講義ノート (演習問題-2)　2022–2023

Yasushi Ishikawa

第1章　基礎概念

- 各節は **A** と **B** から成ります。ただし、**A** のない節、**B** のない節もあります。
- 解いた問題の合計数で評価します.

1.1　Jordan 測度⊠Lebesgue 測度

A

Problem 1.1.0
以下を示せ。

(1) $a, b \in \mathbb{R}$ とする. このとき $(\forall \varepsilon > 0,\ a < b + \varepsilon) \ \Rightarrow\ a \leq b$ が成り立つ.

(2) $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ とする. このとき $(\forall x \in A,\ x < \alpha) \ \Rightarrow\ \sup A \leq \alpha$ が成り立つ.

Problem 1.1.1 ($\star$) 以下の集合を求めよ.

$$(1)\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1\right], \quad (2)\ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, 1\right)$$

Problem 1.1.2 ($\star$) $A \subset B \subset \mathbb{R}$ ならば $\sup A \leq \sup B$ が成り立つことを示せ.

Problem 1.1.3 A, B, C を集合とする。集合 A, B の対称差 $A\Delta B$ を $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ と定義する。次を示せ。
(1) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = (A\Delta B) \cup (B\Delta C)$
(2) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$

Problem 1.1.4 ($\star$) 定義から $m^\star(A) \le C(A) \quad (A \subset \mathbb{R}^n)$ を示せ.

B

1.2 Lebesgue 測度の性質

A

Problem 1.2.1 ($\star$) m^*, m_* はルベーグ外測度，内測度とする．以下を示せ.

(1) 単調性: $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \ m^*(A_1) \le m^*(A_2)$.

(2) $0 \le m_*(A) \le m^*(A) \quad (A \subset \mathbb{R}^n)$.

Problem 1.2.2 ($\star\star$) 以下を示せ[1].

(1)

$$A, B \in \mathcal{M} \ \Rightarrow \ m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

(2) $A_j \in \mathcal{M}$ は集合の増加列，すなわち $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$. とする．このとき以下を示せ.

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

(3) $A_j \in \mathcal{M}$ は集合の減少列，すなわち $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ とし，さらに $m(A_1) < +\infty$ と仮定する．このとき以下を示せ.

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

[1] 本問は，σ 加法族の性質と測度の性質（1.3.5 定理 1, 1.3.6 命題 1）から示すことができる．Lebesgue 測度の定義に戻る必要はない.

Problem 1.2.3 $(\Omega, \mathcal{M}, m)$ を確率空間とし、$(A_j)_{j=1,2,...}, A_j \in \mathcal{M}$ を $m(A_j) = 1, j = 1, 2, ...$ となる集合列とする。$m(\cap_{j=1}^{\infty} A_j) = 1$ となることを示せ。

Problem 1.2.4 $(\Omega, \mathcal{M}, m)$ を測度空間とし、$A_1, A_2, ... \in \mathcal{M}$ とする。次を示せ。

(1) $m(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$

(2) $m(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} m(A_n)$

(3) $m(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty$ ならば

$$m(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geq \limsup_{n\to\infty} m(A_n)$$

B

1.3 Lebesgue 可測集合

A

Problem 1.3.1 *(1)* $\Omega = \{$ りんご，みかん，すいか $\}$ の加法族をすべて求めよ。

(2) $\Omega = [0, 1]$ とする。次の集合から生成された σ-加法族を、各々求めよ。

(i) $(0, \frac{1}{2})$

(ii) $[0, \frac{1}{4}), (\frac{3}{4}, 1]$

(iii) $[0, \frac{3}{4}), (\frac{1}{4}, 1]$

Problem 1.3.2 次を証明せよ。

$$\mathcal{E} = \{(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]; -\infty \leq a_i \leq b_i \leq +\infty, i = 1, 2\}$$

とおく。

(a) 次を示せ：

(i) $\emptyset \in \mathcal{E}$

(ii) $A \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{E}$ ならば $A \cap B \in \mathcal{E}$

(iii) $A \in \mathcal{E}$ ならば、ある $n \geq 1$ と $A_1, ..., A_n \in \mathcal{E}$ があって、$A^c = \sum_{j=1}^{n} A_j$.

ただし、$B=\sum_{j=1}^n B_j$ とは、

$$B=\cup_{j=1}^n B_j \text{ かつ } B_i\cap B_j=\emptyset \ (i\neq j)$$

という意味である。

(b)

$$\mathcal{A}=\{A=\sum_{j=1}^n A_j; A_1,...,A_n\in\mathcal{E}\}$$

とおく。次を示せ：

(i) $\emptyset\in\mathcal{A}$

(ii) $A\in\mathcal{A}$ ならば $A^c\in\mathcal{A}$

(iii) $A,B\in\mathcal{A}$ ならば $A\cap B\in\mathcal{A}$

（ヒント）（b）の証明には，次の表現を使ってよい。

$$A=\sum_{j=1}^{m_1}A_j,\ B=\sum_{j=1}^{m_2}B_j \text{のとき } A\cap B=\sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2}(A_i\cap B_j)$$

Problem 1.3.3 集合 X とその上の σ-加法族 $\mathcal{A}_X$ の組 $(X,\mathcal{A}_X)$ を可測空間という。$(X,\mathcal{A}_X),(Y,\mathcal{A}_Y)$ を 2 つの可測空間とし、$\varphi: X\to Y$ を写像とする。

(1) $\{\varphi^{-1}(B); B\in\mathcal{A}_Y\}$ は X の σ-加法族であることを示せ。

(2) $\{B\subset Y; \varphi^{-1}(B)\in\mathcal{A}_X\}$ は Y の σ-加法族であることを示せ。

Problem 1.3.4 Ω を任意の集合とし、Ω の部分集合の族で σ-加法族になっているものを $\mathcal{A},\mathcal{B}$ とする。

(1) $\mathcal{A}\cap\mathcal{B}$ は σ-加法族であることを示せ。

(2) $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$ のとき、$\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ が σ-加法族にならない例を作れ。

Problem 1.3.5 ($\star\star$) 開集合，閉集合がボレル集合であることを示そう．開区間全体の集合 $\mathcal{I}$, 閉区間全体の集合を $\bar{\mathcal{I}}$, 半開区間全体の集合を $\tilde{\mathcal{I}}$ とおく．すなわち，

$$\mathcal{I}:=\{I\subset\mathbb{R}^n \ : \ \textit{open interval}\},$$

$$\bar{\mathcal{I}}:=\{\bar{I}\subset\mathbb{R}^n \ : \ \textit{closed interval}\},$$

また

$$\tilde{\mathcal{I}}:=\{\tilde{I}\subset\mathbb{R}^n \ : \ \exists\{a_j\}_{j=1}^n,\ \exists\{b_j\}_{j=1}^n \ \textit{s.t.}\ \tilde{I}=\Pi_{j=1}^n[a_j,b_j)\}$$

とする．次の問に答えよ．

(1) 講義でボレル集合 $\mathcal{B}_n$ を $\tilde{\mathcal{I}}$ を含む最小の σ 加法族と定義した．集合族 $\mathcal{A}$ を含む最小の σ 加法族を $\sigma[\mathcal{A}]$ と書くことにすると，$\mathcal{B}_n := \sigma[\tilde{\mathcal{I}}]$ ということ．さて，$\mathcal{B}_n = \sigma[\mathcal{I}]$ を示せ．

(2) $A \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする．このとき，ある開区間の列 I_j があって，$A = \cup_{j=1}^{\infty} I_j$ とかけることを示せ．

(3) *(1), (2)* を用いて開集合，閉集合が *Borel* 集合であることを示せ．

注意：証明しなくてよいが，閉区間全体を含む最小の可算加法族も，閉集合全体を含む最小の可算加法族も，ボレル集合族 $\mathcal{B}_n$ と一致する．証明は同様．

B

Problem 1.3.6 ($\star\star$) カントール集合．

1. 可算集合は測度 *0* であることを示せ（つまり測度正の可測集合は非可算集合である）．

2. 非可算な可測集合だからといって，測度が正とは限らない．その例を考える．C_0 を閉区間 $[0,1]$ とする．C_0 を三等分して中央の開区間 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ を取り除き，$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ とする．さらに C_1 の二つの閉区間をそれぞれ三等分して中央の開区間をそれぞれ取り除いた集合を C_2 とおく．これを繰り返すことで，単調減少集合列 $C_0 \supset C_1 \supset \cdots \supset C_n \supset C_{n+1} \supset \cdots$ が構成できる．$C := \cup_{n=0}^{\infty} C_n$ をカントール集合という．カントール集合 C に対して以下を示せ．

   (a) C はルベーグ可測集合であることを示せ（ボレル可測であることを示せば良い）．

   (b) $m(C) = 0$ を示せ．

   (c) C は非可算集合である[2]．よって C は非可算だが測度 *0* の集合の例になっている．

[2]非可算集合であることの証明は，例えば伊藤清三，ルベーグ積分入門，裳華房，p.41–43 参照

Problem 1.3.7 ($\star\star$) Ω の部分集合族 $\mathcal{I} \subset 2^{\Omega}$ が

$$I_1, I_2 \in \mathcal{I} \implies I_1 \cap I_2 = \emptyset,\ \cup_{I \in \mathcal{I}} I = \Omega$$

を満たすとする。

$$\mathcal{F}_1 = \{\cup_{n \in \mathbf{N}} I_n; I_n \in \mathcal{I} \cup \{\emptyset\}, n \in \mathbf{N}\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{(\cup_{n \in \mathbf{N}} I_n)^c; I_n \in \mathcal{I} \cup \{\emptyset\}, n \in \mathbf{N}\}$$

とし、$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ とおく。以下を証明せよ。

(1) $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{F}$ である。

(2) 関数 $f : \Omega \to \mathbf{R}$ が $\mathcal{F}/\mathcal{B}_1$ 可測であることと、各 $I \in \mathcal{I}$ ごとに I で定数関数であることは同値である。ただし、$\mathcal{B}_1$ は 1 次元ボレル集合の全体を表す。

1.4　測度の例

A

$\mathcal{A}$ を σ 加法族 (可算加法族) とする．$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ が

1. (Nonnegativity)　$\mu(\phi) = 0$ and $0 \le \mu(A) \le +\infty$ for all $A \in \mathcal{A}$.
2. (Countable additivity)　$A_j \in \mathcal{A}$: disjoint $\Rightarrow$ $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

を満たす時，μ は $\mathcal{A}$ 上の**測度**という.

Problem 1.4.1 ($\star$) X を空でない集合とする．2^X *(*$=X$ の部分集合全体*)* 上定義された個数測度（*counting measure*）*:*

$$\sharp(A) := A \text{ の元の個数}, \textit{if}\ \ A : \text{有限集合};\quad = +\infty \ \ \textit{if}\ A : \text{無限集合},$$

は，上の条件 *1,2* を満たすことを示せ（従って測度である）.

Problem 1.4.2 ($\star$) 確率測度の単純な例：一回だけさいころを投げることの数学モデル．$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とする（さいころの出る目の集合）．

このとき 2^X は起こりうる事象すべてと理解できる．例えば，$\{2, 3\} \in 2^X$ は,「さいころを一回投げる時, *2* または *3* の目が出る事象」と理解することにする．さて，$A \in 2^X$ にたいして $P(A) := \dfrac{\sharp(A)}{\sharp(X)} = \dfrac{\sharp(A)}{6}$ と定め，これを「事象 A が起こる確率」と呼ぶことにする．

このとき P が測度の条件 *1,2* を満たすことを示せ．なお，この測度のように，全空間の測度 $P(X) = 1$ となる測度を**確率測度**と呼ぶ.

Problem 1.4.3 ($\star$) X を非可算な集合とする．以下のように 2^X 上で定義された ν は，上の条件 *1,2* を満たすことを示せ（従って測度である）．

$$\nu(A) := 0\ ,\quad \textit{if } A : \text{たかだか可算}; = +\infty \quad \textit{if } A : \text{非可算}.$$

Problem 1.4.4 ($\star\star$) 次のように定める．

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A \textit{ or } A^c \textit{ is countable}\},\ \mu : \mathcal{A} \to [0, \infty];$$

$$\begin{aligned} \mu = &\ 0 \quad \textit{if } A : \text{たかだか可算}; \\ &= 1 \quad \textit{if } A^c : \text{たかだか可算}. \end{aligned}$$

このとき，$\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}$ 上の σ-加法族をなし，μ は $\mathcal{A}$ 上の測度となることを示せ.

Problem 1.4.5 *(ボンフェローニ (Bonferroni) の不等式)* 次を示せ。

$$m(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n m(A_i) - \sum_{i<j} m(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} m(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+1} m(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n), \quad n = 1, 2, ...$$

B

Problem 1.4.6 収束する正項級数 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ が与えられたとき、集合 $A \subset \mathbf{N}$ に対して $\mu(A) = \sum_{n \in A} a_n$ とおく。μ は非負な σ-加法的測度になることを示せ。

Problem 1.4.7 次を示せ。

(1) $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする。任意の測度有限 *(*$\mu(\Omega) < +\infty$*)* な可測集合 $A \in \mathcal{F}$ について、その中で可測な 1 点集合が測度正になる点たちの集合

$$A' = \{x \in A; \{x\} \in \mathcal{F}, \mu(\{x\}) > 0\}$$

は加算集合である。

(2) $\mathbf{R}$ 上の非減少関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ の不連続点の集合は加算集合である。

Problem 1.4.8 有限測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ の可測集合 A, B, C について、以下にこたえよ。

$$1_{A \cup (B^c \cap C)} = 1_A + 1_C - 1_{B \cap C} - 1_{A \cap C} + 1_{A \cap B \cap C}$$

を証明し、これを用いて $\mu(A \cup (B^c \cap C))$ を A, B, C とそれらの交差 *(=*共通部分*)* の測度のみを用いて（補集合や和集合を用いずに）表せ。

Problem 1.4.9 *(1)* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を 1 次元ルベーグ測度空間とする。

集合 A, B, C がルベーグ可測集合であることを証明し、その測度 $\mu(A), \mu(B), \mu(C)$ を計算せよ。

(i) 1 点だけを要素とする集合

$$A = \{x\}$$

(ii) 有理数の集合

$$B = \mathbf{Q}$$

(iii) 0 以上 1 以下の無理数の集合

$$C = (0, 1] \cap \mathbf{Q}^c$$

(2) d を 2 以上の整数とし、$(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}, \mu)$ を d 次元ルベーグ測度空間とする。a を実数とし、第 1 座標が a である集合

$$D = \{(x_1, ..., x_d); x_1 = a\}$$

が d 次元ルベーグ可測集合であることを証明し、その d 次元ルベーグ測度 $\mu(D)$ を計算せよ。

1.5 Lebesgue積分, 単調収束定理, Lebesgueの収束定理

A

Problem 1.5.1 $\Omega = (0, \infty)$ とする。$f(x) = 2 \cdot 1_{[1,3]} + 4 \cdot 1_{[4,5]} + 3 \cdot 1_{[6,9]}$ のグラフを書け。そのルベーグ測度 dx に関する積分値を求めよ。

Problem 1.5.2 $X = \mathbf{R}$ 上の非負可測関数 f に対して、各 n ごとに

$$A_{n,j} = \{x \in X; \frac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{j}{2^n}\}, j = 1, 2, ..., n2^n$$

$$B_n = \{x \in X; f(x) \geq n\}$$

とおき、単関数

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n2^n} 1_{A_{n,j}}(x) \frac{j-1}{2^n} + n 1_{B_n}(x)$$

をつくる。

(1) $f(x) = x^2$ に対し、$f_2(x), f_3(x)$ を図示せよ。
(2) $f(x) = |\sin x|$ に対し、$f_2(x), f_3(x)$ を図示せよ。
(3) $f(x) = |\sin(x^2 + 8)|$ に対し、$f_2(x), f_3(x)$ を図示せよ。
(4) $f(x) = e^x$ に対し、$f_2(x), f_3(x)$ を図示せよ。
図示における定義域は適当な範囲を設定せよ。

Problem 1.5.3 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は任意の $x, y \in \mathbf{R}$ に対し

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

をみたし、かつ連続であることがわかっている。このとき実は

$$f(x) = f(1)x$$

であることを示せ。

Problem 1.5.4 次の関数は与えられた定義域でルベーグ積分可能かどうかを調べよ。

(1) $u(x) = \frac{1}{x},\ x \in [1, \infty)$
(2) $u(x) = \frac{1}{x^2},\ x \in [1, \infty)$
(3) $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}},\ x \in (0, 1]$
(4) $u(x) = \frac{1}{x},\ x \in (0, 1]$

Problem 1.5.5 ($\star$) $f_n(x) = n^2 x e^{-nx} \quad (1 \le x \le 100)$ とし、関数列 $\{f_n\}$ を考える。

1. 各 x に対し $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ を示せ.

2. $|f_n(x)| \le 4e^{-2}$ $(n \ge 1, 1 \le x \le 100)$ を示せ．もっと荒く，$\exists M > 0.$ $|f_n(x)| \le M$ $(n \ge 1, 1 \le x \le 100)$ を示すのでもよい.

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^{100} f_n(x)dx = 0$ を示せ．使った定理を明記すること.

Problem 1.5.6 ($\star$) $f_n(x) = x^n \quad (0 \le x \le 1)$ とし、関数列 $\{f_n\}$ を考える。

1. f_n の各点収束極限を求めよ．結論のみでよい.

2. f_n は $[0, 1]$ で一様収束するか？結論のみ答えよ.

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ を求めよ．使った定理を明記すること.

<u>用語</u>：$\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ可測関数 f に対して，$m(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \ne 0\}) = 0$ が成り立つとき,「f は $\mathbb{R}^n$ でほとんどいたるところ 0 である」とか,「$f = 0$ a.e. in $\mathbb{R}^n$(almost everywhere)」という．言い換えると，**命題が成り立たない点の集合が測度 0 であるとき，ほとんどいたるところ成立する，という.**

Problem 1.5.7 ($\star\star$) 関数 f は $\mathbb{R}$ 上ルベーグ可測とする．このとき次を示せ.

1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\varepsilon m(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \ge \varepsilon\}) \le \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)| m(dx)$ が成り立つ.

2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)| m(dx) = 0$ ならば $f = 0$ *a.e. in* $\mathbb{R}$.

3. f が可積分ならば $|f| < +\infty$ *a.e. in* $\mathbb{R}$.

Problem 1.5.8 ($\star\star$) $\mathbb{R}$ 上の可測関数列 $\{f_n\}$ について以下に答えよ．

1. 無条件に

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| m(dx) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| m(dx)$$

が成り立つことを示せ．単調収束定理を用いてよい．

2. 可測関数列 $\{f_n\}$ が $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| m(dx) < \infty$ を満たす時，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < \infty$ がほとんどいたるところ成り立ち，さらに

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) m(dx) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) m(dx)$$

が成り立つことを示せ．*Prob.1.5.7* と *Prob.1.5.8.1*, ルベーグの収束定理を用いてよい．

<u>用語</u>：可積分関数 f に対して

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| m(dx)$$

と定める．
関数列 $\{f_n\}$ と f が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0$ を満たす時，f_n は f に $L^1(\Omega)$ 収束するという．

Problem 1.5.9 ($\star\star$) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ は $(0, \infty)$ 上で広義 *Riemann* 積分可能であるが，*Lebesgue* の意味で積分できないことを示したい．

1. 部分積分を用いて，$s, t \to \infty$ とするとき $\displaystyle\left| \int_s^t \frac{\sin x}{x} dx \right| \to 0$ を示せ．

2. *1.* を用いて $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \int_0^r \frac{\sin x}{x}$ が収束することを示せ[3]．

[3] 値は $\frac{\pi}{2}$ になる．

3. 自然数 n について，

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx > \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt$$

を示せ.

4. *3.* を用いて $\displaystyle\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \infty$ を示せ.

B

Problem 1.5.10 次の *(1), (2)* について、$A \subset \mathbf{R}^d$ について $f(x)$ のルベーグ積分 $\int_A f(x)dx$ を計算せよ。

(1)

$$d = 1, A = [0,1],$$
$$f(x) = 1 \ (x \in A \cap \mathbf{Q}),\ f(x) = x \ (x \in A \cap \mathbf{Q}^c)$$

(2)

$$d = 2, A = [0,1] \times [0,1]$$
$$f(x) = 1 \quad [x \in A \cap ((\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}^c) \times (\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}^c))^c],$$
$$f(x) = x_1 \vee x_2 \quad [x \in A \cap (\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}^c) \times (\mathbf{R} \cap \mathbf{Q}^c)]$$

Problem 1.5.11 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし、$I \subset \mathbf{R}$ を開区間とする。実数値関数 $f : \Omega \times I \to \mathbf{R}$ は各 $t \in I$ ごとに可積分で、各 $\omega \in \Omega$ 毎に $t \in I$ の関数として微分可能であり、非負可積分関数 $\varphi : \Omega \to \mathbf{R}_+$ があって導関数は

$$|\frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t)| \leq \varphi(\omega), (\omega, t) \in \Omega \times I$$

を満たすとする。

次を示せ。

(1) $t \in I$ にたいして $\frac{\partial f}{\partial t}(., t) : \Omega \to \mathbf{R}$ は可測関数である。

(2) $t \in I$ にたいして

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f(\omega, t)\mu(d\omega) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t)\mu(d\omega)$$

が成り立つ。

(3) $f:\Omega\to\mathbf{R}_+$ を非負可積分関数とし、$\beta>0$ にたいし

$$Z(\beta)=\int e^{-\beta f(\omega)}\mu(d\omega)$$

と置き、$Z(\beta)>0$ を仮定する。

このとき関数 $\beta\mapsto Z(\beta)$ は C^∞ 級（無限回微分可能かつ導関数が連続）である。

(4) $g=-\log Z$ で定義した $g:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ は非減少凸関数である。

1.6 Lebesgue の収束定理, フビニの定理

A

Problem 1.6.1 ($\star$) $[-1,1]\times[0,1]$ 上の関数

$$f(x,y)=\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\quad(x,y)\neq(0,0);=0\quad(x,y)=(0,0)$$

について以下を示せ.

1. $\displaystyle\int_{[-1,1]^2}|f(x,y)|dxdy=+\infty$ を示せ．使った定理を明記すること.
2. $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{-1}^1 f(x,y)dx\right)dy=0.$
3. 一方，任意の x に対して $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)dy=\frac{1}{2}-\frac{2x}{x^2+1}$ である．右辺を $g(x)$ とおくと，g はプラスパートもマイナスパートも $[-1,1]$ 上の積分が $+\infty$ に発散するので，$[-1,1]$ 上で $\displaystyle\int_{-1}^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)dx$ は定義されない．よって $g(x)$ は *Lebesgue* の意味で積分不可能である．つまり，逐次積分ができない例になっている *(*x から先に積分すると *0* だが，y から先に積分すると次に x で積分できない*)*.

Problem 1.6.2 ($\star\star$) 任意の $t>0$ に対して

$$\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}-\arctan t$$

を示せ．$x>0$ なら $\dfrac{e^{-xt}}{x}=\displaystyle\int_t^\infty e^{-xy}dy$ は用いて良い．使った定理を明記すること．

Problem 1.6.3 ($\star\star$) 任意の $t>0$ に対して

$$\int_0^\infty e^{-tx}\frac{1-\cos x}{x}dx=\log\sqrt{1+(1/t)^2}$$

を示せ．使った定理を明記すること．

Problem 1.6.4 次の等式を示せ。

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}dx=1$$

(2)

$$\int_1^\infty e^{-x}\log x dx=\lim_{k\to\infty}\int_1^k(1-\frac{x}{k})^k\log x\ dx$$

(3)

$$\int_0^1 e^{-x}\log x dx=\lim_{k\to\infty}\int_0^1(1-\frac{x}{k})^k\log x\ dx$$

Problem 1.6.5 ($\star\star$) $s>0$ とする．ガンマ関数

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx$$

の n 階導関数は

$$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}(\log x)^n dx\qquad(n\in\mathbb{N})$$

である．
ヒント：積分の中に微分が入ればよいので，講義プリントの *p.37,* 積分記号下の微分（ルベーグの収束定理の系）を用いよ．

B

Problem 1.6.6 関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \frac{x}{1-y^2} \ (if \ \ |y| \neq 1)$$

$$f(x,y) = 0 \ (if \ \ |y| = 1)$$

とおく。

$$\int_{-1}^{1}[\int_{-1}^{1} f(x,y)dx]dy$$

は存在するが、

$$\int_{-1}^{1}[\int_{-1}^{1} f(x,y)dy]dx$$

は存在しないことを示せ。

Problem 1.6.7 $R = [-1,1] \times [-1,1]$ とし、関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \frac{xy}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)} \ (if \ \ |xy| \neq 1)$$

$$f(x,y) = 0 \ (if \ \ |xy| = 1)$$

とおく。

(i)

$$\int_{-1}^{1}[\int_{-1}^{1} f(x,y)dx]dy = 0$$

$$\int_{-1}^{1}[\int_{-1}^{1} f(x,y)dy]dx = 0$$

を示せ。

(ii) $f(x,y)$ は R 上では可積分ではないことを示せ。

1.7 Stieltjes 積分, Radon-Nikodym の定理

A

B

Problem 1.7.1 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とし *(*$\mu(\Omega) < +\infty$*)*、L^0 をその上の実数値関数 $f : \Omega \to \mathbf{R}$ をすべて集めた集合とする。

$f, g \in L^0$ にたいして $d(f,g) = \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\mu$ とおいて $d : L^0 \times L^0 \to \mathbf{R}_+$ を定義する。次を示せ。

(1) $d(f,g) = d(g,f) \geq 0$ であり、$d(f,g) = 0 \ \Leftrightarrow \ f = g \ \ a.e.$ である。

(2) $f, g, h \in L^0$ にたいして $d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$

Problem 1.7.2 μ は *1* 次元ルベーグ測度とする。

ν は次のように定義する。カントール関数 f を、$x < 0$ のとき $f(x) = 0$、$x > 0$ のとき $f(x) = 0$ と定義域を拡張して $f : \mathbf{R} \to [0,1]$ とする。f からきまるスティルチェス測度を ν とする。

μ と ν が互いに特異であることを示せ。

Problem 1.7.3 以下、$\nu(A) = \int_A f(x)\mu(dx), A \in \mathcal{F}$ のことを $\nu = f\mu$ とかく。

μ, ν は $(X, \mathcal{F})$ 上の、σ-有限な 2 つの測度で、共通の零集合を持つとする。このとき $\nu = f\mu, \mu = g\nu$ であり、$0 < f < \infty$ にたいし $g = 1/f$ であることを示せ。

(用語)

$I = [a,b]$ を $\mathbf{R}$ の有界閉区間とする。関数 f が**絶対連続 (AC)** であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在し、I 内の交わらない区間の列 $(a_j, b_j), j = 1, 2, ...$ で

$$\sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta$$

を満たすものについて

$$\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \epsilon$$

が成り立つことである。

定義から、絶対連続関数は有界変動 (**FV**) である。

区間 $[a,b]$ における関数 g の変動 $|g|_{t\in[a,b]}$ (cf. 講義ノート Sect. 1.5.2) を $V(g,[a,b])$ とかく。

FV 関数は $V(g,[a,b])$ が有限である。

Problem 1.7.4 λ は *1* 次元ルベーグ測度を表す。次をしめせ。

(1) 絶対連続関数は FV な連続関数である。

(2) FV 関数は *2* つの単調増加関数の差に書ける。

hint: $f(t) = V(f, [a,t])$ を考える。

(3)

$$F(x) = \int_{[a,x)} f(t)\lambda(dt)$$

は絶対連続関数である。

(4) F が絶対連続関数ならば、ある可積分関数 ϕ があり $F(x) = \int_{(-\infty,x)} \phi(t)\lambda(dt)$ と書ける。

hint: $F = f_1 - f_2$ であり、f_1, f_2 は絶対連続な単調増加関数である。

Problem 1.7.5 μ は $[0,2]$ 上の測度、ν は $[1,3]$ 上の測度とする。ν の μ に関するルベーグ分解を計算せよ。

Problem 1.7.6 （悪魔の階段）カントール集合 *(Prob. 1.3.6)* を参照。

カントール集合を作るときの区間 $C_n, n = 1, 2, ...$ を思い出す。

$I_n^1, ..., I_n^{2^n-1}$ を、$[0,1] \setminus C_n$ を作るときの区間の列とする（区間の右端の値で並べる）。関数 $F_n : [0,1] \to [0,1]$ を

$$F_n(x) = 0, \ \ \textit{if}\ x = 0$$

$$F_n(x) = i2^{-n}, \ \ \textit{if}\ x \in I_n^i, \ \ i = 1, ..., 2^n - 1$$

$$F_n(x) = 1, \ \ \textit{if}\ x = 1$$

かつ、その他の x については $F_n(x)$ は線形補間した値とする。

(1) F_1, F_2, F_3 を求めよ。

(2) $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$ が存在することを証明せよ。

(3) $F(x)$ は連続で単調増加であることを示せ。

(4) 導関数 $F'(x)$ はほとんどすべての x について存在し、その値は 0 であることを示せ。

(5) F は絶対連続ではない、ことを示せ。