

積分論 22 - 23

第1章 easy integration

1.1 構成

- 1.2 準備
- 1.3 測度論-1
- 1.4 積分論-1
- 1.5 積分論-2
- 1.6 練習問題

1.2 測度論の準備

1.2.1 動機づけ

複雑な図形 - 海岸線の長さを測る

1.2.2 集合と位相

「もの」の集まりを集合という。ただし、「もの」については定義しない。「もの」を集合の要素（元）という。

数学では要素が集合に属するか否かが判別できることを要請する。すなわち、 $x \in A$ または $x \notin A$ がなりたつ。

C を条件として

$$A = \{x; x \text{ は } C \text{ をみたす}\}$$

とかくことができる（集合の内包的記法）。

$A \subset B$ とは、「 A の任意の元 a について、 a は B の元である」ということである。 $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるとき、 $A = B$ とかき、「 A と B は相等しい」という。

$A \cup B, A \cap B$ は既知のとおり定義する。 $A \setminus B = A \cap B^c$ とする。 $A \cup B^c = A^c \cap B^c, A \cap B^c = A^c \cup B^c$ 。これをドモルガンの法則という。

Z をひとつのパラメータ集合として、 Z の各元 n に一つの集合 A_n が対応しているとする。

$$\cup_{n \in Z} A_n = \{x; \text{ある } n \in Z \text{ があって } x \in A_n\}$$

$$\cap_{n \in Z} A_n = \{x; \text{すべての } n \in Z \text{ に対し } x \in A_n\}$$

である。ドモルガンの法則は

$$(\cup_{n \in Z} A_n)^c = \cap_{n \in Z} A_n^c, (\cap_{n \in Z} A_n)^c = \cup_{n \in Z} A_n^c$$

に拡張される。

集合の列 A_1, A_2, \dots が与えられているとき、 $\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n$ を $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ の上極限といい、 $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ で表す。 $\cup_{k=1}^{\infty} \cap_{n=k}^{\infty} A_n$ を $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ の下極限といい、 $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ で表す。当然 $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ であるが、 $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ であるとき、この集合を $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ とかく。

問題

集合列 $\{A_n\}, A_n = ((-1/2)^{n^2}, 2^n)$ 开区間について、

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$$

をもとめよ。

とくに実数全体は集合である。これを \mathbf{R} とかく。実数には順序がついている。つまり、 $a, b \in \mathbf{R}$ ならば、 $a < b, a = b, a > b$ のいずれか一つがなりたつ。

$E \subset \mathbf{R}$ とする。もし

すべての $x \in E$ に対し $x \leq b$ となる

ような $b \in \mathbf{R}$ が存在すれば、「 E は上に有界」といい、 b を E の上界という。 B を E のすべての上界からなる集合とする。もし

すべての $b \in B$ に対し $c \leq b$ となる

ような $c \in B$ が存在すれば、 c を E の上限といい、 $\sup E$ (または $\sup_{x \in E} x$) とかく。 E の下限 $\inf E$ (または $\inf_{x \in E} x$) は

$$\inf_{x \in E} x = -\sup_{x \in E} (-x)$$

によって定義する。

開集合は開集合の公理を満たす集合である。開集合の公理は近傍により定義する。閉集合は、その補集合が開集合となる集合である。集合 X とその中の開集合の族 \mathcal{O} の組 (X, \mathcal{O}) を位相空間という。とくに X 上の距離関数から開集合を決めた位相空間を距離空間という。

集合族 一つの集合 Ω が与えられ、 Ω のいくつかの部分集合の集まり \mathcal{F} を考える。 \mathcal{F} が次を満たすとき、集合族（または有限加法族）という。

$$(1) \emptyset \in \mathcal{F}$$

$$(2) A \in \mathcal{F} \text{ ならば } A^c \in \mathcal{F}$$

$$(3) A, B \in \mathcal{F} \text{ ならば } A \cup B \in \mathcal{F}$$

\mathcal{F} がさらに次を満たすとき、 \mathcal{F} は σ -集合族（ σ -加法族）という：

$$(4) A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F} \text{ ならば } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

(2) の条件により、「開集合の公理」とは異なることに注意せよ。

1.3 測度論-1

以下では、基礎となる集合を、主に、 $\Omega = \mathbf{R}$ ないし $\Omega = \mathbf{R}^n, n = 2, 3, \dots$ として述べていく。測度論の議論は、 Ω を、開集合の定義できるような（位相のついた）一般の集合として展開することができる。

1.3.1 ジョルダン測度

正方形

$$Q = \{(x_1, x_2); a \leq x_1 \leq a + l, b \leq x_2 \leq b + l\}$$

に対して、 Q の“面積”を $|Q| = l^2$ とする。

$A \subset \mathbf{R}^2$ を一般の図形とする。 $\epsilon > 0$ を決めて固定する。 A の中に一辺 $\epsilon > 0$ の正方形を重なり合わないように敷き詰める。各小正方形の“面積”は ϵ^2 であり、図のように敷き詰めた正方形の面積の総和を $c_\epsilon(A)$ とかく。 $\epsilon \rightarrow \frac{\epsilon}{2}$ とすると、さらに多くの（有限個の）小正方形を敷き詰めることができる。このようにして、さらに小さな ϵ について $c_\epsilon(A)$ を計算し

$$c(A) = \sup_{\epsilon > 0} c_\epsilon(A)$$

とおく。これをジョルダン内容量という。([新井] 参照。)

一方、一辺 ϵ の小正方形を使って、 A を覆う。つまり、

$$A \subset \bigcup_{j=1}^N Q_j, Q_j \text{ は一辺 } \epsilon \text{ の小正方形}$$

とする。(ここで小正方形は重なり合っても構わない。) このような小正方形の面積の総和を $C_\epsilon(A)$ とかく。

$$C(A) = \inf_{\epsilon > 0} C_\epsilon(A)$$

とし、ジョルダン外容量という。

$\epsilon' > 0, \epsilon'' > 0$ に対してつねに

$$c_{\epsilon'}(A) \leq C_{\epsilon''}(A)$$

だから、

$$c(A) \leq C(A)$$

である。ここでもし $c(A) = C(A)$ ならば、 A はジョルダン可測であるといい、上の値を A のジョルダン測度という。 $\mathbf{R}^n, n \geq 2$ の場合も同様に議論する。

なお

$$A = \{(x_1, x_2); x_i \in \mathbf{Q}, 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2\}$$

とすると、 A はジョルダン可測でない。また、ハルナック集合はジョルダン可測でない。(このような不思議な図形たちについては、[4] の第2部を参照。)

1.3.2 ルベーク外測度

$\Omega = \mathbf{R}^n$ とし、 I をその区間

$$\begin{aligned} I &= (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n) \\ &= \{(x_1, \dots, x_n); a_j < x_j < b_j, j = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

とする。 I の測度 $|I|$ を

$$|I| = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

とする。

任意の集合 $E \subset \mathbf{R}^n$ に対して、和が E を覆うような高々加算個の開区間の組 $\{I_\lambda\}$:

$$\cup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \supset E$$

を考える。このようなことについての下限

$$\inf_{\{I_\lambda\}} \sum_{\lambda \in \Lambda} |I_\lambda|$$

を、 $m^*(E)$ とかいてのルベーグ外測度という。

ルベーグ外測度は次の性質をもつ：

$$(1) m^*(\emptyset) = 0, m^*({a}) = 0$$

$$(2) E_1 \subset E_2 \text{ ならば } m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$$

$$(3) E_1, E_2, E_3, \dots \subset \mathbf{R}^n \text{ に対して}$$

$$m^*(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) \quad (3.1)$$

(4) E が、互いに素な区間 J_n をつかって $E = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$ と表されるとき

$$m^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(J_n) \quad (3.2)$$

(3.1) の性質を劣加法性という。(3.2) の性質を完全加法性という。

証明

(1) 空集合、1点集合はいかなる小正方形でも覆える。

(2) $E_2 = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1)$ とかく。 $\{I_{\lambda_1}, I_{\lambda_2}, \dots\}$ が E_2 を覆えば、それらは E_1 を覆う。よって

$$m^*(E_2) = \inf_{\{I_{\lambda_i}\}} \sum_i |I_{\lambda_i}| \geq \inf_{\{I'_{\lambda_i}\}, E_1 \subset \cup I'_{\lambda_i}} \sum_i |I'_{\lambda_i}| = m^*(E_1)$$

(3) l を固定する。 $m^*(E_l)$ の定義から、任意の $\epsilon > 0$ に対し、区間 $I_{\lambda_1}^{(l)}, I_{\lambda_2}^{(l)}, \dots$ で

$$E_l \subset \cup_i I_{\lambda_i}^{(l)}, \quad \sum_i |I_{\lambda_i}^{(l)}| < m^*(E_l) + \frac{\epsilon}{2^l}$$

となるものが存在する。これより

$$\cup_{l=1}^{\infty} E_l \subset \cup_{l=1}^{\infty} \cup_{i=1}^{\infty} I_{\lambda_i}^{(l)}$$

よって

$$\begin{aligned} m^*(\cup_{l=1}^{\infty} E_l) &\leq \sum_l \sum_i |I_{\lambda_i}^{(l)}| \\ &< \sum_{l=1}^{\infty} (m^*(E_l) + \frac{\epsilon}{2^l}) \leq \sum_l m^*(E_l) + \epsilon \end{aligned}$$

ϵ は任意だから、 $\epsilon \rightarrow 0$ とすればよい。

(4) 外測度 $m^*(E)$ の定義で infimum を達成する区間 I_λ が実際に存在する ($I_{\lambda_n} = J_n$) ので、

$$m^*(E) = \inf_{\{I_\lambda\}} \sum_\lambda |I_\lambda| = \sum_n |J_n|$$

証明終わり

1.3.3 ルベーク内測度

S を \mathbf{R}^n の有界集合とし、 $S \subset J$ なる長方形 (n 次元区間) J を1つとって固定する。 S のルベーク内測度 $m_*(S)$ を

$$m_*(S) = |J| - m^*(J \cap S^c)$$

と定義する。これは「外側から測った外測度」である。

ルベーク内測度は次の性質をもつ：

$$(1) 0 \leq m_*(S) < \infty$$

$$(2) m_*(S) \leq m^*(S)$$

$$(3) S \subset T \text{ に対して } m_*(S) \leq m_*(T)$$

$$(4) I \text{ が } n \text{ 次元区間ならば } m_*(I) = |I|$$

証明

(1) $|J| < +\infty, m^*(J \cap S^c) \leq m^*(J) = |J|$ より。

(2) $J = S \cup (J \setminus S)$ だから、外測度の劣加法性より $|J| = m^*(J) \leq m^*(S) + m^*(J \setminus S)$ 。よって $m_*(S) = |J| - m^*(J \setminus S) \leq m^*(S)$

(3) T を含む長方形 J に対し、 $S \subset T$ より $J \setminus S \supset J \setminus T$ 。よって

$$m^*(J \setminus S) \geq m^*(J \setminus T)$$

これより

$$m_*(S) = |J| - m^*(J \setminus S) \leq |J| - m^*(J \setminus T) = m_*(T)$$

(4) I を含む長方形 J として I 自身をとる。すると

$$m_*(I) = |I| - m^*(I \setminus I) = |I| - m^*(\emptyset) = |I|$$

証明終わり

1.3.4 ルベーク可測集合

\mathbf{R}^n の有界な集合 S が

$$m^*(S) = m_*(S)$$

をみたすとき、 S をルベーク可測集合という。

内測度の定義から、これは $S \subset J$ なる長方形 (n 次元区間) J について

$$m^*(J \cap S^c) + m^*(S) = |J| \quad (3.3)$$

と同値である。

なお、これをもっと強めて

$$\text{すべての } E \text{ について } m^*(E \cap S) + m^*(E \cap S^c) = m^*(E) \quad (3.4)$$

とき、 S をカラテオドリ可測集合という。

注意カラテオドリ可測集合はルベーク可測集合である。カラテオドリ可測集合は、(外測度の定義された) 一般の集合上で定義できる。 \mathbf{R}^n の上ではカラテオドリ可測集合とルベーク可測集合は一致する。

1.3.5 ルベーク測度空間

カラテオドリ可測集合の全体を \mathcal{M} で表す。 $E \in \mathcal{M}$ に対して

$$m(E) = m^*(E)$$

とおき、 E の測度という。3つ組 $(\mathbf{R}^n, \mathcal{M}, m)$ をルベーク測度空間という。

定理 1

\mathcal{M} は σ -加法族をなす。すなわち

$$(1) \emptyset \in \mathcal{M}$$

(2) $A \in \mathcal{M}$ ならば $A^c \in \mathcal{M}$ 。 $A_1 \in \mathcal{M}, A_2 \in \mathcal{M}$ ならば $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{M}, A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$ 。

$$(3) A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M} \text{ ならば } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$$

証明

(1) $m^*(E \cap \emptyset) + m^*(E \cap \emptyset^c) = m^*(\emptyset) + m^*(E) = m^*(E)$ より $\emptyset \in \mathcal{M}$ 。

(2) $A \in \mathcal{M}$ とすると、(3.4) において S と S^c の役割が対称であるから、 $A^c \in \mathcal{M}$ 。 $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ とする。(3.4) より、任意の集合 E について

$$m^*(E) = m^*(E \cap A_1) + m^*(E \cap A_1^c)$$

$$= m^*(E \cap A_1 \cap A_2) + m^*(E \cap A_1 \cap A_2^c) + m^*(E \cap A_1^c)$$

$S' = A_1, E' = E \cap \{(A_1 \cap A_2^c) \cup A_1^c\}$ として (3.4) を適用する。 $E' \cap S' = E \cap A_1 \cap A_2^c, E' \cap S'^c = E \cap A_1^c$ となるから

$$(R.H.S.) = m^*(E \cap A_1 \cap A_2) + m^*(E \cap \{(A_1 \cap A_2^c) \cup A_1^c\})$$

$$= m^*(E \cap (A_1 \cap A_2)) + m^*(E \cap \{(A_1 \cap A_2)^c\})$$

これより $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{M}$ 。また、 $A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2)^c$ より、 $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}$ 。

(3) (step 1) [A_1, A_2, \dots が互いに素な場合]

$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}, A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ とする。 $A = \bigcup_n A_n$ とおく。 $A^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$ であるから、任意の n について $A_1^c \cap \dots \cap A_n^c \supset A^c$ 。よって $m^*(E \cap A_1^c \cap \dots \cap A_n^c) \geq m^*(E \cap A^c)$ 。

ここで $A_1 \in \mathcal{M}$ より

$$m^*(E) = m^*(E \cap A_1) + m^*(E \cap A_1^c)$$

ここで $A_1^c = (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c)$ より

$$(R.H.S.) = m^*(E \cap A_1) + m^*(E \cap A_1^c \cap A_2) + m^*(E \cap A_1^c \cap A_2^c)$$

$E' = E \cap \{A_1 \cup (A_1^c \cap A_2)\}, S' = A_1^c$ とおくと、 $E' \cap S' = E \cap A_1^c \cap A_2, E' \cap S'^c = E \cap A_1$ 、また $A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) = A_1 \cup A_2$ より

$$(R.H.S.) = m^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) + m^*(E \cap (A_1 \cup A_2)^c)$$

$$\begin{aligned}
&= m^*(E \cap A_1) + m^*(E \cap A_2) + m^*(E \cap (A_1 \cup A_2)^c) \\
&\quad \dots \\
&= m^*(E \cap A_1) + m^*(E \cap A_2) + \dots + m^*(E \cap A_n) + m^*(E \cap A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c) \\
&\quad \geq m^*(E \cap A_1) + m^*(E \cap A_2) + \dots + m^*(E \cap A_n) + m^*(E \cap A^c)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
m^*(E) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap A_n) + m^*(E \cap A^c) \\
&\geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)
\end{aligned}$$

ただし、最後の不等式は m^* の劣加法性による。

一方、 $m^*(E) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$ はつねに成り立つので等号が成り立ち、 $A \in \mathcal{M}$ である。

(step 2) $[A_1, A_2, \dots]$ が互いに素とは限らない場合]

$B_1 = A_1, B_n = A_n \setminus (\cup_{j=1}^{n-1} A_j), n \geq 2$ とおくと (B_i) は互いに素である。
step 1 より $\cup_n B_n \in \mathcal{M}$ だから、 $\cup_n A_n = \cup_n B_n \in \mathcal{M}$ 。照明終

どんな集合が可測か

命題 1 \mathbf{R}^n の開集合は可測集合である。 \mathbf{R}^n の有界な閉集合は可測集合である。

この定理の証明のためには次の補題が必要となる。

補題 $A \subset \mathbf{R}^n$ は $m^*(A) < +\infty$ を満たすとする。このとき

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m^*(A \cap \bar{Q}_N) = m^*(A)$$

ただし、 $Q_N = [-N, N) \times [-N, N)$ とし、 \bar{Q}_N はその閉包である。

[新井] 補題 3.8 参照。

命題 1 の証明 F を有界な閉集合とする。 $F_N = F \cap \bar{Q}_N$ とおくと、 F_N は有界な閉集合である。 $F_N \subset F$ より、 $m^*(F_N) \leq m_*(F)$ となる¹。また、補題より

$$m^*(F) = \lim_{N \rightarrow \infty} m^*(F_N) \leq m_*(F)$$

¹ここでは \mathbf{R}^n 上の内測度についての同値な定義： $m_*(A) = \sup\{m^*(K); K \text{ は有界閉集合で } K \subset A\}$ を使う。inner regularity という。この証明については [新井]3.16' を参照。

一方、外測度の定義より

$$m^*(F) \geq m_*(F)$$

よって $m^*(F) = m_*(F)$ となり、 F は可測である。

また、開集合は閉集合の補集合であるから、定理1より開集合も可測となる。q.e.d.

次の3つで特徴付けられる集合を n 次元ボレル集合といい、その全体を \mathcal{B} で表す。

- (1) $[a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$ で表される集合は n 次元ボレル集合である。
- (2) \mathcal{B} は補集合と加算和をとる操作に関して閉じている。
- (3) \mathcal{B} は (1), (2) の性質をもつ集合族のうち最小のものである。

n -次元ボレル集合族を \mathcal{B}_n とかくこともある。

定理2

n 次元ボレル集合はルベグ可測集合である。

証明 $[a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$ の形の集合は開集合により表現できる。たとえば、 $[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$ 。よって、命題1、定理1より、 $[a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$ の形の集合はすべて \mathcal{M} に含まれる。定理1より \mathcal{M} は σ -加法族であり、 \mathcal{B} も σ -加法族であるから、 $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ 。証明終

この定理より $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ である。 \mathcal{B} (乃至 \mathcal{B}_n) はたいへん大きな集合族であり、“(普段出てくる) 大抵の集合” を含んでいる。以下で出てくる命題、定理において \mathcal{M} を \mathcal{B} と読み替えても、大きな問題は起こらない。なお、ボレル集合族は、開集合が定義できるような一般の集合上で定義できる。ボレル集合族上の測度をボレル測度という。

集合 E で E は可測かつ $m(E) = 0$ となるものを零集合という。

零集合の例

1点集合² $\{x\}, x \in \mathbf{R}$

有理数全体 \mathbf{Q}

(X, \mathcal{F}) 上の、 σ -有限な2つの測度 μ, ν が共通の零集合を持つとき、それらは同値 (equivalent) という。

²Hint: consider the intervals $[x - 1/k, x + 1/k), k \rightarrow \infty$

関数 $f(x)$ に対し $[f \neq 0] = \{x; f(x) \neq 0\}$ とおく。関数 $f(x)$ で $[f \neq 0]$ が零集合となるとき、 $f(x)$ はほとんど到るところ零といい、 $f = 0$ a.e. (*almost everywhere*) という。関数 $f(x), g(x)$ があって、 $g - f = 0$ a.e. となるとき、 f と g はほとんど到るところ等しいといい、 $f = g$ a.e. とかく。

$A \subset \Omega$ をある集合とする。 A を含む最小の σ -加法族を、 A から生成された σ -加法族という。ボレル集合族は、半開区間 $[a_1, b_1) \times \dots \times [a_n, b_n)$ から生成された σ -加法族である。

開集合の加算個の共通部分を G_δ 集合、閉集合の加算個の和集合を F_σ 集合という。これらはボレル集合だが、ボレル集合だが G_δ でも F_σ でもない集合もある。

1.3.6 測度の性質

命題 1

$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ かつ $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$) とする。 $m^*(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) < +\infty$ のとき $\cup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{M}$ であり、

$$m(\cup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} m(A_j) \quad (3.5)$$

である。

Ω をある集合、 \mathcal{M} を Ω 上の可測集合の族、 m を

$$m(A) = m^*(A), A \in \mathcal{M}$$

として定義する。 (Ω, \mathcal{M}, m) を測度空間という。

証明

$A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおく。定理 1 (3) より、 $A \in \mathcal{M}$ 。よって

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c)$$

一方、定理 1 (3) の証明より

$$m^*(E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap A_n) + m^*(E \cap A^c)$$

$E = A$ ととると

$$m^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

$$m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

は m^* の劣加法性よりしたがう。 m の定義より (3.5) が成り立つ。証明終わり

命題 2

- (1) $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$
 (2) 集合の増加列 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$ に対し

$$m(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$$

- (3) 集合の減少列 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ に対し、 $m(A_1) < +\infty$ ならば

$$m(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$$

- (4) 任意の A_1, A_2, A_3, \dots に対し

$$m(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

- (5)

$$m(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$$

- (6) $m(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty$ のとき

$$m(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$$

証明

- (1) 可測性の定義 (3.4) による。

$$m(A) = m(A \cap (A \cap B)) + m(A \cap (A \cap B)^c) = m(A \cap B) + m(A \setminus (A \cap B)),$$

$$m(B) = m(B \cap (A \cap B)) + m(B \cap (A \cap B)^c) = m(A \cap B) + m(B \setminus (A \cap B))$$

一方

$$m(A \cup B) = m((A \cup B) \cap (A \cap B)) + m((A \cup B) \cap (A \cap B)^c)$$

$$\begin{aligned}
&= m(A \cap B) + m(\{(A \cap (A \cap B)^c) \cup (B \cap (A \cap B)^c)\}) \\
&= m(A \cap B) + m((A \cap (A \cap B)^c) \cap (A \cap (A \cap B)^c)) + m((B \cap (A \cap B)^c) \cap (A \cap (A \cap B)^c)^c) \\
&= m(A \cap B) + m(A \setminus (A \cap B)) + m(B \setminus (A \cap B))
\end{aligned}$$

上の2つを最後の式に代入すれば、結論を得る。

(2) $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ とおくと、 $B_i \cap B_j = \emptyset$ ($i \neq j$) かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, B_n \in \mathcal{M}, n = 1, 2, \dots$ となる。また (1) より

$$m(A_n) = m(B_n \cup A_{n-1}) = m(B_n) + m(A_{n-1})$$

つまり $m(B_n) = m(A_n) - m(A_{n-1})$

これより

$$m(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n)$$

となるが、命題 1 より、右辺 = $\sum_{n=1}^{\infty} m(B_n)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \{m(A_n) - m(A_{n-1})\} = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$$

(3)

$B_1 = A_1 \setminus A_2, B_2 = A_2 \setminus A_3, \dots, B_n = A_n \setminus A_{n+1}$ とおくと、 $B_i \cap B_j = \emptyset$ ($i \neq j$) かつ $A_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \cup (\lim_{n \rightarrow \infty} A_n), B_n \in \mathcal{M}, n = 1, 2, \dots$ となる。

$m(A_1) < \infty$ ならば

$$m(A_1) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) + m(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n)$$

ここで

$$\begin{aligned}
m(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \{m(A_n) - m(A_{n+1})\} = m(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n)
\end{aligned}$$

この2式より結論を得る。

(4) $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$ とおくと、 $B_i \cap B_j = \emptyset$ ($i \neq j$) かつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, B_n \subset A_n, n = 1, 2, \dots$ となる。あとは (3.5) を使えばよい。

(5), (6) については練習問題 [11] としてある。

証明終わり

命題 (5), (6) より、もし

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$$

が存在し、かつ、 $m(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty$ ならば、

$$m(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$$

がなりたつ。

1.3.7 測度空間の例

一般の集合上でも、 \mathbf{R}^n 上と同じように、外測度から始めて、測度、可測集合を定義できる。

1 (Ω, \mathcal{M}, m) 。ここで

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathcal{M} = \Omega \text{ の部分集合全体,}$$

$$m(\{i\}) = \frac{1}{6}, i = 1, \dots, 6, m(A) = \sum_{i \in A} m(\{i\}), A \subset \Omega.$$

このとき、 $m(\emptyset) = 0$ とおくと、 $m(\cdot)$ は (Ω, \mathcal{M}) 上の測度となる。また、 $m(\Omega) = 1$ である。これは、さいころを 1 回振ったとき出る目の確率を表す測度空間（確率空間）である。

2 (Ω, \mathcal{M}, m) 。ここで

$$\Omega = \{(i, j); i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathcal{M} = \Omega \text{ の部分集合全体,}$$

$$m(\{(i, j)\}) = \frac{1}{36}, i, j = 1, \dots, 6, m(A) = \sum_{i \in A} m(\{(i, j)\}), A \subset \Omega.$$

このとき、 $m(\emptyset) = 0$ とおくと、 $m(\cdot)$ は (Ω, \mathcal{M}) 上の測度となる。また、 $m(\Omega) = 1$ である。これは、さいころを 2 回振ったとき出る目の確率を表す測度空間（確率空間）である。

3 具体例（知識の体系）

あることについて知識が深まるほど、その対象についての分割が詳しくなる。これは対象 Ω に関する可測集合の数が増え、より rich な可測集合族を構成できることを意味する。

例1 日本語とフランス語の魚の分類を並べる。言語による分類の詳しくさの違いがよくわかる。(フランスは、大西洋沿いも地中海も海の幸に恵まれており、ラテン文化の影響もあって、フランス人は魚介類をよく食べる。)

和名	仏名	
鯖(サバ)	maquereau (m)	マ
鰯(アジ)	chinchard	シャンシ
鰹(カツオ)	bonite (f)	ホ
鰯(ブリ)／ハマチなど	seriole	セ
(関東 - モジャコ(稚魚) → ワカシ(35cm以下) → イナダ(35-60cm) → ワラサ(60-80cm) → ブリ(80cm以上))		
鯖(マグロ)	thon (m)	
鮭(サケ)	saumon	ソ
鱒(マス)	truite (f)	トリユイト
ニジマス／虹鱒	Truite arc-en-ciel	
鯛(タイ)(以下、鯛の仲間)	daurade (f)/dorade	ドラ
黒鯛	daurade grise	ドロードウ・グ
黒鯛	daurade noire	ドロードノ
赤鯛	daurade rouge	ドロードウ・ル
真鯛(マダイ)	pageot	ノ
平目(ヒラメ)(以下、平目の仲間)	barbue	バルビ
平目(ヒラメ)／イシヒラメ	turbot	テュル
小平目(コヒラメ)	olette	
舌平目	sole (f)	
鱈(タラ)の一種(以下、鱈の仲間)	aiglefin	
鱈(タラ)	cabillaud	カ(キ)
鱈(タラ)／イソアイナメ	colin	
小鱈	merlan	メ
鱈(タラ)／塩タラ、干したラ	morue (f)	モ
鰈(カレイ)(以下、鰈の仲間(日本語にはない))	carrelet	キ
鰈(カレイ)	Flet	
鰈(カレイ)	limande (-sole)	リ
鰈(カレイ)	plie	
メルルーサ(アルゼンチンヘイク)	Anon	
メルルーサ	Cocochas	ココ
メルルーサ	Lieu	
メルルーサ	merlu	メ
鰻(アンコウ)(以下、鰻の仲間)	baudroie	ボー
鰻(アンコウ)	diable de mer	ディアブル・ドウ
鰻(アンコウ)	lotte	
鰻(アンコウ)	poisson-pecheur	ポワッソン・ペシ

例2 羊肉の分類。日本では羊肉をほとんど食べない。スーパーに行ってもせいぜいラムとマトンを区別してあるくらいである。一方、ヨーロッパ人は羊肉をよく食べる。食べ心地により羊肉を詳しく分類している。ラムは若ければ若いほど取れる肉の量は少ないが、より柔らかく臭みも少なくなる。2歳以上のマトンの肉はあまり柔らかくない。

(1-i) ニュージーランドにおける羊肉の分類の定義は以下のとおりである。

ラム：生後12か月で永久門歯がない雄または雌の羊

ホゲット：永久門歯が1から2本の雌または去勢された雄の羊

マトン：永久門歯が2本より多い雌または去勢された雄の羊

オーストラリアではラムの定義は以下のとおりである。

ラム：永久門歯が0本、生後12か月までの雌または去勢された雄。
ニュージーランドでは、永久門歯が生えていても摩耗していなければラムとする。

(1-ii) その他の定義

ラム - 1歳以下の羊

ベイビーラム - 生後6から8週間で乳だけで育てた羊

スプリングラム - 生後3か月から5か月で乳だけで育てた羊

イヤリングラム - 生後12か月から24か月の羊

(2) 部位による分類

伝統的なイギリスの部位の分け方は以下のとおりである。

(首) 場所1	場所2	場所3	場所4	場所5	場所6 (尻)
スクラグエンド	ミドルネック	ベストエンド	ロイン	チャンプ	脚
∅	肩 (Shoulder)	胸 (Breast)	胸 (Breast)	∅	∅

例3 牛肉の分類。牛肉も日本文化の中では歴史が浅い。ポルトガル語（ブラジル）では牛肉を詳しく分類する。

食材用語

和名	ポルトガル名	
牛肉	Carne de vaca	(カルネ・デヴァツ)、または boi (
ヒレ肉	file mignon file mignon file mignon	(フィレ・ミニ
サーロイン	contrafile	(コントラフ
もも肉	alcatra alcatra	(アルカ
ランプ	picanha	(ピカー
また肉	coxao mole	(コション・モ
または	patinho	(パッチー
または	lagarto	(ラガ
すね肉	musculo	(ムス
テール	rabada	(ハバ
こぶ肉	cupim	(クッ
牛タン	lingua	(リン
レバー	figado	(フィ

1.4 積分論-1

1.4.1 可測関数

$f(x_1, \dots, x_n)$ を $E \subset \mathbf{R}^n$ において定義されたある関数とする。その値は実数または $+\infty, -\infty$ をとるものとする。 $B \subset \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ に対し

$$[f \in B] = \{x \in E; f(x) \in B\}$$

とかく。また、 $\alpha \in \mathbf{R}$ に対し

$$[f > \alpha] = \{x \in E; f(x) > \alpha\}$$

とかく。なお、 $f(x)$ が一般の集合 X 上に定義されている場合には、 $E \subset \mathbf{R}^n$ を $E \subset X$ に読み替える。

関数 f が可測関数とは、任意の実数 α に対し $[f > \alpha] \in \mathcal{M}$ となることである。任意の実数 α に対し $[f > \alpha] \in \mathcal{B}$ となるとき、 f をボレル可測関数という。

命題 1

$f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ について、次は同値である。

- (1) f は可測
- (2) 任意の実数 α に対し $[f \geq \alpha] \in \mathcal{M}$
- (3) 任意の実数 α に対し $[f < \alpha] \in \mathcal{M}$
- (4) 任意の実数 α に対し $[f \leq \alpha] \in \mathcal{M}$

証明

(4) \rightarrow (1) $[f \leq \alpha] = [f > \alpha]^c$. 左辺 $\in \mathcal{M} \Rightarrow [f > \alpha] \in \mathcal{M}$.

(1) \rightarrow (2) $[f \geq \alpha] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [f > \alpha - \frac{1}{n}]$, $[f > \alpha - \frac{1}{n}] \in \mathcal{M}$. よって $[f \geq \alpha] \in \mathcal{M}$.

(2) \rightarrow (3) $[f < \alpha] = [f \geq \alpha]^c$, $[f \geq \alpha] \in \mathcal{M}$ よって、左辺 $\in \mathcal{M}$.

(3) \rightarrow (4) $[f \leq \alpha] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [f < \alpha + \frac{1}{n}]$. $[f < \alpha + \frac{1}{n}] \in \mathcal{M}$. よって $[f \leq \alpha] \in \mathcal{M}$.

証明終

可測関数の意味

可測関数の例

$A \in \mathcal{M}$ に対し

$$1_A(x) = 1 \text{ if } x \in A, 1_A(x) = 0 \text{ if } x \notin A$$

とかく。実数 a_1, a_2, \dots と集合 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ (ただし、 $A_i \cap A_j = \emptyset$ if $i \neq j$) に対し

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(x), \quad \cup_{i=1}^n A_i = E$$

と書かれる関数を、**階段関数** (step function) または**単関数** (simple function) という。

命題 2

$(f_n)_{n=1}^\infty$ を可測関数とするとき

- (1) $\sup_{n \geq 1} f_n(x), \inf_{n \geq 1} f_n(x)$ は可測関数である。
- (2) $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ は可測関数である。
- (3) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ (各点収束) ならば、 $f(x)$ は可測関数である。

証明

(1)

$$A_n \in \mathcal{M} \rightarrow \cup_n A_n \in \mathcal{M}$$

$$A \in \mathcal{M} \rightarrow A^c \in \mathcal{M}$$

よって

$$A_n \in \mathcal{M} \rightarrow \cap_n A_n \in \mathcal{M}$$

したがって f_n が可測関数ならば、

$$[\inf_{n \geq 1} f_n > \alpha] = \cap_n [f_n > \alpha] \in \mathcal{M}$$

$$[\sup_{n \geq 1} f_n > \alpha] = \cup_n [f_n > \alpha] \in \mathcal{M}$$

となる。

(2)

$$\limsup_n f_n = \inf_{n \geq 1} (\sup_{k \geq n} f_k)$$

$$\liminf_n f_n = \sup_{n \geq 1} (\inf_{k \geq n} f_k)$$

なので、(1) よりしたがう。

(3)

$$\lim_n f_n = \limsup_n f_n = \liminf_n f_n$$

なので、可測である。証明終

命題3

$f(x), g(x)$ を $E \subset \mathbf{R}^n$ 上の可測関数とすると、 $f(x)+g(x), f(x)g(x), cf(x)$ は可測関数である。

証明

$$[f + g > \alpha] = [f > \alpha - g] = \cup_{r \in \mathbf{Q}} ([f > r] \cap [r > \alpha - g]) \in \mathcal{M}$$

等による。証明終

1.4.2 ルベーグ式積分**命題1**

非負関数 $f(x) : E \rightarrow [0, +\infty]$ が可測ならば、非負単関数列 (f_n) で、各 $x \in E$ について

$f_n(x)$ は単調非減少、 $f_n(x) \rightarrow f(x)$
となるものが存在する。

証明

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{E_k}(x) + n 1_{F_n}(x)$$

とおく。ただし、

$$E_k = f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)\right) \in \mathcal{M}$$

$$F_n = f^{-1}([n, \infty]) \in \mathcal{M}$$

である。このとき、各 $x \in E$ について

$$f_n(x) \rightarrow f(x)$$

となる。証明終

定義 (可測関数の積分)

(1) 単関数 $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(x)$, $a_i \geq 0$, $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ に対し

$$\int f(x) m(dx) = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i)$$

と定義する。

なお、 $f(x)$ に2つの表し方があっても、左辺は等しい。

(2) f を非負可測関数とする。上の命題より、 $\varphi_n \rightarrow f$ となる有界階段関数 (単関数) 列 (φ_n) をとり、

$$\int f(x)m(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n(x)m(dx)$$

と定義する。左辺は (φ_n) の取り方によらない。

(3) f が一般の可測関数の場合。

$$f_+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)), f_-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$$

とおくと、 $f_+(x) \geq 0, f_-(x) \geq 0, f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ となる。(2) により $\int f_+(x)m(dx), \int f_-(x)m(dx)$ を定義し、その少なくとも一方が有限であるとき、

$$\int f(x)m(dx) = \int f_+(x)m(dx) - \int f_-(x)m(dx)$$

と定義する。

定義終

可測関数 $f(x)$ は $\int |f(x)|m(dx)$ が有限のとき、可積分とよばれる。

命題 2 (積分の性質 (1))

f, g はともに非負可測関数とするとき

(1) $a > 0, b > 0$ に対し

$$\int (af(x) + bg(x))m(dx) = a \int f(x)m(dx) + b \int g(x)m(dx)$$

(2) $f(x) \leq g(x)$ ならば

$$\int f(x)m(dx) \leq \int g(x)m(dx)$$

証明

(1) *Step 1* 単関数

$$f^{n_1}(x) = \sum_{j=0}^{n_1} a_j^1 1_{A_{1,j}}(x), g^{n_2}(x) = \sum_{k=0}^{n_2} a_k^2 1_{A_{2,k}}(x)$$

で、

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} f^{n_1} = f, \lim_{n_2 \rightarrow \infty} g^{n_2} = g$$

となるものをとる。

$$\int (af^{n_1} + bg^{n_2})m(dx) = a \int f^{n_1}m(dx) + b \int g^{n_2}m(dx)$$

を示し、 $n_1 \rightarrow \infty, n_2 \rightarrow \infty$ とすればよい。

Step 2 $a > 0, b > 0$ だから、 $af^{n_1} + bg^{n_2}$ は非負関数で

$$(f^{n_1} + g^{n_2})(x) = \sum_{j=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{n_2} (aa_j^1 + ba_k^2) 1_{A_{1,j} \cap A_{2,k}}(x)$$

となっている。

以下、簡単のため $a = 1, b = 1$ とする。

$$\begin{aligned} \int (f^{n_1} + g^{n_2})m(dx) &= \sum_{j=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{n_2} (a_j^1 + a_k^2) m(A_{1,j} \cap A_{2,k}) \\ &= \sum_{j=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{n_2} a_j^1 m(A_{1,j} \cap A_{2,k}) + \sum_{j=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{n_2} a_k^2 m(A_{1,j} \cap A_{2,k}) \\ &= \sum_{j=0}^{n_1} a_j^1 \sum_{k=0}^{n_2} m(A_{1,j} \cap A_{2,k}) + \sum_{k=0}^{n_2} a_k^2 \sum_{j=0}^{n_1} m(A_{1,j} \cap A_{2,k}) \\ &= \sum_{j=0}^{n_1} a_j^1 m(A_{1,j}) + \sum_{k=0}^{n_2} a_k^2 m(A_{2,k}) \\ &= \int f^{n_1}m(dx) + \int g^{n_2}m(dx). \end{aligned}$$

(2) (1) と同様にして、単関数の場合に、 $f^{n_1}(x) \leq g^{n_2}(x)$ ならば

$$\int f^{n_1}(x)m(dx) \leq \int g^{n_2}(x)m(dx)$$

を示す。

仮定より $A_{1,j} \cap A_{2,k} \neq \emptyset$ ならば、 $x \in A_{1,j} \cap A_{2,k}$ に対し

$$a_j^1 = f^{n_1}(x) \leq g^{n_2}(x) = a_k^2$$

である。

$\Lambda_j = \{k; A_{1,j} \cap A_{2,k} \neq \emptyset\}$ とおく。

$$\begin{aligned} \int f^{n_1}(x)m(dx) &= \sum_{j=0}^{n_1} a_j^1 \sum_{k=0}^{n_2} m(A_{1,j} \cap A_{2,k}) \\ &= \sum_{j=0}^{n_1} a_j^1 \sum_{k \in \Lambda_j} m(A_{1,j} \cap A_{2,k}) \\ &\leq \sum_{j=0}^{n_1} \sum_{k \in \Lambda_j} a_k^2 m(A_{1,j} \cap A_{2,k}) \\ &= \sum_{j=0}^{n_1} \sum_{k=0}^{n_2} a_k^2 m(A_{1,j} \cap A_{2,k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n_2} a_k^2 m(A_{2,k}) = \int g^{n_2}(x)m(dx) \end{aligned}$$

証明終

命題3 (積分の性質 (2))

(1) $f^2(x), g^2(x)$ が可積分ならば、 $f(x)g(x)$ も可積分で

$$\left| \int f(x)g(x)m(dx) \right| \leq \left(\int f^2(x)m(dx) \right)^{1/2} \cdot \left(\int g^2(x)m(dx) \right)^{1/2}$$

(2)

$$\left(\int |f(x) + g(x)|^2 m(dx) \right)^{1/2} \leq \left(\int f^2(x)m(dx) \right)^{1/2} + \left(\int g^2(x)m(dx) \right)^{1/2}$$

証明は 1.5.4 節を参照。

このような可測関数の集合を L^2 とかく。文字 'L' はルベーグ (H. Lebesgue) の積分論に対する先験的な貢献からきている。

1.4.3 収束定理

定理1 (単調収束定理) $(f_n(x))$ は可測関数列で、

$$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x), n = 1, 2, \dots, x \in \mathbf{R}^n$$

とする。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)m(dx) = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)m(dx)$$

ただし、積分値は $+\infty$ の場合も含む。

これより、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ とおくと

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)m(dx) = \int f(x)m(dx)$$

である。なお極限関数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ は可測関数でなくてもよい。

証明

証明のための補題

$E_i \in \mathcal{B}_n$ で、 $E_1 \subset E_2 \subset \dots, \mathbf{R}^n = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ とする。 $s(x)$ は非負可測単関数とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_i} s(x)m(dx) = \int_{\mathbf{R}^n} s(x)m(dx)$$

証明

$$s(x) = \sum_{j=1}^n a_j 1_{A_j}(x)$$

とすると

$$s(x) \cdot 1_{E_i}(x) = \sum_{j=0}^n a_j \cdot 1_{A_j \cap E_i}(x)$$

$$\int_{E_i} s(x)m(dx) = \sum_{j=0}^n a_j \cdot m(A_j \cap E_i)$$

$A_j \cap E_i$ は集合の単調増大列であるから、測度の性質 (2) より、 $i \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} &\rightarrow \sum_{j=0}^n a_j \cdot m(A_j \cap \mathbf{R}^n) \\ &= \sum_{j=0}^n a_j \cdot m(A_j) = \int_{\mathbf{R}^n} s(x)m(dx). \end{aligned}$$

(証明終)

本来の証明

$f_n(x) \leq f(x)$ だから、積分の性質 (1) より

$$\int f_n(x)m(dx) \leq \int f(x)m(dx)$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)m(dx) \leq \int f(x)m(dx) \quad (4.1)$$

一方、 $s(x)$ を $0 \leq s(x) \leq f(x)$ となる非負可測単関数とする。 $0 < a < 1$ に対し $E_n = \{x; a \cdot s(x) \leq f_n(x)\}$ とおく。 $E_n = \{x; f_n(x) - as(x) \geq 0\}$ は可測集合であり、

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots, \cup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbf{R}^n$$

となっている。上の補題より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} s(x)m(dx) = \int s(x)m(dx) \quad (4.2)$$

ここで

$$\int f_n(x)m(dx) \geq \int_{E_n} f_n(x)m(dx) \geq a \int_{E_n} s(x)m(dx)$$

だから、(4.2) より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)m(dx) \geq a \int s(x)m(dx)$$

$a \rightarrow 1$ とすると、(右辺) $\geq \int s(x)m(dx)$

ここで $s(x)$ は $0 \leq s(x) \leq f(x)$ をみたす任意の単関数だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)m(dx) \geq \int f(x)m(dx) \quad (4.3)$$

(4.1), (4.3) により結論を得る。証明終

この定理より、例えば、 $f_n(x) \geq 0$ に対し

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)dx$$

(項別積分公式) が示せる。

じっさい、 $g_n(x) = \sum_{i=1}^n g_i(x)$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ として、定理 1 を適用すればよい。

数列に (a_n) について $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ を

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \geq k} a_n,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} a_n$$

とおく。関数列 (f_n) に対して

$$(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x), (\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n)(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

として、関数 $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ を定義する。

定理 2 (Fatou の補題) (f_n) を非負な可測関数列とするととき、

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) m(dx) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) m(dx),$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) m(dx) \leq \int \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) m(dx)$$

がなりたつ。

証明

$x \mapsto \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ は非負可測関数である。 $k \mapsto \inf_{n \geq k} f_n(x)$ は非負可測関数の単調増加列であるから、単調収束定理より

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int \inf_{n \geq k} f_n(x) m(dx) &= \int \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \geq k} f_n(x) m(dx) \\ &= \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) m(dx) \end{aligned} \quad (4.4)$$

一方、任意の $j \geq k$ に対し $\inf_{n \geq k} f_n(x) \leq f_j(x)$ であるから

$$\int \inf_{n \geq k} f_n(x) m(dx) \leq \inf_{j \geq k} \int f_j(x) m(dx)$$

ここで両辺において $k \rightarrow \infty$ とすると、(4.4) より

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) m(dx) \geq \int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) m(dx)$$

後半は $-\sup_n f_n(x) = \inf(-f_n(x))$ とおいて考えれば同じようにしてできる。証明終わり

定理3 (ルベークの収束定理) 可測関数列 (f_n) と、1つの可測関数 f があって次を満たすとする:

- (1) 各 x において $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$
- (2) ある非負可積分関数 g が存在して

$$\text{任意の } n \geq 1, \text{ 任意の } x \text{ について } |f_n(x)| \leq g(x)$$

このとき f も可積分で

$$\int f(x)m(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)m(dx)$$

である。

系 (有界収束定理)

$m(\Omega) < +\infty$ とする。ある $M > 0$ があって、任意の n に対し

$$|f_n(x)| \leq M \quad \text{on } \Omega$$

ならば、

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)m(dx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)m(dx)$$

である。

証明はルベークの収束定理で $g(x) \equiv M$ ととればよい。

ルベークの収束定理の証明

仮定より $g(x) - f(x), g(x) + f(x)$ は各々非負可測関数である。Fatouの補題より

$$\begin{aligned} \int (g(x) + f(x))m(dx) &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} (g(x) + f_n(x))m(dx) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int g(x)m(dx) + \int f_n(x)m(dx) \right) \\ &= \int g(x)m(dx) + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)m(dx) \end{aligned}$$

これより

$$\int f(x)m(dx) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)m(dx) \quad (3.5)$$

一方、 $\int (g(x) - f(x))m(dx) = \int \lim_{n \rightarrow \infty} (g(x) - f_n(x))m(dx) \geq 0$ 。Fatou
の補題より

$$\begin{aligned} (R.H.S.) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int g(x)m(dx) - \int f_n(x)m(dx) \right) \\ &= \int g(x)m(dx) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)m(dx) \end{aligned}$$

これより

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)m(dx) \leq \int f(x)m(dx) \quad (3.6)$$

(3.5), (3.6) より

$$\int f(x)m(dx) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)m(dx) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)m(dx)$$

となり、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x)m(dx) = \int f(x)m(dx)$$

である。証明終わり

ルベーグの収束定理の応用

定理 4

(1) 非負可測関数列 $(f_n)_{n \geq 1}$ に対して

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) m(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)m(dx)$$

(2) $(f_n)_{n \geq 1}$ は可積分関数列で

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n(x)|m(dx) < +\infty$$

とする。このとき

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) m(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x)m(dx)$$

証明

(1) は単調収束定理 (定理 1) による。

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x), g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

とおく。ここで

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

これより

$$\begin{aligned} \int \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) m(dx) &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i(x) m(dx) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \sum_{i=1}^n f_i(x) m(dx) \quad (\text{ルベークの収束定理}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int f_i(x) m(dx) = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i(x) m(dx) \end{aligned}$$

(2) はルベークの収束定理において、 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ ととればよい。

なお、 $\Omega = \mathbf{R}^n$, $m(dx) =$ ルベーク測度の場合、 $m(dx)$ を単に dx とかくこともある。

収束定理に関連する例題

例題 1 $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$, $1 \leq x \leq 100$ とし、関数列 (f_n) を考える。各 x に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 x}{e^{nx}} = 0$$

である。さらに

$$f_n(x) \leq 4e^{-2} \quad (n \geq 1)$$

である (練習問題)。よって、有界収束定理より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{100} f_n(x) dx &= \int_1^{100} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \\ &= \int_1^{100} 0 dx = 0. \end{aligned}$$

実際、部分積分により

$$\int_1^{100} n^2 x e^{-nx} dx = \left[n^2 x \left(-\frac{1}{n} e^{-nx} \right) \right]_1^{100} - \int_1^{100} n^2 \left(-\frac{1}{n} \right) e^{-nx} dx$$

$$\begin{aligned}
&= [-nxe^{-nx}]_1^{100} + \int_1^{100} ne^{-nx} dx \\
&= ne^{-n} - 100ne^{-100n} + n[-\frac{1}{n}e^{-nx}]_1^{100} \\
&= ne^{-n} - 100ne^{-100n} + (-e^{-100n} + e^{-n})
\end{aligned}$$

ここで $n \rightarrow \infty$ とすると、各項 $\rightarrow 0$ 。よって、右辺 $\rightarrow 0$ 。

なお

$$E = [0, 1], f_n(x) = x^n, f(x) = 1(x = 1), = 0(0 \leq x < 1)$$

でも同じ議論が言える。

例題 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \log 2$$

実際、左辺を奇数・偶数とかくと、

$$\text{左辺} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} \right)$$

(ここで $\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} \geq 0$) さらに

$$\frac{1}{2m-1} = \int_0^{\infty} e^{-(2m-1)x} dx, \frac{1}{2m} = \int_0^{\infty} e^{-2mx} dx$$

であり、定理 4 (ルベーグの収束定理の応用) より

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (e^{-(2m-1)x} - e^{-2mx}) dx \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (e^{-(2m-1)x} - e^{-2mx}) dx
\end{aligned}$$

ここで積分の中身は初項 $e^{-x} - e^{-2x} = e^{-x}(1 - e^{-x})$ 、公比 e^{-2x} の等比数列なので、和は

$$e^{-x} \left(\frac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-2x}} \right) = e^{-x} \left(\frac{1 - e^{-x}}{(1 - e^{-x})(1 + e^{-x})} \right) = e^{-x} \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \\ &= [-\log(1+e^{-x})]_0^{\infty} = \log 2 \end{aligned}$$

例題 3 (ルベーク積分では計算できない例)

$$f(x) = (-1)^{n+1}n, \quad \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$$

とおく。 $|f(x)| = n, \quad \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{3} + 1 - \frac{3}{4} + 1 - \frac{4}{5} + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty \end{aligned}$$

しかし

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots \end{aligned}$$

例題 2 より

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

つまり

$$1 - \log 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$$

よって

$$\int_0^1 f(x) dx = 1 - \log 2$$

となる。

1.4.4 フビニの定理

Overview

- (1) \mathcal{M}_0 の存在
- (2) \mathcal{M}_Z の存在
- (3) (Z, \mathcal{M}) 上の測度 π の存在
- (4) $Z = X \times Y$ 上の可測関数
- (5) 射影定理 (可測性、フビニ)

$(X, \mathcal{M}_X, m_X), (Y, \mathcal{M}_Y, m_Y)$ を 2 つの測度空間とする。また、 $Z = X \times Y$ とする。

$A \in \mathcal{M}_X, B \in \mathcal{M}_Y$ に対し、 $A \times B$ は可測な積集合である。

$$\mathcal{M}_Z^0 = \{ \cup_{i=1}^n A_i \times B_i \subset Z; A_i \in \mathcal{M}_X, B_i \in \mathcal{M}_Y, i = 1, \dots, n, n \in \mathbf{N} \}$$

とする。 \mathcal{M}_Z^0 は有限加法族になる。

これを元に可測集合族 (σ -加法族) をつくる。

$\mathcal{M}_Z = \sigma(\mathcal{M}_X \times \mathcal{M}_Y)$ を \mathcal{M}_Z^0 から生成された σ -加法族とする。つまり、

- (1) \mathcal{M}_Z の元は \mathcal{M}_Z^0 の元を含む
- (2) $A \in \mathcal{M}_Z \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}_Z$
- (3) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}_Z \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}_Z$
- (4) \mathcal{M}_Z は (1)-(3) をみたす σ -加法族のうち最小である。

このような集合族 \mathcal{M}_Z は、構成できる。(下記**命題 1** 証明 [Step1, Step2] を参照)

更に、測度の拡張定理³より、 (Z, \mathcal{M}_Z) 上に次のような測度が存在する。

定理 1 (Z, \mathcal{M}_Z) 上に測度 π が一意的に存在し、次をみたす：

$$A \in \mathcal{M}_X, B \in \mathcal{M}_Y \text{ に対し } \pi(A \times B) = m_X(A)m_Y(B).$$

(証明は**命題 1**のあと参照)

この π を m_X と m_Y の直積測度といい、 $m_X \times m_Y$ とかく。また、 m_Z ともかく。

$E \subset Z$ に対し、その x -断面 E^x と y -断面 E_y を次のように定義する：

$$E^x = \{y \in Y; (x, y) \in E\}, E_y = \{x \in X; (x, y) \in E\}$$

³E. Hopf の拡張定理。Kolmogorov の拡張定理ともいう。測度 π の一意性はこの条件による。参考文献 [2] 参照。なお、「 $Z_1 \subset Z_2 \subset \dots$ で $m_Z(Z_k) < \infty$ for all $k, Z = \cup_{k \leq 1} Z_k$ であること」が十分である。

これらは可測集合である。また、 E 上の関数 $f(x, y)$ に対し、

$$f^x(y) = f(x, y), y \in E^x, f_y(x) = f(x, y), x \in E_y$$

とおく。

命題 1 (1) もし $E \in \mathcal{M}_Z$ ならば $E^x \in \mathcal{M}_Y, E_y \in \mathcal{M}_X$

(2) $E \in \mathcal{M}_Z$ とする。また、 $\varphi(x) = m_Y(E^x), \psi(y) = m_X(E_y)$ とおく。
 $\varphi(x), \psi(y)$ は各々 \mathcal{M}_X -可測、 \mathcal{M}_Y -可測であり、

$$\int_X \varphi(x) m_X(dx) = m_Z(E) = \int_Y \psi(y) m_Y(dy)$$

である。

(3) もし f が \mathcal{M}_Z -可測ならば、 f^x は \mathcal{M}_Y -可測、 f_y は \mathcal{M}_X -可測である。

命題 1 の証明 ([Step1, Step2]((1), (2)) と [Step3]((3)) をわけろ。)

[Step 1] \mathcal{M}_Z^0 の元は (1), (2) を満たす。つまり $\mathcal{M}_Z^0 \subset \mathcal{K}$

(証明) $E = A \times B$ のとき、

$$E^x = B \text{ if } x \in A, E^x = \emptyset \text{ if } x \notin A$$

となるので、 $E^x \in \mathcal{M}_Y$ 。同様に $E^y \in \mathcal{M}_X$ 。

また

$$m_Y(E^x) = m_Y(B) \text{ if } x \in A, m_Y(E^x) = 0 \text{ if } x \notin A$$

となるので、 $x \mapsto m_Y(E^x)$ は x に関して可測である。さらに

$$\begin{aligned} \int m_Y(E^x) m_X(dx) &= m_X(A) m_Y(B) \\ &= (m_X \times m_Y)(A \times B) = m_Z(E) \end{aligned}$$

となる。

$$\int m_X(E^y) m_Y(dy) = m_Z(E)$$

も同様である。

[Step 2] (1), (2) をみたす $E \in \mathcal{M}_Z$ の全体を \mathcal{K} と書く。以下 $\mathcal{K} = \mathcal{M}_Z$ を示す。そうすれば \mathcal{M}_Z の元に対し (1), (2) がなりたつことになる。

補題 \mathcal{K} の元は次を満たす。

- (i) $K_n \in \mathcal{K}, K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots \rightarrow A$ ならば $A \in \mathcal{K}$
(ii) $K_n \in \mathcal{K}, K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \rightarrow A$ ならば $A \in \mathcal{K}$

補題の (i), (ii) を満たす集合族を単調族という。 σ -加法族は単調族である。以下では、 $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots \rightarrow A$ を $K_n \uparrow A$ 、 $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \downarrow A$ とかく。

(補題の証明)：ノートは作ったけどここでは省略してある。

\mathcal{M}_Z は \mathcal{M}_Z^0 を含む最小の σ -加法族である。一方、一般に単調族をなす有限加法族は σ -加法族であることが知られている⁴。よって、 \mathcal{K} が有限加法族であれば、 $\mathcal{K} = \mathcal{M}_Z$ となって主張が示せる。

(\mathcal{K} が有限加法族であることの証明)

$\mathcal{K}_1 = \{K \in \mathcal{K}; K^c \in \mathcal{K}\}$ とする。 $K_n \in \mathcal{K}_1, K_n \uparrow A$ のとき (i) より $A \in \mathcal{K}$ 。また $K_n^c \downarrow A^c$ だから (ii) より $A^c \in \mathcal{K}$ 。よって $A \in \mathcal{K}_1$ である。同様に $K_n \in \mathcal{K}_1, K_n \downarrow A$ とすれば $A^c \in \mathcal{K}$ である。

これより \mathcal{K}_1 は単調族である。[Step 1] より \mathcal{K} は \mathcal{M}_Z^0 を含む最小の単調族であるから、 $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1$ である。つまり、 $K \in \mathcal{K}_1$ ならば $K^c \in \mathcal{K}_1$ 。

次に $F \in \mathcal{M}_Z^0$ とし、

$$\mathcal{K}_2 = \{K \in \mathcal{K}; F \cup K \in \mathcal{K}, F \cap K \in \mathcal{K}\}$$

とおく。 \mathcal{K} は単調族であることより、 $K_n \in \mathcal{K}_2, K_n \uparrow A$ のとき $A \in \mathcal{K}_2$ となり、 $K_n \in \mathcal{K}_2, K_n \downarrow A$ のとき $A \in \mathcal{K}_2$ となり、上と同じ理由により $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}$ である⁵。

$K_0 \in \mathcal{K}$ とし

$$\mathcal{K}_3 = \{K \in \mathcal{K}; K_0 \cup K \in \mathcal{K}, K_0 \cap K \in \mathcal{K}\}$$

とおく。 $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}$ であるから、 $A \cup B = B \cup A$ であることを考えると⁶ $\mathcal{M}_Z^0 \subset \mathcal{K}_3$ である。 \mathcal{K}_3 が単調族であることは上と同様に確かめることができる。よって $\mathcal{K}_3 = \mathcal{K}$ である。したがって

$$K_1, K_2 \in \mathcal{K} \Rightarrow K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}, K_1 \cap K_2 \in \mathcal{K}$$

⁴命題「 M を \mathbf{R}^n の部分集合族とする。 M が有限加法族かつ単調族なら σ -加法族」よりわかる。これを示せ。

⁵ \mathcal{K}_2 は単調族、 $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}$ 、 \mathcal{K} は \mathcal{M}_Z^0 を含む最小の単調族 $\Rightarrow \mathcal{K}_2 = \mathcal{K}$ 。

⁶ $B = K \in \mathcal{M}_Z^0$

これより \mathcal{K} は有限加法族である。(証明終わり (2))

[Step 3](証明(3)) 集合 A の定義関数を 1_A とかく。(1) より、 $1_{E^x}(y), 1_{E_y}(x)$ は可測関数である。

$f(x, y)$ を \mathcal{M}_Z -可測な非負関数とする。可測関数の性質 (Section 1.4.1) より、単関数 f_n で

$$f_n \geq 0, f_n \uparrow f$$

となるものが存在する。 $f_n^x, f_{n,y}$ は、各々 Y, X 上の単関数である。

単関数はいくつかの定義関数の1次結合だから、各々の定義関数が可測関数であることより、可測関数である。よって、Section 1.4.1 命題2より、 $f_n^x, f_{n,y}$ は可測関数である。

$f(x, y)$ が非負とは限らない \mathcal{M}_Z -可測関数の場合には、 $f = f^+ - f^-$, $f^+ \geq 0, f^- \geq 0$ と分解すれば、同様に議論できる。

命題1の証明終わり

定理1の証明

命題1(2)より π の $M_X \otimes M_Y$ の上の1つ1つの積分値の存在は示せた。最後に残った点として、直積測度 π の M_Z 上の可算加法性を示す。

$K_1, K_2, \dots \in \mathcal{M}_Z, K_i \cap K_j = \emptyset (i \neq j), K = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ とする。

$1_K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{K_n}(x, y)$ である。よって

$$\begin{aligned} \pi(K) &= \int \left(\int 1_K(x, y) m_Y(dy) \right) m_X(dx) \\ &= \int \left(\int \sum_{n=1}^{\infty} 1_{K_n}(x, y) m_Y(dy) \right) m_X(dx) \\ &= \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int 1_{K_n}(x, y) m_Y(dy) \right) m_X(dx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int \left(\int 1_{K_n}(x, y) m_Y(dy) \right) m_X(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(K_n) \end{aligned}$$

証明終わり

測度 $\pi = m_X \times m_Y$ に関する積分

$$\int_{X \times Y} f(x, y) \pi(dxdy)$$

を考える。

定理 2 (フビニの定理その 1) $f(x, y)$ は非負可測とする。

(1) 関数 $y \mapsto \int_X f(x, y)m_X(dx)$ は \mathcal{M}_Y -可測関数であり

$$\int_{X \times Y} f(x, y)\pi(dxdy) = \int_Y \left(\int_X f(x, y)m_X(dx) \right) m_Y(dy)$$

(2) (1) で X と Y の役割を入れかえても同じである。

証明 命題 1 (3) の証明と同様にして、 $f(x, y)$ が定義関数の場合に議論すればよい。これは命題 1 (2) において証明されている。証明終わり

定理 3 (フビニの定理その 2) $f(x, y)$ は可積分とする。

(1) 関数 $g(y) = \int_X f(x, y)m_X(dx)$ は \mathcal{M}_Y -可測関数であり

$$\int_{X \times Y} f(x, y)\pi(dxdy) = \int_Y \left(\int_X f(x, y)m_X(dx) \right) m_Y(dy)$$

(2) (1) で X と Y の役割を入れかえても同じである。

証明 $f(x, y) = f^+(x, y) - f^-(x, y)$, $f^+(x, y) \geq 0$, $f^-(x, y) \geq 0$ において、フビニの定理その 1 を使う。 $f^+ \leq |f|$, $f^- \leq |f|$ なので、可積分性は仮定から従う。証明終わり

注意 f が可積分でない時には、上の主張は一般になりたたない。

例題 4 $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ に対し

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)dy \neq \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y)dx$$

である。

じっさい、もし f が可積分ならフビニの定理より両者は一致するはずであるが、

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} |f(x, y)|dxdy = +\infty$$

なので、 $f(x, y)$ は $[0, 1] \times [0, 1]$ で可積分でない。

証明

$$\begin{aligned}
\int \int_{[0,1] \times [0,1]} |f(x,y)| dx dy &= -2 \int \int_{\Delta(0,0)(0,1)(1,1)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \\
&= -2 \int_0^1 dy \int_0^y \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = 2 \int_0^1 \left(\left[\frac{x}{y^2 + x^2} \right]_0^y \right) dy \\
&= 2 \int_0^1 dy \left(\frac{1}{2} \frac{y}{y^2} \right) = \int_0^1 dy \frac{1}{y} = +\infty.
\end{aligned}$$

例題 5 $f(x,y) = x^y, 0 < a < b$ に対し

$$\int_0^1 \left(\int_a^b f(x,y) dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\log x} dx = \log \frac{1+b}{1+a}$$

である。じっさい、

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_a^b x^y dx dy &\leq \int_0^1 \int_a^b x^a dx dy \\
&= (b-a) \frac{1}{1+a} [x^{1+a}]_0^1 \\
&= \frac{b-a}{1+a} < +\infty
\end{aligned}$$

だから、 $f(x,y)$ は $[0,1] \times [a,b]$ で可積分である。

そこで、

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \int_a^b x^y dy &= \int_0^1 dx \left[x^y \frac{1}{\log x} \right]_a^b \\
&= \int_0^1 dx \frac{1}{\log x} (x^b - x^a)
\end{aligned}$$

(計算不能) であるが、

$$\begin{aligned}
\int_a^b dy \int_0^1 x^y dx &= \int_a^b dy \frac{1}{1+y} [x^{1+y}]_0^1 \\
&= \int_a^b \frac{1}{1+y} dy = \log \frac{1+b}{1+a}
\end{aligned}$$

であるから、フビニの定理から結論を得る。

例題 6 (分布等式)

$f: E \rightarrow \mathbf{R}$ とする。 $1 \leq p < \infty$ に対して

$$\int_E |f(x)|^p m(dx) = p \int_0^\infty t^{p-1} m(|f| > t) dt$$

ただし、 $m(|f| > t) = m(\{x; |f(x)| > t\})$

証明 $F(y, s) = 1_{\{(y,s); y \in E, s \in [0, \infty), |f(y)| > s\}}$ とおく。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{p-1} m(|f| > t) dt &= \int_0^\infty t^{p-1} \left(\int_E F(x, t) m(dx) \right) dt \\ &= \int_E \left(\int_0^\infty t^{p-1} F(x, t) dt \right) m(dx) = \int_E \left(\int_0^{|f|} t^{p-1} dt \right) m(dx) \\ &= \int_E \frac{1}{p} [t^p]_0^{|f|} m(dx) = \frac{1}{p} \int_E |f(x)|^p m(dx) \end{aligned}$$

上で 2 番目の等式から 3 番目の等式に行くときにフビニの定理を使った。

証明終わり

$p = 1, f(\cdot) = X(\cdot), m = P$ ととれば

$$E[|X|] = \int_0^\infty dP(|X| > t)$$

として平均値 (期待値) が計算できる。とくに X が非負ならば

$$E[X] = \int_0^\infty dP(X > t)$$

である。ここで $P(X > t) = 1 - P(X \leq t)$ であり、 $F(t) = P(X \leq t)$ は X の分布関数である。

例題 7

$$(1) \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \int_0^\infty \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

解 1 (1)

$$\int_0^r \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_0^r \left(\int_0^\infty e^{-xy} |\sin x| dy \right) dx$$

(何者、 $\int_0^\infty e^{-xy} dy = \frac{1}{x}$.) したがって、 $(x, y) \mapsto e^{-xy} \sin x$ は $(0, r) \times (0, \infty)$ で積分可能である。これよりフビニの定理が適用できて

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^r \left(\int_0^\infty e^{-xy} \sin x dy \right) dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^r e^{-xy} \sin x dx \right) dy \end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^r e^{-xy} \sin x dx = \left[-e^{-xy} \frac{\cos x + y \sin x}{y^2 + 1} \right]_0^r = \frac{1}{y^2 + 1} - e^{-ry} \frac{\cos r + y \sin r}{y^2 + 1}$$

(じっさい

$$\begin{aligned} \left(e^{-xy} \frac{\cos x + y \sin x}{y^2 + 1} \right)' &= -ye^{-xy} \frac{\cos x + y \sin x}{y^2 + 1} + e^{-xy} \frac{-\sin x + y \cos x}{y^2 + 1} \\ &= e^{-xy} \frac{-(y^2 + 1) \sin x}{y^2 + 1} = -e^{-xy} \sin x \end{aligned}$$

これより $r \rightarrow \infty$ として

$$\int_0^\infty e^{-xy} \sin x dx = \frac{1}{y^2 + 1}$$

ここで

$$\int_0^\infty \frac{1}{y^2 + 1} dy = \arctan \infty = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \quad y = 1/x \text{ とおくと } dy = -\frac{1}{x^2} dx = -y^2 dx$$

$$LHS = \int_0^\infty y^{-2} y \sin y dy = \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} dy$$

よって (1) よりしたがう。

積分記号下の微分

$f(t, x) : (a, b) \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ とし、次を仮定する。

(1) $t \in (a, b)$ を固定すれば、 $x \mapsto f(t, x)$ はルベグ可測

(2) $x \in \mathbf{R}$ を固定すれば、 $t \mapsto f(t, x)$ は微分可能

(3) あるルベグ可積分関数 $\varphi(x)$ があって

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) \right| \leq \varphi(x) \quad \text{for } (t, x) \in (a, b) \times \mathbf{R}$$

このとき、 $\int f(t, x) dx$ は t に関して微分可能であり、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f(t, x) dx = \int \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx$$

である。

証明は

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h, x) - f(t, x)}{h}$$

であることによる。つまり、条件 (3) からルベグの収束定理が使え、

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) dx &= \int \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h, x) - f(t, x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int \frac{f(t+h, x) - f(t, x)}{h} dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int (f(t+h, x) - f(t, x)) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int f(t+h, x) dx - \int f(t, x) dx \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int f(t, x) dx \end{aligned}$$

証明終わり

例題 8 (ガウス積分)

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} a^{-3/2} \quad (a > 0)$$

じっさい、

(step 1) $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ という極分解 (極座標変換) から、 $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ である。 $t = \sqrt{\alpha} x$ とおくと、 $dt = \sqrt{\alpha} dx, x^2 = t^2/\alpha$ より、

$$(1) \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

である。

$f(\alpha, x) = e^{-\alpha x^2}$ とおく。 $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -x^2 e^{-\alpha x^2}$ であり、

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, x) \right| = |x^2 e^{-\alpha x^2}| = x^2 e^{-\alpha x^2}$$

となっている。

(step 2)

$a > 0$ は与えられた定数とする。 $a \geq \alpha$ とし、 $a' < \alpha$ なる $a' > 0$ を1つ固定する。このとき、

$$x^2 e^{-\alpha x^2} \leq x^2 e^{-a' x^2} \equiv \varphi(x)$$

とおく。ここで $\varphi(x)$ は可積分である。

じっさい、(1)より、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi(x) dx &= \int_0^\infty x^2 e^{-a' x^2} dx = \int_0^\infty x \cdot x e^{-a' x^2} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2a'} x e^{-a' x^2} \right]_0^\infty + \frac{1}{2a'} \int_0^\infty e^{-a' x^2} dx \\ &= 0 + \frac{1}{2a'} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a'}} = \frac{1}{4a'} \sqrt{\frac{\pi}{a'}} < +\infty \end{aligned}$$

これより、 $\alpha = a$ ととると、(1)およびルベグの収束定理 ($\lim \leftrightarrow \frac{d}{da}$)より、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty -x^2 e^{-ax^2} dx &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} e^{-ax^2} dx \\ &= \frac{d}{da} \int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{d}{da} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\pi a^{-1/2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left(-\frac{1}{2} \right) a^{-3/2} = -\frac{1}{4} \sqrt{\pi} a^{-3/2} \end{aligned}$$

よって、

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\pi} a^{-3/2}$$

となる。

この計算は標準正規分布の分散の計算に使われる。

1.4.5 確率論との関係

測度空間 (Ω, \mathcal{M}, m) が $m(\Omega) = 1$ をみたすとき、確率空間という。このとき、 \mathcal{M} の元は事象とよばれる。とくに、 Ω は全事象とよばれる。

\mathcal{M} は σ -集合体であるから、次を満たす：

(i) $\Omega \in \mathcal{M}$

(ii) $A \in \mathcal{M}$ ならば $A^c \in \mathcal{M}$

(iii) $A_n \in \mathcal{M}, n = 1, 2, \dots$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$

また m を確率 (または確率測度) という。 P とかくこともある。確率は次を満たす。

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) $A_n \in \mathcal{M} (n = 1, 2, \dots), A_n \cap A_m = \emptyset (n \neq m)$ ならば

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

なお、 $A \cap B = \emptyset$ のとき A と B は排反という。 [「 A でないとき B 」と言っているのではない。普通の日本語とちがう。]

例 1 (1) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathcal{M} = \mathcal{P}(\Omega), m(A) = \frac{1}{6} \times \#A, A \in \mathcal{M}$ (ここで $\#A$ は A の個数を表す。)

これは、さいころを 1 回振ったときに出る目を事象とする確率空間である。

(2) $\Omega = \{(i, j); i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathcal{M} = \mathcal{P}(\Omega), m(A) = \frac{1}{36} \times \#A, A \in \mathcal{M}$

これは、さいころを 2 回振ったときに出る目の組を事象とする確率空間である。

たとえば、 A を、1 度目に 3 の倍数の目が出て、2 度目に 5 の目が出る事象、とすると、

$$\#A = \#\{(3, 5), (6, 5)\} = 2$$

であるから、 $m(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ 。

問 1 コインを何度も投げる試行で、 n 回目表となる事象を A_n とする。次の事象を A_n で表し、その確率 (数値) を求めよ。

(i) 最初から n 回表が続く事象

(ii) 偶数回目は裏ばかりとなる事象

(iii) 表が無限回出る事象

可測関数 $X : \Omega \rightarrow \Omega'$ は確率変数とよばれる。つまり

$$[X \in E] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in E\} \in \mathcal{M}$$

をみたす。

たとえば、

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \Omega' = \{\text{偶}, \text{奇}\},$$

$$f(1) = f(3) = f(5) = \text{奇}, f(2) = f(4) = f(6) = \text{偶}$$

とおくと、各元 $\omega' \in \Omega'$ に対し、 $f^{-1}(\omega') \in \mathcal{M}_\Omega$ であるから、 f は確率変数である。

例 (野球のサイン表)

キャッチャーはピッチャーに、敵チームにわからないように情報を送る。たとえば グーというサインは、「(次に)ストレートを送る」という意味である。

キャッチャー・ピッチャー間で次のサイン表を使うとする。

サイン	グー	チョキ	パー	not グー	not チョキ	not パー
ストレート	o	o	o	\times	\times	\times
カーブ	\times	o	o	o	\times	\times
シュート	\times	\times	o	o	o	\times

たとえば、カーブを投げるよう指示するときには

「チョキ and not グー」

というサインを送る。ただし、たとえば「not グー」はグーを横に振るサインであり、「and」は2つのサインを続けて送ることである。

このとき、キャッチャーの頭の中では{グ, チョキ, パー, ...}の作る σ -加法族が構成される。サインを見ただけでは敵チームにピッチャーの投げる球種は伝わらない。このときサイン表の役割をするのが可測関数 f である。

例題 9 $\Omega = \{1, \dots, 10\}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\Omega)$ とし、確率 P を $P(A) = \sum_{i \in A} \frac{1}{10}$, $A \in \mathcal{M}$ とする。 (Ω, \mathcal{M}, P) は確率空間である。

確率変数 $f: \Omega \rightarrow \Omega' = \{\text{赤}, \text{青}, \text{白}\}$ とする。ここで $f(i) = \text{赤}$, for $i = 1, 2$, $f(i) = \text{青}$, for $i = 3, 4, 5$, $f(i) = \text{白}$, for $i = 6, \dots, 10$ である。

$(\Omega', \mathcal{P}(\Omega'))$ 上に確率 $P^f = P \circ f^{-1}$ を次のように構成する。

$$P^f(\text{赤}) = P(\{1, 2\}) = \frac{2}{10}$$

$$P^f(\text{青}) = P(\{3, 4, 5\}) = \frac{3}{10}$$

$$P^f(\text{白}) = P(\{6, \dots, 10\}) = \frac{5}{10}$$

これが関数 f の確率法則 (確率分布) である。

一般に、 X を確率変数とすると、任意の一次元ボレル集合 B に対してその X の逆像の確率 $P(X^{-1}(B))$ が定義可能となる。それを $\mu(B)$ とおく。 μ は $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上の確率である。これを確率変数 X の確率分布といい、 μ_X で表す。

これは任意の定数 c について

$$\{\omega \in \Omega; f(\omega) < c\} \in \mathcal{F}$$

となることを意味する。

例題 10 つぼの中に赤球 n 個、白球 m 個が入っていて、1 個ずつ取り出す。全部で N 回取り出しを行うこととする。

(a) 取り出した後再びもとに戻す場合 (復元抽出)

赤球が出ることを 1 、白球が出ることを -1 で表す。起こりうる可能性全体

$$\Omega = \{1, -1\}^N = \{(x_1, \dots, x_N); x_i = 1 \text{ or } -1\}$$

$x = (x_1, \dots, x_N)$ に対して

$$N^+(x) = \#\{i; x_i = 1\}, N^-(x) = \#\{i; x_i = -1\}$$

とおく。

$$m(\{x\}) = \left(\frac{n}{m+n}\right)^{N^+(x)} \left(\frac{m}{m+n}\right)^{N^-(x)}, m(A) = \sum_{x \in A} m(\{x\})$$

とおくと、 m は Ω 上の測度となる。さらに、

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \sum_{x_i=1 \text{ or } -1, i=1, \dots, N} \left(\frac{n}{m+n}\right)^{N^+(x)} \left(\frac{m}{m+n}\right)^{N^-(x)} \\ &= \left(\frac{n}{m+n} + \frac{m}{m+n}\right)^N = 1 \end{aligned}$$

である。

(b) 取り出した後再びもとに戻さない場合 (非復元抽出)

$N \leq m+n$ の場合のみ考える。起こりうる場合の全体

$$\Omega = \{(x_1, \dots, x_N); N^+(x) \leq n, N^-(x) \leq m\}$$

である。各試行において赤球を $N^+(x)$ 個、白球を $N^-(x)$ 個取り出すので、その場合の数は

$$n(n-1)\cdots(n-N^+(x)+1) \times m(m-1)\cdots(m-N^-(x)+1)$$

である。よって、

$$m(\{x\}) = \frac{n(n-1)\cdots(n-N^+(x)+1) \times m(m-1)\cdots(m-N^-(x)+1)}{(n+m)(n+m-1)\cdots(n+m-N+1)}$$

一方、 $[x]_{k,l}$ で $N^+(x) = k, N^-(x) = l$ となる元全体を表す (ただし $k+l = N$) と、赤玉を n 個から k 個取り出し、残ったもの $(n-k)$ 個を選ぶ選び方を考えて

$$m([x]_{k,l}) = \frac{{}^n C_k {}^{n+m-n} C_{N-k}}{{}^{n+m} C_N}$$

とおけば、 $m(\cdot)$ は Ω 上の測度になり、 $m(\Omega) = \sum_{k=0}^N m([x]_{k,N-k}) = 1$ となる。($\sum_{k=0}^N {}^n C_k {}^m C_{N-k} = {}^{n+m} C_N$ (ヴァンデルモンドの畳み込み) による。演習課題： N に関する帰納法で示せ。)

1.5 積分論-2

1.5.1 Stieltjes 積分

$\Omega = \mathbf{R}$ とし、 g を \mathbf{R} 上単調増加な関数とする。 $I = [a, b)$ にたいし $g(I) = g(b) - g(a)$ とおき、

$$g^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} g(I_n); A \subset \sum_{n=1}^{\infty} I_n, A \subset \mathbf{R} \right\}$$

として外測度 g^* を導入する。これを **Lebesgue-Stieltjes 外測度** という。これから定義される完備な測度を **Lebesgue-Stieltjes 測度** という。この測度を dg で表す。

f を \mathbf{R} 上の連続関数とし、 f の単調増加関数 g に関する **Lebesgue-Stieltjes 積分** $\int_a^b f dg$ を次のように定義する：

$$\int_a^b f dg = \int_{(a,b)} f dg + f(a)(g(a+0) - g(a)) + f(b)(g(b) - g(b-0))$$

とくに、 a, b が g の連続点ならば

$$\int_a^b f dg = \int_{(a,b)} f dg$$

となる。

なお、 g が異なれば dg 可測な集合族 \mathcal{M}_g は一般に異なるが、それらは一様にボレル集合族 \mathcal{B} を含んでいる。

1.5.2 有界変動、 p -変分

この節では $\Omega = \mathbf{R}$ とする。関数 $g(s)$ は

$$|g|_t = \sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{2^n} \left| g\left(\frac{tk}{2^n}\right) - g\left(\frac{t(k-1)}{2^n}\right) \right|$$

が \mathbf{R} の各コンパクト集合上有限であるとき、有界変動 (FV)⁷ という。

f を有界関数とし、 g を有界変動関数とすると、積分 $\int_s^t f(u)dg(u)$ を定義することができる。

定義

FV 関数 $g(t)$ に対し、Stieltjes 積分の意味で

$$I(t) = \int_s^t f(u)dg(u)$$

とおく。FV 関数は 2 つの単調増加関数の差に表わされるので、この定義は意味をもつ。 $g = g^+ - g^-$, g^+, g^- は単調増加とすると

$$dg = dg^+ - dg^-$$

として Stieltjes 積分を定義する。

もし $u \mapsto f(u)$ が連続の場合には、この定義は上節のものと一致する。

g が FV 関数で、 $f(\cdot)$ が微分可能の場合には、次の連鎖律がなりたつ：

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(s))dg(s)$$

直線上の絶対連続関数

$I = [a, b]$ を \mathbf{R} の有界閉区間とする。関数 f が絶対連続 (AC) であるとは、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在し、 I 内の交わらない区間の列 $(a_j, b_j), j = 1, 2, \dots$ で

$$\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta$$

を満たすものについて

$$\sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \epsilon$$

⁷finite variation

が成り立つことである。

定義から、絶対連続関数は有界変動 (FV) である。

可積分関数の原始関数は絶対連続関数である。

定理 I 上の関数 f について次の (i), (ii) は同値である :

(i) f は I 上絶対連続である。

(ii) ある可積分関数 g が存在して $f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt$

この定理の [(ii) \Rightarrow (i) の] 証明には Radon-Nikodym の定理を用いる⁸。

区間 $[a, b]$ における関数 g の変動 $|g|_{t \in [a, b]}$ (cf. Sect. 1.5 上) を $V(g, [a, b])$ とかく。 FV 関数は $V(g, [a, b])$ が有限である。

p -変分

上と同じようにして、関数 g の p -変分を次のように定義する。

$$|g|_t^{(p)} = \sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{2^n} \left| g\left(\frac{tk}{2^n}\right) - g\left(\frac{t(k-1)}{2^n}\right) \right|^p$$

ただし $p \geq 1$ とする。 g の 1-変分が有限ということは、 g が有界変動関数であるということである。

反復積分の列

$$(1, g_t^1, g_t^2, \dots)$$

の各成分 $g_t^k = \int_{0 \leq u_1 < \dots < u_k < t} dg(u_1) \dots dg(u_k)$, $k = 1, 2, \dots$ は、 p -変分ノルムを使って評価できる。

1.5.3 Radon-Nikodym の定理

完全加法的集合関数

(Ω, \mathcal{M}, m) 上に可積分関数 f が与えられたとき、 $\int_A f(x)m(dx)$ を $F(A)$ とかく。このとき、 $-\infty < F(A) < +\infty$ であり、

$$A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \quad (A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j)$$

⁸(i): $F(a) = \int_a^a f(x)d\mu(x), F(b) = \int_a^b f(x)d\mu(x)$ then $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)d\mu(x) \leq \|f\|_{L^1} \times (b-a)$
(ii) \Rightarrow (i) は以下。

とすると

$$F(A) = \sum_{n=1}^{\infty} F(A_n)$$

となっている。しかし、 $F(A)$ は負の値もとりうるので、測度ではない。測度を拡張した概念である。

定義 $A \in \mathcal{M}$ にたいし実数または $+\infty, -\infty$ を対応させる対応 Φ が次を満たすとき、 Φ を完全加法的集合関数という。(別名：符号付測度 *signed measure*)

$$(1) \Phi(\emptyset) = 0$$

$$(2) A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \text{ に対し } \Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(A_n)$$

なお、 $\Phi(A) = +\infty, \Phi(B) = -\infty$ となる $A, B \in \mathcal{M}$ の組は存在しない。なぜならば、もし存在したとすると、 $A \cup B \in \mathcal{M}$ 。また (2) より

$$\Phi(A) = \Phi(A \setminus B) + \Phi(A \cap B) = +\infty$$

$$\Phi(B) = \Phi(B \setminus A) + \Phi(A \cap B) = -\infty$$

となるから、

$$\Phi(A \cup B) = \Phi(A \setminus B) + \Phi(B \setminus A) + \Phi(A \cap B)$$

の中に $\infty - \infty$ が現れてしまう。この値は定義できないので、 $A \cup B \in \mathcal{M}$ であることに矛盾する。

完全加法的集合関数は次の性質をもつ：

(1) $A_i \in \mathcal{M}, A_1 \subset A_2 \subset \dots$ にたいし

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(A_n) = \Phi(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$$

(2) $A_i \in \mathcal{M}, A_1 \supset A_2 \supset \dots, |\Phi(A_1)| < +\infty$ にたいし

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(A_n) = \Phi(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

証明は測度の場合と同様にできる。

Φ の分解

(1) ハーン分解

Φ があたえられたとき、 $\Omega = P \cup N, P \cap N = \emptyset$ とかける。ここで、すべての $A \in \mathcal{M}$ にたいし、

$$\Phi(A \cap P) \geq 0, \Phi(A \cap N) \leq 0$$

(2) ジョルダン分解

Φ はただ1通りに

$$\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$$

とかける。ここで、 Φ^+, Φ^- は各々完全加法的集合関数で、すべての $A \in \mathcal{M}$ にたいし

$$\Phi^+(A) \geq 0, \Phi^-(A) \geq 0$$

である。

つまり

$$(A, N; \Phi) \Leftrightarrow (\Omega; \Phi^+, \Phi^-)$$

例 2

$$\Phi(A) = F(A) = \int_A f(x)m(dx),$$

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x), f^+(x) = \max(f(x), 0), f^-(x) = \max(-f(x), 0)$$

とかく。

$$P^+ = \{x; f^+(x) > 0\}, N^- = \{x; f^-(x) > 0\}, K = \{x; f(x) = 0\}$$

とおくと、 $\Omega = P^+ \cup N^- \cup K$ (互いに素) とかける。 $K = K_1 \cup K_2$ ($K_1 \cap K_2 = \emptyset$) と分解し、 $P = P^+ \cup K_1, N = N^- \cup K_2$ とおけば、

$$\Omega = P \cup N, P \cap N = \emptyset$$

であり、

$$F(A \cap P) = \int_{A \cap P} f(x)m(dx) = \int_A f^+(x)m(dx) \geq 0$$

$$F(A \cap N) = \int_{A \cap N} f(x)m(dx) = - \int_A f^-(x)m(dx) \leq 0$$

となっている。(ハーン分解)

また、

$$F^+(A) = \int_A f^+(x)m(dx), F^-(A) = \int_A f^-(x)m(dx)$$

とおくと、

$$F = F^+ - F^-, F^+(A) \geq 0, F^-(A) \geq 0$$

である。(ジョルダン分解)

ハーン分解、ジョルダン分解の存在の証明は省略する。

2つの分解の関係

o ハーン \rightarrow ジョルダン

$\Omega = P \cup N$ とする。

$$\Phi(A) = \Phi(A \cap \Omega) = \Phi((A \cap P) \cup (A \cap N)) = \Phi(A \cap P) + \Phi(A \cap N)$$

よって

$$\Phi^+(A) = \Phi(A \cap P), \Phi^-(A) = -\Phi(A \cap N),$$

とおくと、 $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ となり、これが Φ のジョルダン分解を与える。

o ジョルダン \rightarrow ハーン

$\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ とする。 Φ^+, Φ^- は次で与えられる：

$$\Phi^+(A) = \sup\{\Phi(E); E \in \mathcal{M}, E \subset A\}$$

$$\Phi^-(A) = -\inf\{\Phi(E); E \in \mathcal{M}, E \subset A\} = \sup\{-\Phi(E); E \in \mathcal{M}, E \subset A\}$$

これからハーン分解を次のようにしてつくる。 $\alpha = \sup\{\Phi(A); A \in \mathcal{M}\}$ とおく。各 $n = 1, 2, \dots$ に対し (A_n) を

$$\Phi(A_n) \geq \alpha - \frac{1}{2^n}$$

ととることができる。 $\bar{A}_n = \cup_{k=n}^{\infty} A_k$ とおく。また

$$A_{n,m} = A_n \cup A_{n+1} \cup \dots \cup A_{n+m}$$

とおくと、 $m \rightarrow \infty$ のとき $A_{n,m} \rightarrow \bar{A}_n$ となる。

$A_{n,m+1} = A_{n,m} \cup A_{n+m+1}$ であるから

$$\begin{aligned} \Phi(A_{n,m+1}) &= \Phi(A_{n,m} \cup A_{n+m+1}) \\ &= \Phi(A_{n,m}) + \Phi(A_{n+m+1}) - \Phi(A_{n,m} \cap A_{n+m+1}) \\ &\geq \Phi(A_{n,m}) + \alpha - \frac{1}{2^{n+m+1}} - \alpha \\ &= \Phi(A_{n,m}) - \frac{1}{2^{n+m+1}} \end{aligned}$$

すなわち

$$\Phi(A_{n,m+1}) - \Phi(A_{n,m}) \geq -\frac{1}{2^{n+m+1}}$$

となる。これを $m = 0, 1, 2, \dots$ について足すと

$$\begin{aligned} &\Phi(A_{n,p}) - \Phi(A_{n,m}) \\ &= \Phi(A_{n,p}) - \Phi(A_{n,p-1}) + \Phi(A_{n,p-1}) - \Phi(A_{n,p-2}) + \dots + \Phi(A_{n+1}) - \Phi(A_n) \\ &\geq -\frac{1}{2^{n+p}} - \dots - \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \Phi(A_{n,p}) &\geq \Phi(A_n) - \frac{1}{2^{n+1}} - \dots - \frac{1}{2^{n+p}} \\ &\geq \left(\alpha - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2^{n+1}} - \dots - \frac{1}{2^{n+p}} \end{aligned}$$

ここで $p \rightarrow \infty$ とすると

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{A}_n) &\geq \alpha - \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) \\ &= \alpha - \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

$P = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ とおく。 $\bar{A}_n \rightarrow P$ だから

$$\Phi(P) \geq \alpha$$

一方、 α の定義より $\Phi(P) \leq \alpha$ 。よって $\Phi(P) = \alpha = \sup\{\Phi(A); A \in \mathcal{M}\}$ となる。

ここで $A \subset P$ に対し、もし $\Phi(A) < \alpha$ なら

$$\Phi(P \setminus A) = \Phi(P) - \Phi(A) > \Phi(P) = \alpha$$

となって α の定義に矛盾する。よって $\Phi(A) \geq 0$ である。

また $A \cap P = \emptyset$ なる A に対し、もし $\Phi(A) > 0$ ならば

$$\Phi(A \cup P) = \Phi(A) + \Phi(P) > \Phi(P) = \alpha$$

となって α の定義に矛盾する。よって $A \subset P^c$ に対し $\Phi(A) \leq 0$ となる。

$N = \Omega \setminus P$ とおく。上より、これらの P, N が Ω のハーン分解を与える。

ラドン=ニコディムの定理 (Radon-Nikodym)

Φ を完全加法的集合関数とする。 Φ がどのような条件を満たしていれば

$$\Phi(A) = \int_A \tilde{f}(x) m(dx)$$

と表されるかを考察する。

定義 完全加法的集合関数 Φ のジョルダン分解 $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ に対し

$$|\Phi| = \Phi^+ + \Phi^-$$

とおく。べつの完全加法的集合関数 Ψ について

$$|\Phi|(A) = 0 \Rightarrow \Psi(A) = 0$$

がすべての $A \in \mathcal{M}$ についてなりたつとき、 Ψ は Φ に関して絶対連続であるという。このとき $\Psi \ll \Phi$ とかく。

絶対連続でないとき、つまりある $N \in \mathcal{M}$ があって、 $\Phi(N) = 0$ かつ $\Psi(\Omega \setminus N) = 0$ となるとき、 Φ と Ψ は互いに特異であるという。(このとき Φ と Ψ は同値でない。)

例 実数直線上のヘヴィサイドの階段関数

$$H(x) = 0, x < 0; 1, x \geq 0$$

は、その分布的導関数 (*distributional derivative*) としてディラックのデルタ関数 δ_0 を持つ。

これは実数直線上の測度で、0 において点質量 (*point mass*) を持つ。しかし、ディラック測度 δ_0 はルベーグ測度 λ に関して絶対連続ではなく、 λ も δ_0 に関して絶対連続では無い。

すなわち、 $\lambda(\{0\}) = 0$ であるが $\delta_0(\{0\}) = 1$ であり、また U を任意の開集合で 0 を含まないものとするなら、 $\lambda(U) > 0$ であるが $\delta_0(U) = 0$ である。

なお、ジョルダン分解 $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ において、 Φ^+ と Φ^- は互いに特異な測度である。

定義 (Ω, \mathcal{M}, m) が σ -有限とは、ある $A_n \in \mathcal{M}, n = 1, 2, \dots$ が存在し

$$(1) m(A_n) < +\infty, n = 1, 2, \dots$$

$$(2) A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots \rightarrow \Omega$$

がなりたつことである。

定理 (Radon-Nikodym) (Ω, \mathcal{M}, m) を σ -有限な測度空間とする。 Φ は \mathcal{M} 上定義された完全加法的集合関数で

$$(1) |\Phi|(\Omega) < \infty$$

$$(2) \Phi \ll m$$

をみたすとする。このときある \tilde{f} が存在し、すべての $A \in \mathcal{M}$ に対し

$$\Phi(A) = \int_A \tilde{f}(x)m(dx)$$

とかける。さらに、 \tilde{f} は一意的に定まる。

この \tilde{f} は Radon-Nikodym 微分とよばれ、 m -a.e. に一意的に決まる。 \tilde{f} を $\frac{d\Phi}{dm}$ とかく。(p.49の定理 (ii) \Rightarrow (i))

定理 2 (Radon-Nikodym(2)) (Ω, \mathcal{M}, m) を $m(\Omega) < +\infty$ をみたす測度空間とする。 ν を (Ω, \mathcal{M}, m) 上定義された測度で、

$$(1) \nu(\Omega) < \infty$$

$$(2) \nu \ll m$$

をみたすとする。このときある \tilde{f} が存在して、すべての $A \in \mathcal{M}$ に対して

$$\nu(A) = \int_A \tilde{f}(x)m(dx)$$

がなりたつ。

上の定理で、逆に $\nu(\cdot)$ が上のよう書ければ、 $\nu \ll m$ は明らかである。
 $\nu \ll m$ のとき、上の \tilde{f} を測度 m に関する ν の密度関数という。なお、
 高校での変数変換の公式：

$$y = \phi(x) \text{ のとき } dy = \phi'(x)dx$$

はこの定理の特別な場合である。

証明 of 定理 1, 2(Radon-Nikodym)

例 3 (Ω, \mathcal{M}, P) を確率空間とする。 $A \in \mathcal{M}$ を 1 つ固定する。 \cdot が起こった時の A の条件つき確率を次で定義する：

$$P(A|\cdot) = \frac{P(A \cap \cdot)}{P(\cdot)} \quad \text{if } P(\cdot) > 0$$

$$= 0 \quad \text{if } P(\cdot) = 0$$

このとき A が何であっても $P(A \cap \cdot) \ll P(\cdot)$ である。したがって Radon-Nikodym 微分 $\frac{dP(A \cap \cdot)}{dP(\cdot)}$ が条件つき確率 $dP(A|\cdot)$ を与える。

つまり

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

である。

サイコロを 1 回投げたとき、3 の目が出る事象を A とし、奇数の目が出る事象を B とすると、

$$P(A|B) = \frac{1}{3}$$

である。

例 4 年間の入院件数 N は平均 λ のポアソン分布に従い、入院した時の入院患者の年齢が 60 歳以上である確率は p とする。60 歳以上である入院患者が年間 k 人である確率はいくらか。

(解) 年間の、60 歳以上で入院する人の数を X とする。 $X = k$ のとき $N \geq k$ であるから、 $X = k$ という事象を N の値で分類する。

$$P(X = k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(X = k, N = n)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} P(X = k|N = n)P(N = n)$$

$P(X = k|N = n)$ について。入院患者数 n のうち 60 歳以上の人が k 人いる条件付き確率は

$$P(X = k|N = n) = {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k}$$

という二項分布になる。これより

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \end{aligned}$$

となる。(平均 λp のポアソン分布)

定理 2 の証明

Step 1 以下では、 $L^2(m + \nu)$ で L^p 空間で $p = 2$ としたもの (測度は $m + \nu$)、 $L^1(m + \nu)$ で L^p 空間で $p = 1$ としたもの (測度は ν) を表す。

(1-1)

$$f \in L^2(m + \nu) \Rightarrow f \in L^1(\nu)$$

証明

$f \in L^2(m + \nu)$ とすると、

$$\int |f| d\nu \leq \int |f| d(m + \nu) = \int 1 \cdot |f| d(m + \nu)$$

$$\leq \left(\int 1 d(m + \nu) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int |f|^2 d(m + \nu) \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \quad \text{by (1)} \quad (a)$$

(1-2) $f \in L^2(m + \nu)$ に対し、

$$L(f) = \int f d\nu \quad (b)$$

とおくと、 $L(f)$ は $L^2(m + \nu)$ から \mathbf{R} への線形写像になる。

証明

$$\begin{aligned} L(\alpha f + \beta g) &= \int (\alpha f + \beta g) d\nu \\ &= \alpha \int f d\nu + \beta \int g d\nu = \alpha L(f) + \beta L(g). \end{aligned}$$

f の $L^2(m + \nu)$ におけるノルムを $\|f\|$ で表す。(a) より

$$|L(f)| \leq ((m + \nu)(\Omega))^{\frac{1}{2}} \cdot \|f\|_{L^2}.$$

これより $L(f)$ は $L^2(m + \nu)$ から \mathbf{R} への連続な線形写像である。

Step 2

$L^2(m + \nu)$ 上のリースの定理より、連続な線形写像 $L(f)$ は、ある $h_0 \in L^2(m + \nu)$ があって、

$$L(f) = \int f \cdot h_0 d(m + \nu) \quad (c)$$

と表される。ここで $f \geq 0$ のとき $L(f) = \int f d\nu \geq 0$ であるから、 $h_0(x) \geq 0$ である。(b), (c) より

$$\int f \cdot (1 - h_0) d\nu = \int f \cdot h_0 dm \quad (d)$$

がなりたつ。

ここで

$$E = \{x; h_0(x) \geq 1\}$$

とおくと、 $\nu \ll m$ より $\nu(E) = 0$ である。

証明

$\varphi(x) = 1_E(x)$ とおくと、

$$\begin{aligned} 0 \leq m(E) &= \int \varphi(x) dm \leq \int \varphi(x) h_0(x) dm \\ &= \int \varphi(x) (1 - h_0(x)) d\nu \leq 0 \end{aligned}$$

((d) より)。これより $m(E) = 0$ である。 $\nu \ll m$ より $\nu(E) = 0$ である。

$$g(x) = h_0(x) \cdot (1 - \varphi(x))$$

とおくと、 $\nu(E) = 0, m(E) = 0$ より、 g と h_0 は m に関しても ν に関してもほとんど至る所等しい。((d)')

また、 $0 \leq 1 - \varphi(x) \leq 1, h_0(x) < 1$ on E^c であるから、 $0 \leq g(x) < 1$ である。

さらに、 g の定義より

$$\begin{aligned} \int f \cdot (1 - g) d\nu &= \int f \cdot (1 - h_0 + h_0 \cdot \varphi) d\nu \\ &= \int f \cdot h_0 dm + \int f \cdot h_0 \varphi d\nu \quad \text{by (d)} \\ &= \int f \cdot h_0 dm - \int f \cdot h_0 \varphi dm \quad (\text{by (d)'}, E = \{h_0 \geq 1\} \text{ and } \nu(E) = 0, m(E) = 0) \\ &= \int f \cdot h_0 (1 - \varphi) dm = \int f \cdot g dm \quad (e) \end{aligned}$$

である。

Step 3

f を有界関数とする。仮定より $(m + \nu)(\Omega) < +\infty$ だから、 $f \in L^2(m + \nu)$ である。また、 g の定義により g は有界関数である。よって

$$(1 + g + \cdots + g^{n-1})f \in L^2(m + \nu).$$

(e) より

$$(\text{左辺}) = \int (1 + g + \cdots + g^{n-1})f(1 - g) d\nu = \int (1 + g + \cdots + g^{n-1})fg dm = (\text{右辺})$$

ここで $0 \leq g(x) < 1$ だから、上式は

$$\int (1 - g^n)f d\nu = \int \frac{1 - g^n}{1 - g} f(1 - g) d\nu = \int \frac{g}{1 - g} (1 - g^n)f dm \quad (f)$$

とかける。

ここで $|g| < 1$ だから、 $n \rightarrow \infty$ のとき $(1 - g^n)f$ は単調に増加して f に収束する。よって (f) で $n \rightarrow \infty$ とすると

$$\int f d\nu = \int \frac{g}{1 - g} f dm \quad (g)$$

$f = 1$ とおくと、 $\frac{g}{1 - g} \in L^1(m)$ となる。

そこで $\tilde{f} = \frac{g}{1-g}$ とおく。(g) で $f = 1_A$ ととると、

$$\int f d\nu = \nu(A) = \int_A \tilde{f}(x) dm(x)$$

となって、主張が成立する。q.e.d.

系 (A)

λ, μ, ν を σ -有限な測度とする。このとき、(1) $\nu \ll \lambda, \lambda \ll \mu$ ならば

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\nu}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\mu} \quad \mu - a.e.$$

(2) $\lambda_1 \ll \mu, \lambda_2 \ll \mu$ ならば

$$\frac{d}{d\mu}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{d\lambda_1}{d\mu} + \frac{d\lambda_2}{d\mu} \quad \mu - a.e.$$

(B)

λ, μ は σ -有限な測度とする。 $\lambda \ll \mu, \mu \ll \lambda$ ならば、

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{1}{\frac{d\mu}{d\lambda}} \quad \mu - a.e.$$

である。

1.5.4 L^p -空間

$E \in \mathbf{R}^d$ とし、 $(E, \mathcal{B}(E), dx)$ を測度空間とする。 $1 \leq p < +\infty$ とする。 $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ にたいし

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

を f の L^p ノルムという。

$$L^p(E) = \{f \in L(E); \|f\|_{L^p} < +\infty\}$$

を E 上の L^p 空間という。ただし、 $L(E)$ は E 上のルベグ可測関数全体を表す。

$L^p(E)$ は和とスカラー倍について閉じており、無限次元ベクトル空間になる。また、 $L^p(E)$ はノルムに関して完備 (収束先が $L^p(E)$ の中にある) ことから、バナッハ空間になる。

いくつかの不等式

命題 (ヘルダーの不等式)

$1 < p < +\infty, 1 < q < +\infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ にたいし、 $f \in L^p(E), g \in L^q(E)$ ならば

$$\int_E |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

とくに、 $p = q = 2$ のとき、**Schwarz** の不等式という。

参考文献

- [1] I. カラザス (著), S.E. シュレーブ (著), 渡邊 壽夫 (翻訳)
ブラウン運動と確率積分
丸善出版 (2011/11/1) ISBN-10 : 4621062859
- [2] 吉田伸生
ルベグ積分入門 使うための理論と演習
日本評論社; 新装版 (2021/3/11) ISBN-10 : 453578941X
- [3] 原啓介
測度・確率・ルベグ積分 応用への最短コース (KS理工学専門書)
講談社 (2017/9/21) ISBN-10 : 4061565710
- [4] 新井 仁之
ルベグ積分講義—ルベグ積分と面積 0 の不思議な図形たち
日本評論社 (2003/1/1) ISBN-10 : 4535783748