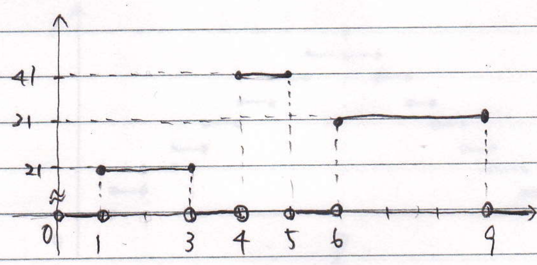
実解析 1.5, 1.6

No. . . (　　)

1.5.1



$f(x) = 2\cdot 1_{[1,3]} + 4\cdot 1_{[4,5]} + 3\cdot 1_{[6,9]}$

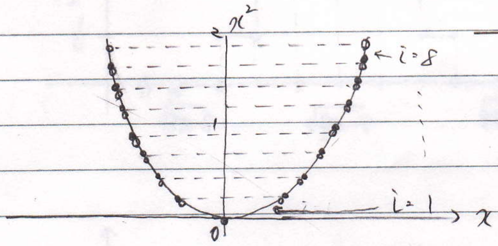
$= 17$

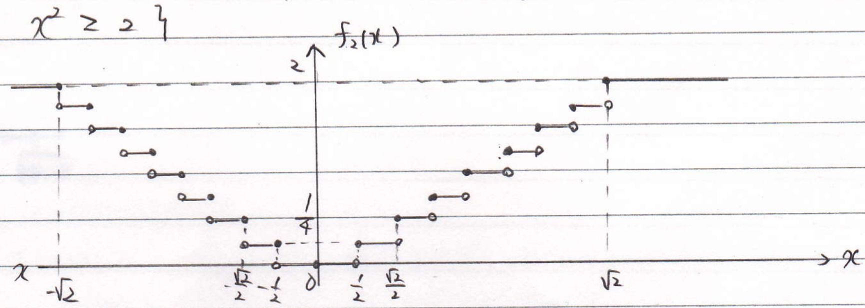
1.5.2

(1) $f_2(x) = \sum_{j=1}^{8} 1_{A_{2,j}}(x)\cdot\frac{j-1}{4} + 2\cdot 1_{B_2}(x)$

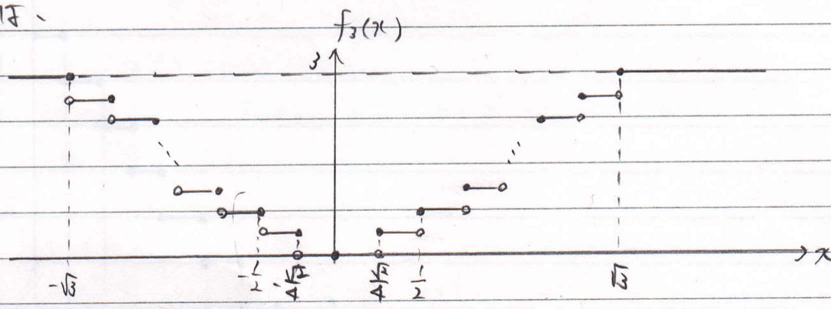
$A_{2,j} = \{x \in X ; \frac{j-1}{4} \le x^2 < \frac{j}{4}\}$ $(j = 1, \dots, 8)$

$B_2 = \{x \in X ; x^2 \ge 2\}$



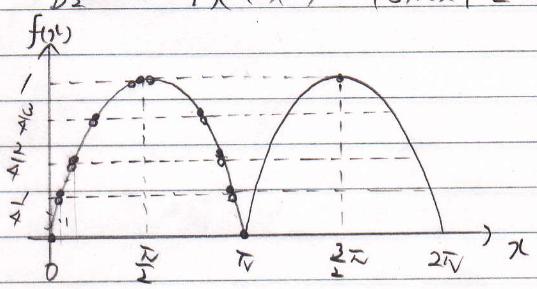


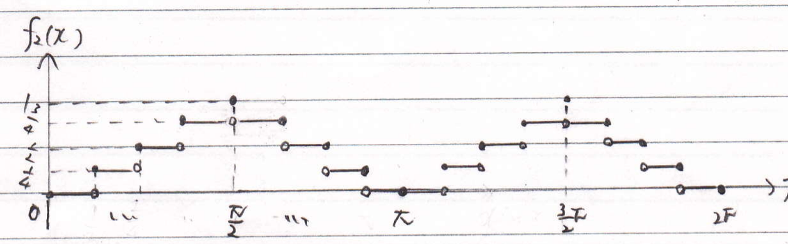
同様に $f_3(x)$ のグラフは、



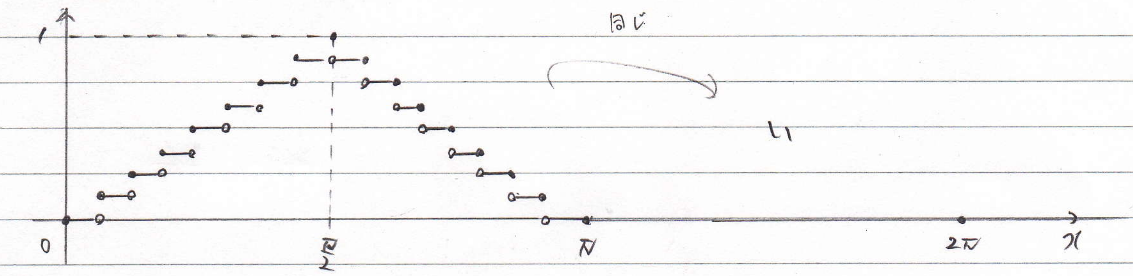
(2) $A_{2,j} = \{x \in X ; \frac{j-1}{4} \le |\sin x| < \frac{j}{4}\}$ $(j = 1, \dots, 8)$

$B_2 = \{x \in X ; |\sin x| \ge 2\}$



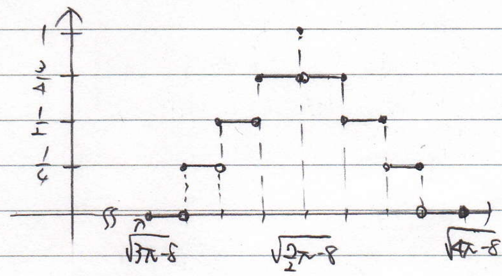


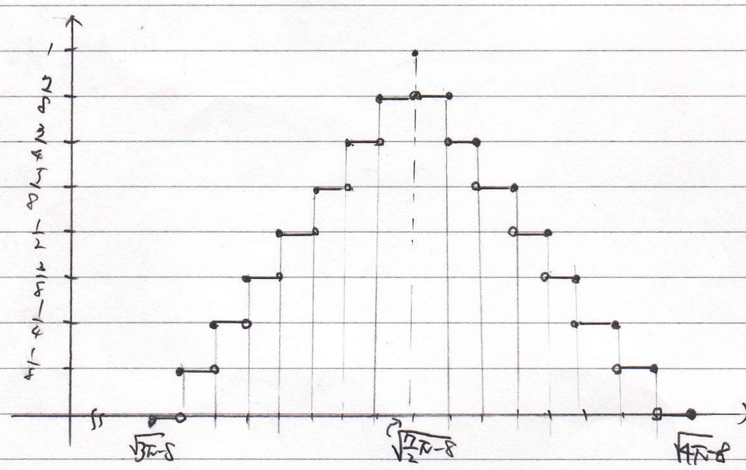
同様に $f_3(x)$ のグラフは、



(3) $f(x) = |\sin(x^2+8)|$

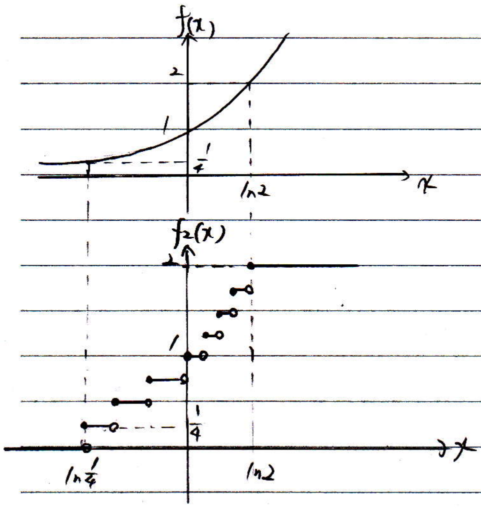
$x^2+8 \geq 8$ より、$3\pi \leq (x^2+8) < 5\pi$ までの範囲で考える。



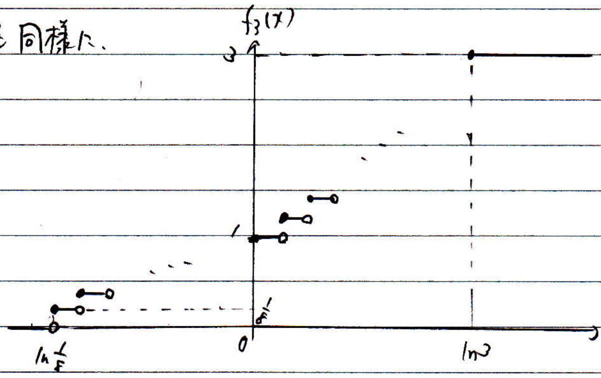


(4) $A_{2,j} = \{x \in X ;\ \frac{j-1}{4} \le e^x < \frac{j}{4}\}$ $(j=1,\dots,8)$

$B_2 = \{x \in X ;\ e^x \ge 2\}$



$f_3(x)$も同様に.



1.5.3

Claim1 $\forall n\in\mathbb{Z},\ f(nx)=nf(x)\ (x\in\mathbb{Q})$

$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ から $f(0)=0$ となるので $f(0x)=f(0)=0f(x)$ が成立

また ある $n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して $f(nx)=nf(x)$ が成り立つとすれば,

$f((n+1)x)=f(nx+x)=f(nx)+f(x)=nf(x)+f(x)=(n+1)f(x)$ が従う.

よって帰納的に $\forall n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$, $f(nx)=nf(x)$

さらに $\forall n\in\mathbb{Z}_{\le 0}$, $-n\ge 0$ に注意すると,

$0=f(0)=f(nx+(-nx))=f(nx)+f(-nx)=f(nx)+(-n)f(x)=f(nx)-nf(x)$

よって $f(nx)=nf(x)$ が従う.

$\forall x\in\mathbb{Q}$, $\exists p\in\mathbb{Z}$, $\exists q\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $x=\frac{p}{q}$ と claim1 より,

$f(x)=f(\frac{p}{q})=f(p\cdot\frac{1}{q})=pf(1/q)$

$f(1)=f(\frac{q}{q})=qf(\frac{1}{q})$

が成り立つから,

$\frac{f(1)}{q}=f(\frac{1}{q})$

よって $f(x)=p\cdot\frac{f(1)}{q}=f(1)x$

また $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exists\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $(x_n\in\mathbb{Q})$ s.t. $x_n\to x$ と f の連続性より.

$f(x)=f(\lim_{n\to\infty}x_n)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}f(1)x_n=f(1)x$

$\square$

No. ・ ・ (　　)

1.5.4

(1) $u(x) = \frac{1}{x}$ $x \in [1, \infty)$

$$u^+(x) = \max\{u(x), 0\} = \begin{cases} u(x) & u(x) > 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$u^-(x) = \max\{-u(x), 0\} = \begin{cases} -u(x) & u(x) < 0 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

このとき $\int_1^\infty u^+(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^\infty = \infty$

$\int_1^\infty u^-(x)\,dx = 0$

$\therefore \int u\,dx = \int u^+\,dx - \int u^-\,dx = \infty$

よって可能ではない

(2) $u(x) = \frac{1}{x^2}$ $x \in [1, \infty)$

$$\begin{aligned} \int u\,dx &= \int u^+\,dx - \int u^-\,dx \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx - 0 \\ &= [-x^{-1}]_1^\infty \\ &= 1 < +\infty \end{aligned}$$

よって可能

(3) $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $x \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} \int u\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx - 0 \\ &= [2x^{\frac{1}{2}}]_0^1 \\ &= 2 < +\infty \end{aligned}$$

よって可能

(4) $u(x) = \frac{1}{x}$ $x \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} \int u\,dx &= \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \\ &= [\ln x]_0^1 \\ &= \infty \end{aligned}$$

よって可能でない

1.5.5

(1) $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x \cdot \frac{n^2}{e^{nx}} = \lim_{n\to\infty} x \cdot \frac{2}{x^2 e^{nx}} = \underline{0}$$

(2) $f_n(x) \geq 0$ は明らか、

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = n^2 e^{-nx} + n^2 x(-n) e^{-nx}$$

$$= n^2 e^{-nx}(1-nx)$$

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = 0 \iff x = \frac{1}{n}$$

$\therefore x = 1$で max $n^2 e^{-n}$

$g(n) = n^2 e^{-n}$ とすると、

$n=2$で max $4e^{-2}$

以上より、

$$f_n(x) \leq 4e^{-2}$$

□

(3) 有界収束定理より、

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{100} f_n(x)\,dx = \int_1^{100} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0$$

1.5.6

(1) $f(x) = \begin{cases} 1 & (x=1) \\ 0 & (0 \leq x < 1) \end{cases}$

(2) 一様収束しない。

(3) 有界収束定理より、

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1 = 0$$

1.5.7

(1) $\mathbb{R}_0 = \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ とおく

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, m(dx) \geq \int_{\mathbb{R}_0} |f(x)|\, m(dx)$$

$$\geq \varepsilon \int_{\mathbb{R}_0} m(dx)$$

$$= \varepsilon m(\mathbb{R}_0)$$

$$= \varepsilon m(\{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}).$$

□

(2) $A=\{x\in\mathbb{R} \mid |f(x)|>0\}$, $A_n=\{x\in\mathbb{R} \mid |f(x)|>\frac{1}{n}\}$ とおくと

$A_n\subset A_{n+1}$ $n=1,2,\cdots$ かつ $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

ゆえに 濃度の連続性より、 $m(A)=\lim_{n\to\infty} m(A_n)$

$m(A)>0$ とすると、 $\exists n$ s.t. $m(A_n)>0$

従って $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,m(dx)\geq\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} I_{A_n}\,m(dx)=\frac{m(A_n)}{n}>0$

これは矛盾 $\therefore m(A)=0$ よって $f=0$

(3) f: 可積分なので定義より、 $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\,m(dx)<\infty$

これより、 $|f|<+\infty$ a.e. in $\mathbb{R}$

No. . . ( )

1.5.8

1. 単調収束定理より $\lim_{n\to\infty}\int |f_n(x)|m(dx) = \int |f(x)|m(dx)$

$|f_n(x)| = \sum_{i=1}^{n}|f_i(x)|$, $|f(x)| = \sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ とすると.

(左辺) $= \lim_{n\to\infty}\int \sum_{i=1}^{n}|f_i(x)|m(dx) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int |f_i(x)|m(dx)$

(右辺) $= \int |f(x)|m(dx) = \int \sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|m(dx) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int |f_i(x)|m(dx)$

$\therefore$ (左辺) = (右辺)

2. 単調収束定理による.

$g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ とおく.

ここで

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

これより.

$$\int \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\, m(dx) = \int \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, m(dx)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, m(dx) \quad (\because \text{ルベーグの収束定理より})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int f_i(x)\, m(dx) = \sum_{i=1}^{\infty}\int f_i(x)\, m(dx)$$

□

1.5.9

(1) $$\left|\int_s^t \frac{\sin x}{x}dx\right| = \left|\left[\frac{-\cos x}{x}\right]_s^t - \int_s^t \frac{\cos x}{x^2}dx\right|$$

$$\leq \frac{1}{t} + \frac{1}{s} + \int_s^t \frac{1}{x^2}dx$$

$$\to 0 \quad (t, s \to \infty)$$

(2) $$\int_0^r \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^r \left(\int_0^s e^{-xu}du\right)\sin x\, dx + \int_0^r \frac{\sin x}{x}e^{-sx}dx$$

ここで $\left|\int_0^r \frac{\sin x}{x}e^{-sx}dx\right| \leq \int_0^r e^{-sx}dx = -\frac{e^{-sr}}{s} + \frac{1}{s} \to 0 \quad (M\to\infty)$ より

よって $\lim_{r\to\infty}\int_0^r \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\infty \left(\int_0^r e^{-ux}\sin x\, dx\right)du$ となる.

次に. $\int_0^r e^{-ux}\sin x\, dx = \frac{1}{u^2+1} - \frac{e^{-ru}}{u^2+1}(\cos r + u\sin r)$ なので.

第2項の $\int_0^\infty \frac{e^{-ru}}{u^2+1}(\cos r + u\sin r)\,du$ が収束すればよい.

univ. CO-OP

No.

いま、$\left|\int_0^\infty \frac{e^{-ru}}{u^2+1}(\cos r+u\sin r)\,du\right| \le \int_0^\infty \frac{e^{-ru}}{u^2+1}|\cos r+u\sin r|$

$$\le \int_0^\infty \frac{e^{-ru}}{u^2+1}(u+1)\,du$$

$$\le \int_0^\infty (u+1)e^{-ru}\,du$$

$$\to 0 \quad (r\to\infty)$$

よって $\lim_{r\to\infty}\int_0^r \frac{\sin x}{x}dx$ は収束する.

(3) $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx > \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^\pi \sin t\,dt = \frac{2}{(n+1)\pi}$ を示す

・$n\in 2\mathbb{N}$ のとき

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(-\cos x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)\pi}+\frac{1}{n\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\cos x}{x^2}dx$$

$$> \quad \text{〃} \quad - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{x^2}dx = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

・$n\in 2\mathbb{N}-1$ のとき

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = -\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin x}{x}dx = -\left[\frac{-\cos x}{x}\right]_{n\pi}^{(n+1)\pi} + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(-\cos x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$> \frac{1}{(n+1)\pi}+\frac{1}{n\pi} - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{x^2}dx = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

$\square$

(4) (3)より、$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx > \frac{2}{(n+1)\pi}$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx > \sum_{n=0}^\infty \frac{2}{(n+1)\pi}$$

(右辺) $= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} \to \infty$ より. (左辺) $= \int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|dx = +\infty$

1.6.1

フビニの定理より、

1. $\int_{[-1,1]\times[-1,1]} \left|\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\right| dxdy = 8\iint_{\Delta(0,0)(1,0)(1,1)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dxdy$

$= 8\int_0^1 dy \int_0^y \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dx$

$\left(\begin{array}{l} t = x^2 \text{ とおく} \\ dt = 2xdx \end{array} \right)$

$= 8\int_0^1 dy \cdot \int_0^{y^2} \frac{y}{(t+y^2)^2} \cdot \frac{dt}{2}$

$= 8\int_0^1 dy\ \frac{y}{2}\left[-(t+y^2)^2\right]_0^{y^2}$

$= 8\int_0^1 dy\ \frac{1}{4y}$

$= 2\int_0^1 dy\,\frac{1}{y} = +\infty$ □

2. $\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 f(x,y)\,dx\right) dy = \int_0^1 0\ dy = 0$

(∵ $f(x,y)$ は x に関して奇関数なので $\int_{-1}^1 f(x,y)\,dx = 0$)

3 1, 2 より従う

1.6.2

$f(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx$ 両辺をtで微分 $f'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx$

$f'(t) = \frac{1}{t}\left[e^{-tx}\sin x\right]_0^\infty - \frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-tx}\cos x\,dx$

$= -\frac{1}{t}\left[e^{-tx}\cos x\right]_0^\infty - \frac{1}{t^2}\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx$

$\Leftrightarrow f'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^2}f'(t)$

$\therefore f'(t) = -\frac{1}{t^2+1}$

$\int_0^t f'(s)\,ds = f(t) - f(0)$

$\int_0^t -\frac{1}{s^2+1}\,ds = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$

$-\tan^{-1} t = \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{\pi}{2}$

$\therefore \int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} t$ □

No.

1.6.3

$f(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \cdot \frac{1-\cos x}{x} dx$ 両辺をtで微分 $f'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx}(1-\cos x)dx$

$f'(t) = \left[\frac{1}{t}e^{-tx}(1-\cos x)\right]_0^\infty - \frac{1}{t}\int_0^\infty e^{-tx}\sin x$

$= -\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{t^2+1}$

$\int_0^t f'(s)ds = f(t) - f(0)$

$(左辺) = \int_0^t -\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1} = \int_0^t \left(-\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+1}\right)ds$ $(右辺) = f(t) - f(0)$

$= -\log t + \frac{1}{2}\log t^2+1$ $= f(t) - 0$

$= f(t)$

$= \log\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}$

$= \log\sqrt{1+(1/t)^2}$

$\therefore f(t) = \log\sqrt{1+(1/t)^2}$

D

1.6.4 有界収束定理より.

(1) $\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx$

$= \int_0^\infty e^x e^{-2x}dx$

$= \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$

(2) $\lim_{k\to\infty}\int_1^k \left(1-\frac{x}{k}\right)^k \ln x\, dx = \int_1^\infty \lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{x}{t}}\ln x\, dx$ $(t = -\frac{x}{k}$ とおく$)$

$= \int_1^\infty \lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-x}\ln x\, dx$

$= \int_1^\infty e^{-x}\ln x\, dx$

(3) $\lim_{k\to\infty}\int_0^1 \left(1-\frac{x}{k}\right)^k \ln x\, dx = \int_0^1 \lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^{-x}\ln x\, dx$

$= \int_0^1 e^{-x}\ln x\, dx$ $(t = -\frac{x}{k}$ とおく$)$

1.6.5

$$\left(\begin{array}{ll} \Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s>0) & -① \\ \Gamma^{(n)}(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} (\ln x)^n dx \quad (n \in \mathbb{N}) & -② \end{array} \right)$$

①より、 $\Gamma'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{ds} (e^{-x} x^{s-1}) dx$$

$$= \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \ln x \, dx \qquad \left(\because \frac{\partial}{\partial s} x^{s-1} = x^{s-1} \ln x \right) \quad ⊛$$

②を示す。

(i) $n=1$ のとき、　上で示した。

(ii) $n=k$ のとき成立すると仮定。

$n=k+1$ のとき $\Gamma^{(k+1)}(s) = \{\Gamma^{(k)}(s)\}'$

$$= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} (\ln x)^k dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} (e^{-x} x^{s-1} (\ln x)^k) dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} \ln x (\ln x)^k dx \qquad (\because ⊛)$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} (\ln x)^{k+1} dx$$

∴ 以上 (i)(ii)より　示せた。