y \mapsto p_t(x,y)$ をもつ。

次の結果は命題 12 の拡張にあたる。

Theorem 9 *(general upper bound)*
密度関数 $p_t(x,y)$ はつぎの評価を満たす*:*

$$(a) \qquad \sup_{x,y} p_t(x,y) \leq C_0 t^{-\frac{d}{\beta}} \quad as \;\; t \to 0, \quad for \;\; some \; C_0 > 0, \tag{5.7}$$

$$p_t(x,x) \quad \asymp \quad t^{-\frac{d}{\beta}} \quad as \;\; t \to 0 \qquad uniformly \; in \quad x. \tag{5.8}$$

(b) 任意の $k \in \mathbf{N}^d$ に対し $C_k > 0$ があって

$$\sup_{x,y} |p_t^{(k)}(x,y)| \leq C_k t^{-\frac{(|k|+d)}{\beta}} \quad as \;\; t \to 0 \tag{5.9}$$

ただし、 $p^{(k)}$ は y に関する k 次導関数を表す。

以下でこの定理を精細化する。それによると、主張 (a) における sup は対角線集合 $\{x=y\}$ 上で attain されることがわかる：

$$p_t(x,x) \; \asymp \; t^{-\frac{d}{\beta}} \quad \text{as} \;\; t \to 0$$

(x に関して一様)。指数 α の、対称 1 次元安定過程の場合、密度関数が

$$p_t(0) \; \sim \; Ct^{1/\alpha}$$

as $t \to 0$ という評価を満たすことはよく知られている。([4] Section 2-4)
定理の証明のため、$x_t(x)$ を近似する Markov 鎖を構成する。$\nu(dz)$ を

$$\nu(dz) = \frac{(|z|^2 \wedge 1)\mu(dz)}{\int (|z|^2 \wedge 1)\mu(dz)}. \tag{5.10}$$

により与えられる $\mathbf{R}^d$ 上の確率測度とする。このとき $d\nu \sim d\mu$ (μ と ν は互いに絶対連続) であり、 Radon-Nikodým 微分 $\frac{d\nu}{d\mu}$ は大域的に上に有界となる。

関数列 $(A_n)_{n=0}^{\infty}, A_n : \mathbf{R}^{d+m\times n} \to \mathbf{R}^d$ を次のように定義する：$A_0(x) = x$, $A_{n+1}(x, x_1, ..., x_{n+1}) = A_n(x, x_1, ..., x_n) + \gamma(A_n(x, x_1, ..., x_n), x_{n+1})$ $x \in \mathbf{R}^d$ を固定する。 $\mathcal{S}_n$ を、写像 $(x_1, ..., x_n) \mapsto A_n(x, x_1, ..., x_n)$ による $\mu^{\otimes n}$ の像測度の台とし、$\mathcal{S} \equiv \bigcup_n \mathcal{S}_n$ とおく。

Definition 10 *(accessible points)* $\mathcal{S}$ の点 *(*$\mathbf{R}^d$ の点とみなして*)* を *accessible points* という。$\bar{\mathcal{S}} \setminus \mathcal{S}$ の点を *asymptotically accessible points* という。

直感的には、 accessible points は x から $z(s)$ の有限回のジャンプを使って $x_t(x)$ の軌跡に沿って到達できる点である。なお、各 $\mathcal{S}_n$ は閉集合だが、$\mathcal{S}$ は必ずしも閉でない。

各 x に対し、写像 H_x : supp $\mu \to P_x \equiv x + \{\gamma(x,z); z \in$ supp $\mu\}$ を、$z \mapsto x + \gamma(x,z)$ により定義する。$P_x^{(n)} = \{y \in P_{z_{n-1}}; z_1 \in P_x, z_i \in P_{z_{i-1}}, i =$

$2, ..., n-1\}$, $n = 1, 2, ...$ $(z_0 = x)$ とおく。このとき $P_x^{(1)} = P_x$ であり、 $P_x^{(n)}$ の点は x から $x_t(x)$ の軌跡に沿って n 回のジャンプで到達できる点と解釈できる。$x, y \in \mathbf{R}^d (y \neq x)$ に対し、 $\alpha(x, y)$ を $y \in P_x^{(l)}$ となるような最小の l とし、そのような l が存在しない場合には $\alpha(x, y) = +\infty$ とする:$\alpha(x, y) = \inf\{n; y \in \cup_{k \leq n} \mathcal{S}_k\}$

より具体的につぎのような特異な Lévy 測度を考える:$\mu(dz) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n \delta_{a_n}(dz)$ は m 次元 Lévy 測度で、$(a_n; n \in \mathbf{N})$ は $\mathbf{R}^d$ の点列、 $(k_n; n \in \mathbf{N})$ は数列で次を満たすものとする：

(i) $|a_n|$ decreases to 0 as $n \to +\infty$,
(ii) $k_n > 0$,
(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} k_n |a_n|^2 < +\infty$

さらに次を仮定する：

$$N = N(t) \equiv \max\{n; |a_n| > t^{1/\beta}\} \asymp \log(\frac{1}{t}). \tag{5.11}$$

Theorem 10 *([5] Theorem 2)*

μ を上で与えられたものとする。$y \neq x$ とする。

(a) $y \in \mathcal{S}$、つまり $\alpha(x, y) < +\infty$ の場合。

$$p_t(x, y) \asymp t^{\alpha(x,y)-d/\beta} \quad as \quad t \to 0 \tag{5.12}$$

(b) $y \in \bar{\mathcal{S}} \setminus \mathcal{S}$ $(\alpha(x, y) = +\infty)$ の場合。

$b(x) \equiv 0$ とし $\beta' > \beta$ とする。$t \to 0$ のとき $\log p_t(x, y)$ は次の表現をもつ $\Gamma = \Gamma(t)$ により上から押さえられる*:*

$$\Gamma \equiv -\min \sum_{n=0}^{N} (w_n \log(\frac{1}{tk_n}) + \log(w_n!)) + O(\log(\frac{1}{t}) \log\log(\frac{1}{t})) \tag{5.13}$$

ここで *minimum* は、 $\xi_n, n = 1, 2, ...$ による

$$|y - A_{n_1}(x, \xi_1, ..., \xi_{n_1})| \leq t^{1/\beta'}, \tag{5.14}$$

なる $a_0, ..., a_N$ の任意の選択についてとる。ただし、$w_n = \#\ \mathit{of}\ a_n$ は選択における点 a_n の重みであり、$n_1 = \sum_{n=0}^{N} w_n$ である。

ここで条件 (5.11) と (5.14) は互いに関係である。つまり、t が小さくなるにつれて条件 (5.14) はよりきつくなる。一方、条件 (5.11) より、より多くの点 a_i を近似に使えるようになる。

x と a_n が有理点の場合 (たとえば $m = 1, x = 0, a_n = 2^{-n}$)、主張 (b) が Lebesgue 測度に関してほとんどすべての $y \in \bar{\mathcal{S}} (= [0, 1])$ についてなりたっているが、命題 12 より各 $t > 0$ に対し $y \mapsto p_t(x, y)$ は $\bar{\mathcal{S}}$ 上なめらかである。

5.2　定理 10 の証明

この説では定理 10 を証明する。基本的なアイデアは、Lévy 測度 μ を、それと互いに絶対連続であるようなもう一つの確率測度 ν に置き換え、有界変動であるような純ジャンプ過程 $\tilde{x}_.$ でその Lévy 測度が ν に比例するものを構成することである。そしてこの $\tilde{x}_.$ をもとに、$x_.$ の軌跡を近似する Markov chain を構成する。

定理 10(a) の証明

Lemma 6 *(accessible points への下からの評価)* $(\xi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を $\mathbf{R}^d$ 値確率変数の列 *(i.i.d.)* で式 *(5.10)* で与えられる確率法則 $\nu(dz)$ したがい、$z(s)$ と独立なものとする。*Markov chain* $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を $U_0 = x$, $U_{n+1} = U_n + \gamma(U_n, \xi_{n+1}), n \in \mathbf{N}$ により定義する。$y \in \mathbf{R}^d$ とし、ある $n \geq 1, \gamma = \gamma_n \geq 0$ および $c > 0$ で任意の $\epsilon \in (0, 1]$ に対し　$P(|U_n - y| \leq \epsilon) \geq c\epsilon^\gamma$ となるものが存在するとする。このとき

$$p_t(x, y) \geq Ct^{n+(\gamma-d)/\beta} \quad as \quad t \to 0 \tag{5.15}$$

ここで右辺は (n, γ_n) のとり方に依存している。

次に $g(x, dz) = d(H_x^*\nu)(z), z \in P_x \setminus \{x\}$ とおく。ただし、 $H_x^*\nu = \nu \circ H_x^{-1}$ である。仮定の条件式は次の表現をもつ：

$$P(|U_n - y| \leq \epsilon) = \int_{P_x} \cdots \int_{P_{z_{n-1}}} 1_{\{z_n;|z_n-y|\leq\epsilon\}}(z_n) g(x, dz_1) ... g(z_{n-1}, dz_n) \tag{5.16}$$

よって、Lévy 測度が特異 $(\dim \mathrm{supp}\ \ \nu = 0)$ の場合、もし $\gamma = 0$ ならば、$P(|U_n - y| \leq \epsilon) \geq c\epsilon^\gamma$ は点 y が *Markov chain* により到達できること、かつ、(5.16) の右辺からその確率を計算できることを意味する。

上からの評価を得るためには、Markov chain の摂動が必要になる。

$(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ をなめらかな関数列 $\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ とする。新たな Markov chain $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を、$V_0 = \varphi_0(x), V_{n+1} = V_n + (\varphi_{n+1} \circ \gamma)(V_n, \xi_{n+1})$ により構成する。この $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を使って、数列 $(\Phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ を

$$\Phi_n \equiv \sup_{k\leq n, y\in\mathbf{R}^d} (|\varphi_k(y) - y| + |\varphi_k'(y) - I|) \tag{5.17}$$

と定義する。

Lemma 7 *(上からの評価) Choose* $y \neq x$*.* 数列 $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}, \gamma_n \in [0, +\infty]$*,* と、単調非減少列 $(K_n)_{n\in\mathbf{N}}, K_n > 0$ で次を満たすものがあると仮定する*:* 任意の n

と任意の $(\varphi_k)_{k=0}^n$ で $\Phi_n \le K_n$ を満たすものに対し上で定義された V_n があるる $C_n > 0$ について

$$\textit{if} \ \ \gamma_n < +\infty, \quad \textit{then} \quad P(|V_n - y| \le \epsilon) \le C_n \epsilon^{\gamma_n} \quad \textit{for all} \quad \epsilon > 0, \tag{5.18}$$

を満たし、また

$$\textit{if} \quad \gamma_n = +\infty, \quad \textit{then} \quad P(|V_n - y| \le \epsilon) = 0 \ \ \textit{for} \quad \epsilon > 0 \quad \textit{small} \tag{5.19}$$

を満たすとする。

このとき次が成り立つ:

(i) もし $\Gamma < +\infty$ ならば $p_t(x,y) = O(t^{\Gamma})$ *as* $t \to 0$

(ii) もし $\Gamma = +\infty$ ならば、任意の $n \in \mathbf{N}$ に対し $p_t(x,y) = o(t^n)$ *as* $t \to 0$

ただし、$\Gamma \equiv \min_n (n + (\gamma_n - d)/\beta)$ である。

減少のオーダー Γ は (K_n) および (φ_n) の選び方に間接的に依存している。

もしある $n \ge 1$ で $y \notin P_x^{(n)}$ ならば、摂動の大きさ Φ_n が小さくなるように φ_n を取ることにより、$y \notin Q_x^{(n)}$ となるようにできる。ただし、

$$Q_x^{(n)} \equiv \{z_{n-1} + (\varphi_n \circ \gamma)(z_{n-1}, z); z \in \mathrm{supp} \ \ \nu, z_{n-1} \in Q_x^{(n-1)}\}$$

したがって、$K_n > 0$ と $\epsilon > 0$ を小さく取ることにより、γ_n は $+\infty$ となることがありうる。

μ は point mass をもつので、$n \ge \alpha(x,y)$ ならば $P(|U_n - y| \le \epsilon) \ge c, \epsilon \in (0,1]$ である。よって補題 6 より $p_t(x,y) \ge C t^{\alpha(x,y) - d/\beta}$

上からの評価については、 $n < \alpha(x,y)$ の場合、 K_n を小さくとることにより $y \notin Q_x^{(n)}$ とできる。したがって

$$P(|V_n - y| \le \epsilon) = 0 \quad \text{ for } \ \epsilon > 0 \ \ \text{small}$$

であり、 (5.18), (5.19) において $\gamma_n = +\infty$ となる。一方、$n \ge \alpha(x,y)$ の場合には、(5.18) において $\gamma_n = 0$ である $(\varphi_n = id)$。

これより $\Gamma = \alpha(x,y) - d/\beta$ となる。よって

$$p_t(x,y) \asymp t^{\alpha(x,y) - d/\beta} \tag{5.21}$$

Theorem 10(b) の証明

$\mathcal{S}_{t,k} = ([0,t]^k / \sim)$ とし、$\mathcal{S}_t = \amalg_{k \ge 0} \mathcal{S}_{t,k}$ とおく。ただし、$\amalg_{k \ge 0}$ は直和を表し、$\sim$ は積空間 $[0,t]^k$ の元を置換により同一視するという意味である。

$r = r(t) = t^{1/\beta}$ とおく。$z^r(s)$ を Lévy 測度 $\mu.1_{\{|z|\le r\}}(z)$ をもつ Lévy 過程とし、 $\tilde{z}^r(s)$ を Lévy 測度 $\mu.1_{\{|z|>r\}}(z)$ をもつ Lévy 過程とする。すなわち $z^r(s) = \sum_{u\le s}\Delta z(u)1_{\{|\Delta z(u)|\le r\}}$, $\tilde{z}^r(s) = \sum_{u\le s}\Delta z(u)1_{\{|\Delta z(u)|>r\}}$

$\tilde{z}^r(s)$ の $[0,t]$ におけるジャンプ時の分布 $\tilde{P}_{t,r}$ は

$$\int_{\{\#S_t=k\}} f(S_t)\ d\tilde{P}_{t,r}(S_t) \tag{5.22}$$

$$=\left\{\left(t\int 1_{\{|z|>r\}}(z)\mu(dz)\right)^k\left(\frac{1}{k!}\right)\exp\left(-t\int 1_{\{|z|>r\}}(z)\mu(dz)\right)\right\}$$
$$\times\frac{1}{t^k}\int_0^t\cdots\int_0^t f(s_1,\cdots,s_k)\ ds_1\cdots ds_k$$

で与えられる。ただし、f は $\mathcal{S}_{t,k}$ 上の関数 ($[0,t]^k$ 上の対称関数) である。

$S_t\in\mathcal{S}_t$ を与えて、$x_s(r,S_t,x)$ を次の SDE の解とする：

$$x_s(r,S_t,x) = x - \int_0^s du\int 1_{\{|z|>r\}}(z)\gamma(x_u(r,S_t,x),z)\mu^r(dz) \tag{5.23}$$
$$+\sum_{u\le s}^{c}\gamma\Big(x_{u^-}(r,S_t,x),\Delta z^r(u)\Big)+\sum_{s_i\in S_t, s_i\le s}\gamma(x_{s_i-}(r,S_t,x),\xi_i^r)$$

ただし、$(\xi_n^r)_{n\in\mathbf{N}}$ は次の確率法則にしたがう確率変数 (i.i.d.) である：

$$\mu^r(dz) = \frac{1_{\{|z|>r\}}(z).\mu(dz)}{\int 1_{\{|z|>r\}}(z).\mu(dz)}$$

$b(x)\equiv 0$ という仮定により、各 $0<r<1$ について $x_s(r,S_t,x)$ はマルチンゲールである。

この $(\xi_n^r)_{n\in\mathbf{N}}$ を使って新しい Markov chain$(U_n^r)_{n\in\mathbf{N}}$ を次のように定義する：$U_0^r = x$ and $U_{n+1}^r = U_n^r + \gamma(U_n^r,\xi_{n+1}^r), n\in\mathbf{N}$

命題 12 により、仮定 **(A.0)** through **(A.3)** のもとで、$x_s(r,S_t,x)$ の確率法則は各 $s>0$ に対し C_b^∞ 密度関数 $p_s(r,S_t,x,y)$ をもつ。

実際、$0\le s\le t$ とする。$S_t=\emptyset$ の場合には、命題 12 における測度 $\mu(dz)$ として $1_{\{|z|\le r\}}.\mu(dz)$ をとることができる。したがって $x_s(r,\emptyset,x)$ $(= x_s(r,S_t,x)|_{S_t=\emptyset})$ の確率法則 $p_s(r,\emptyset,x,dy)$ は密度関数をもつ：$p_s(r,\emptyset,x,dy) = p_s(r,\emptyset,x,y)dy$

次に一般の場合を考える。$\tilde{z}^r(s)$ と $z^r(s)$ は独立であるから、$x_s(r,S_t,x)$ の確率法則 $p_s(r,S_t,x,dy)\equiv P(x_s(r,S_t,x)\in dy)$ は次のように表現される：

$$p_s(r,S_t,x,dy) = \int dz_0'\int_{P_{z_0'}} p_{s_1}(r,\emptyset,x,z_0')\ g_r(z_0',dz_1)$$

$$\times\int dz_1'\int_{P_{z_1'}} p_{s_2-s_1}(r,\emptyset,z_1,z_1')\ g_r(z_1',dz_2)$$

$$\cdots \int dz'_{n_1-1} \int_{P_{z'_{n_1-1}}} p_{s_{n_1}-s_{n_1-1}}(r,\emptyset,z_{n_1-1},z'_{n_1-1}) g_r(z'_{n_1-1},dz_{n_1})\, p_{t-s_{n_1}}(r,\emptyset,z_{n_1},dy)$$

if $S_t \in \mathcal{S}_{t,n_1}$ ここで $g_r(x,dz) = P(x+\gamma(x,\xi_i^r) \in dz)$ である。

一方、再び $\tilde{z}^r(s)$ と $z^r(s)$ の独立性から、測度 N の factorization(cf. [9] p. 71) を使って

$$p_s(x,dy) = \int_{\mathcal{S}_t} p_s(r,S_t,x,dy) d\tilde{P}_{t,r}(S_t)$$

となる。命題 12 により、左辺は dy に関する密度関数 $p_s(x,y)$ をもつ。したがって $p_s(r,S_t,x,dy)$ は $d\tilde{P}_{t,r}$-a.s. に dy に関して絶対連続である。これより積分記号下の微分より

$$p_s(x,y) = \int_{\mathcal{S}_t} (p_s(r,S_t,x,dy)/dy)(y) d\tilde{P}_{t,r}(S_t).$$

導関数 $(p_s(r,S_t,x,dy)/dy)(y)$ は $d\tilde{P}_{t,r} \otimes dy-$a.e. に唯一つきまり、これを $p_s(r,S_t,x,y)$ とかく。($d\tilde{P}_{t,r}|_{\mathcal{S}_{t,k}}$ は $\mathcal{S}_{t,k}$ 上の一様分布であるから、 $(p_s(r,S_t,x,dy)/dy)(y)$ は $ds \otimes dy-$a.e. に唯一つきまるといってもよい。) 写像 $y \mapsto p_s(x,y)$ はなめらかであるから写像 $y \mapsto p_s(r,S_t,x,y)$ も ds-a.s. にそうであり、よって $p_s(r,S_t,x,y)$ は ds-a.e. になめらかな密度関数である。

$s = t$ とすると

$$p_t(x,y) = \int_{\mathcal{S}_t} p_t(r,S_t,x,y) \tilde{P}_{t,r}(S_t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_t(k,r,x,y) \tag{5.24}$$

ただし

$$p_t(k,r,x,y) = \int_{\mathcal{S}_{t,k}} p_t(r,S_t,x,y) d\tilde{P}_{t,r}(S_t)$$

よって

$$\begin{aligned} p_t(x,y)dy &= E^{\tilde{P}_{t,r}}[P(x_t(r,S_t,x) \in dy)] \qquad (5.25) \\ &= E^{\tilde{P}_{t,r}} E^{(\mu^r)^{\otimes \# S_t}}[P(x_t(r,S_t,x) \in dy | S_t, \xi_1^r, ..., \xi_{\# S_t}^r)] \end{aligned}$$

となる。

ここで $S_t \in \mathcal{S}_t$ に対し、 $S_t \in \mathcal{S}_{t,k}$ の場合 $n_1 = k$ と置くと

$$\begin{aligned} & P(x_t(r,S_t,x) \in dy | S_t) \\ = & E^{(\mu^r)^{\otimes \# S_t}}[P(x_t(r,S_t,x) \in dy : |y - U_{n_1}^r| \le t^{1/\beta'} | S_t, \xi_1^r, ..., \xi_{n_1}^r)] \qquad (5.26) \\ & + E^{(\mu^r)^{\otimes \# S_t}}[P(x_t(r,S_t,x) \in dy : |y - U_{n_1}^r| > t^{1/\beta'} | S_t, \xi_1^r, ..., \xi_{n_1}^r)] \end{aligned}$$

はじめに、与えられた $y = x_t(r,S_t,x)$ with $S_t \in \mathcal{S}_{t,n_1}$ に対し $P(|y - U_{n_1}^r| \le t^{1/\beta'}) \equiv E^{(\mu^r)^{\otimes n_1}}[P(|y - U_{n_1}^r| \le t^{1/\beta'} | \xi_1^r, ..., \xi_{n_1}^r)]$ を評価する。$(\xi_i^r)_{i=1}^{n_1}$ の中で使った a_n の個数を表す確率変数を W_n とする。

$n_1 \in \mathbf{N}$ を与えて $(w_n)_{n=0}^N$, $w_n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ を $n_1 = \sum_{n=0}^N w_n$ となるような整数列とする。W_n は平均 tk_n の Poisson 分布に従うから

$$P(\text{for all } \ n \le N, \ W_n = w_n \ \text{ and } \ |y - U_{n_1}^r| \le t^{1/\beta'})$$
$$\le \Pi_{n=0}^N \frac{1}{w_n!}(tk_n)^{w_n} e^{-tk_n}$$

となる。したがって

$$\log P(\text{for all } \ n \le N, \ W_n = w_n \ \text{ and } \ |y - U_{n_1}^r| \le t^{1/\beta'})$$
$$\le -\sum_{n=0}^N (w_n \log(1/(tk_n)) + \log(w_n!) + tk_n) \tag{5.27}$$
$$= -\sum_{n=0}^N (w_n \log(1/(tk_n)) + \log(w_n!)) + O(1)$$

数列 $(w_n)_{n=0}^N$ で、ある $n_1 \in \mathbf{N}$ があって以下の条件 $(*)$ を満たしながら動く deterministic chain $(A_n^r)_n$ が $|y - A_{n_1}^r| \le t^{1/\beta'}$ となっているものの全体を $\mathcal{W}$ とする: $(*)$ $w_n = (\#$ of a_n's which appear in $\xi_1^r, ..., \xi_{n_1}^r)$ and $n_1 = \sum_{n=1}^N w_n$ ただし、A_n^r は $U_{n_1}^r$ の定義に現れる ξ_i^r を対応する a_n で置き換えたものである。(5.27) より

$$\log P\begin{pmatrix} \text{there exists } (w_n) \in \mathcal{W} \text{ such that for all } n \le N, \\ W_n = w_n \ \text{ and } \ |y - U_{n_1}^r| \le t^{1/\beta'} \end{pmatrix} \tag{5.28}$$
$$\le -\min_{\mathcal{W}} \sum_{n=0}^N (w_n \log(1/(tk_n)) + \log(w_n!)) + O(\log|\mathcal{W}|)$$

一方、W_n は平均 tk_n の Poisson 確率変数であり、$n \le N$ について tk_n の和 $t\sum_{n=0}^N k_n$ は有限である。よって $E[\exp W_n] < +\infty$ であり、$P(W_n \ge N^3) \le Ce^{-N^3}$ となる。よって

$$P(W_n \ge N^3 \ \text{ and } \ |y - U_{n_1}^r| \le t^{1/\beta'}) \le Ce^{-N^3} \le Ce^{-c(\log(1/t))^3} \tag{5.29}$$

これは上の主要項の確率にくらべてかなり小さいので、$w_n \le N^3$ (よって $n_1 \le N^4$) という制限をしても差し支えない。これより $|\mathcal{W}| = O((N^3)^N)$ であり、

$$\log|\mathcal{W}| = O(N \log N) = O(\log(1/t) \log\log(1/t))$$

となる。

$x_t(r, \emptyset, x)$ を (5.23) で与えられる確率過程で $S_t = \emptyset$ としたものとし、$p_t(r, \emptyset, x, y)$ をその密度関数とする。定理 9 (a) より $p_t(r, \emptyset, x, y) \le Ct^{-d/\beta}$ as $t \to 0$ である。$p_t(r, S_t, x, dy)$ の表現から、これより、与えられた $S_t \in \mathcal{S}_{t,n_1}, \xi_1^r, ..., \xi_{n_1}^r$ に

対し $P(x_t(r,S_t,x)\in dy|S_t,\xi_1^r,...,\xi_{n_1}^r)/dy=O(t^{-d/\beta})$ as $t\to 0$ であることがわかる。

$z^r(u)$ と (ξ_i^r) は独立であるから、(5.24) と Fubini の定理より

$$\log(E^{\tilde{P}_{t,r}|\mathcal{S}_{t,n_1}}E^{(\mu^r)^{\otimes n_1}}[P(x_t(r,S_t,x)\in dy:|y-U_{n_1}^r|\le t^{1/\beta'}|S_t,\xi_1^r,...,\xi_{n_1}^r)]/dy) \tag{5.30}$$

$$\le \log\left(t^{-d/\beta}\exp(-\min_{\mathcal{W}}\sum_{n=0}^{N}(w_n\log(1/(tk_n))+\log(w_n!))\right.$$
$$\left.+O(\log(1/t)\log\log(1/t))\right))$$

$$\le -\min_{\mathcal{W}}\sum_{n=0}^{N}(w_n\log(1/(tk_n))+\log(w_n!))+O(\log(1/t)\log\log(1/t))$$

となる。

第 2 項については、次の補題を用いる。

Lemma 8 $y=x_t(r,S_t,x),S_t\in\mathcal{S}_{t,n_1}$ と $U_{n_1}^r=A_{n_1}(x,\xi_1^r,...,\xi_{n_1}^r)$ を与えたときある $k>0$ と $C_0>0$ があって任意の $p>k$ に対し

$$E^{\tilde{P}_{t,r}|\mathcal{S}_{t,n_1}}E^{(\mu^r)^{\otimes n_1}}[P(|y-U_{n_1}^r|>t^{1/\beta'}\quad|\quad S_t,\xi_1^r,...,\xi_{n_1}^r)]$$
$$\le n_1C_0\exp[-(p-k)(\log(1/t))^2]$$

as $t\to 0$ となる。

$\xi_1^r,...,\xi_{n_1}^r$ が与えられるとき、上と同様に $E^{\tilde{P}_{t,r}|\mathcal{S}_{t,n_1}}[P(x_t(r,S_t,x)\in dy|S_t,\xi_1^r,...,\xi_{n_1}^r)/dy]=O(t^{-d/\beta})$ as $t\to 0$ である。これを $\{|y-U_{n_1}^r|>t^{1/\beta'}\}$ 上 $(\mu^r)^{\otimes n_1}$ に関して積分する。$z^r(u)$ と (ξ_i^r) は独立であるから補題 8 より

$$E^{\tilde{P}_{t,r}|\mathcal{S}_{t,n_1}}E^{(\mu^r)^{\otimes n_1}}[P(x_t(r,S_t,x)\in dy:|y-U_{n_1}^r|>t^{1/\beta'}|S_t,\xi_1^r,...,\xi_{n_1}^r)]/dy$$
$$\le n_1C_0't^{-d/\beta}\exp[-(p-k)(\log(1/t))^2],\ \text{as}\ t\to 0$$

これより

$$\log(E^{\tilde{P}_{t,r}|\mathcal{S}_{t,n_1}}E^{(\mu^r)^{\otimes n_1}}[P(x_t(r,S_t,x)\in dy:|y-U_{n_1}^r|>t^{1/\beta'}|S_t,\xi_1^r,...,\xi_{n_1}^r)]/dy)$$
$$\le -(p-k)(\log(1/t))^2+\max_{n_1\le N^4}\log n_1+\log C_0'+O(\log(1/t))$$
$$\le -(p-k)(\log(1/t))^2+O(\log(1/t))$$

ここで、(5.29) より $W_n\le N^3$ なる W_n について捜すことにし、また、$\max_{n_1\le N^4}\log n_1=\log N^4=O(\log(1/t))$ であることを使った。$p>k$ は任意であるから、この項は (5.30) 右辺の誤差項に含まれる。

結局 $E^{\tilde{P}_{t,r}|_{\mathcal{S}_{t,n_1}}}E^{(\mu^r)^{\otimes n_1}}[...]$ を $n_1 = 0, ..., N^4$ について足し合わせると

$$\log(E^{\tilde{P}_{t,r}|_{\cup_{k\le N^4}\mathcal{S}_{t,k}}}E^{(\mu^r)^{\otimes \# S_t}}[P(x_t(r,S_t,x)\in dy|S_t,\xi_1^r,...,\xi_{\# S_t}^r)]/dy)$$

$$\le -\min_{\mathcal{W}}\sum_{n=0}^{N}(w_n\log(1/(tk_n))+\log(w_n!)) \qquad (5.31)$$

$$+O(\log(1/t)\log\log(1/t))+O(\log(1/t))$$

(5.25), (5.31) より

$$\log p_t(x,y)\le -\min_{\mathcal{W}}\sum_{n=0}^{N}(w_n\log(1/(tk_n))+\log(w_n!))+O(\log(1/t)\log\log(1/t)) \qquad (5.32)$$

deterministic chain $A_{n_1}(x,\xi_1,...,\xi_{n_1})$ と、Markov chain $U_{n_1}^r$ で $\xi_1,...,\xi_{n_1}$ が (5.11) を満たしながら $\{a_n; n=0,...,N\}$ を使ったものの間には軌跡に差がないので、定理の主張を得る。 q.e.d.

関連図書

[1] Bichteler K, Gravereaux JM, Jacod J. Malliavin Calculus for Processes with Jumps. New York, USA, Gordon and Breach Science Publishers, 1987.

[2] Billingsley P. Convergence of Probability Measures. New York, USA, Wiley-Interscience, 1999.

[3] Hoh W, Jacob N. Some Dirichlet forms generated by pseudo differential operators. Bull Sci Math 1992, 116, 383–398.

[4] Ishikawa Y. On the lower bound of the density for jump processes in small time. Bull. Sc. math 1993, 117, 463–483.

[5] Ishikawa Y. Density estimate in small time for jump processes with singular Lévy measures. Tohoku Math J 2001, 53, 183–202.

[6] Ishikawa Y, Kunita H. Malliavin calculs on the Wiener-Poisson space and its application to canonical SDE with jumps. Stochastic Process. Appl 2008, 116, 1743–1769.

[7] Itô K. Kakuritsu-ron, I–III. (in Japanese) [Probability theory, I–III.] 2nd ed. Tokyo, Japan, Iwanami Shoten, 1983.

[8] Itô K. Stochastic Processes : Lectures given at Aarhus University, Berlin, Germany, Springer, 2004.

[9] Jacod J. Calcul stochastique et problèm des martingales. Lect Notes in Math 714. Berlin, Germany, Springer-Verlag, 1975.

[10] Kunita H, Watanabe S. On squqre integrable martingales. Nagoya Math J 1967, 30, 209–245.

[11] Kunita H. Stochastic differential equations with jumps and stochastic flows of diffeomorphisms. In: Ikeda N., ed. Itô's stochastic calculus and probability theory. Tokyo, Japan, Springer-Verlag, 1996, 197–211.

[12] Kunita H. Stochastic differential equation based on Lévy processes and stochastic flows of diffeomorphisms. In: Rao, MM., ed. Real and stochastic analysis. Boston, USA, Birkhauser, 2004, 305–373.

[13] Kunita H. Analysis of nondegenerate Wiener-Poisson functionals and its application to Itô's type SDE with jumps. Sankhya 2011, 73-A, 1–45.

[14] Kurtz TG, Pardoux E, Protter P. Stratonovich stochastic differential equations driven by general semimartingales. Ann Inst Henri Poincaré 1995, 31, 351-377.

[15] Léandre R. Densité en temps petit d'un processus de sauts. In: Azéma J, Meyer PA, Yor M., eds. Séminaire de Proba 21, Lecture Notes in Math 1247. Berlin, Germany, Springer-Verlag, 1987, 81–99.

[16] Mizohata S. The theory of partial differential equations. Cambdirge, UK, Cambdirge Univ Press, 1973.

[17] Marcus SI. Modeling and approximation of stochastic differential equations driven by semimartingales. Stochastics 1980/81, 4, 223–245.

[18] Nualart D, Vives J. Anticipative calculus for the Poisson process based on the Fock space. In: Azéma J, Meyer PA, Yor M., eds. Séminaire de Probabilités 24, Lecture Notes in Math 1426. Berlin, Germany, Springer 1990, 154–165.

[19] Di Nunno G, Øksendal B, Proske F. Malliavin calculus for Lévy processes with applications to finance. Berlin, Germany, Springer, 2008.

[20] Picard J. On the existence of smooth densities for jump processes. Probab Th Relat Fields 1996, 105, 481–511. Erratum : ibid 2010, 147, 711–713.

[21] Picard J. Formules de dualité sur l'espace de Poisson. Ann Inst Henri Poincaré 1996, 32, 509–548.

[22] Picard J. Density in small time for Lévyprocesses. ESAIM Probab Statist 1997, 1, 358–389 (electronic).

[23] Picard J. Density in small time at accessible points for jump processes. Stochastic Process Appl 1997, 67, 251–279.

[24] Privault N. Stochastic analysis in discrete and continuous settings with normal martingales. Lecture Notes in Math 1982. Berlin, Germany, Springer-Verlag, 2009.

[25] Protter Ph. Stochastic Integration and Differential Equations. 2nd ed. Berlin, Germany, Springer-Verlag, 2005.

[26] Rogers LCG, Williams D. Diffusions, Markov Processes, and Martingales : Itô Calculus. Cambridge, UK, Cambridge Univ Press, 2000.

[27] Sato K. Additive Processes (in Japanese). Tokyo, Japan, Kinokuniya, 1990 ; English version: Lévy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge, UK Cambridge University Press, 1999.

[28] Watanabe S. Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and its applications to heat kernels. Ann Probab 1987, 15, 1–39.

[29] Yoshida N. Conditional expansions and their applications. Stochastic Process Appl 2003, 107, 53–81.