確率過程入門

講義ノート2023

第1章　基礎概念

1.0.1　一般の確率空間

連続値をとる確率変数族を扱うには、標本空間 Ω は非加算無限集合でなければばならない。Ω としてこのように大きなものをとり、事象の族 $\mathcal{F}$ として Ω の部分集合全体を採用すると、その上の確率 P を矛盾なく定義することができなくなることがある。そのため、かならずしも部分集合の全体でないが、十分に多くの部分集合の族からなる完全加法族と呼ばれるものを $\mathcal{F}$ とする必要が起こる。

この章では、標本空間 Ω は一般の抽象集合とする。標本空間 Ω の部分集合の族 $\mathcal{F}$ で次の性質を満たすものを**完全加法族**または**σ-加法族**という。そして、$\mathcal{F}$ の各元を**事象**と呼ぶ。

•$\Omega \in \mathcal{F}$ (Ω は事象である。これを**全事象**という).

•$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ は補集合をとる操作に関して閉じている)

•$A_n \in \mathcal{F}(n = 1, 2, ...) \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ は可算和をとる操作に関して閉じている).

σ とは「可算的な」という意味である。可算演算に関しても、つぎのド・モルガンの法則が成立する。

$$(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^c, (\cap_{n=1}^{\infty} A_n)^c = \cup_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

可算無限個の事象列 $\{A_n\}$ にたいして、その上極限事象、下極限事象をそれぞれ、

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{m=1}^{\infty} \cup_{n=m}^{\infty} A_n, \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=m}^{\infty} A_n$$

によって定義する。これらはまた事象である。上極限事象は $\{A_n\}$ **のうち無限個が起こる**という事象を表し、下極限事象は、$\{A_n\}$ **のうちある番号から先のすべてが起こる**という事象を表す。

σ-加法族 $\mathcal{F}$ の各元 A に対して、ある実数 $P(A)$ で $0 \le P(A) \le 1$ をみたすものが定まってつぎの性質を満たすとき、$P(A)$ を事象 A の**確率**と

いう。

$$\bullet P(\Omega)=1(\text{全事象の確率は}1).$$

$$\bullet A_n\in\mathcal{F}, A_n\cap A_m=\emptyset(n\neq m)\Rightarrow P(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)\,(\text{確率の完全加法性の公理}).$$

定理 1.0.1

$$(1)P(A^c)=1-P(A), P(\emptyset)=0.$$

$$(2)A\subset B\Rightarrow P(B)=P(A)+P(B\setminus A).$$

$$(3)A_n\subset A_{n+1}(n=1,2,...)\Rightarrow P(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n).$$

$$(4)A_n\supset A_{n+1}(n=1,2,...)\Rightarrow P(\cap_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to\infty}P(A_n).$$

$$(5)P(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

独立性

確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ を1つとり固定。

定義

(a) 2つの事象 $A,B\in\mathcal{F}$ が独立であるとは

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

が成り立つことである。

(b) n 個の事象 $A_1,...,A_n\in\mathcal{F}$ が独立であるとは、これらの任意の k 個 $(k\leq n)$ $A_{j_1},...,A_{j_k}\in\mathcal{F}$ に対して

$$P(A_{j_1}\cap A_{j_2}\cap...\cap A_{j_k})=P(A_{j_1})P(A_{j_2})\cdots P(A_{j_k}) \qquad (*)$$

が成り立つことである。

(c) 任意の濃度の事象 $A_\lambda(\lambda\in\Lambda, A_\lambda\in\mathcal{F})$ が独立とは、 この集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ からとった任意の有限個の事象が独立になることである。

例 n個の事象の独立性では、上の $(*)$ の $k=n$ のときのみの成立では不十分である。たとえば、$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}, A_1=\{1,2,3,4\}, A_2=A_3=\{4,5,6\}$ とすると、

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(\{4\})=\frac{1}{6},\ P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$$

となるので、$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ は成り立つ。一方、$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(\{4\}) = \frac{1}{6} \neq P(A_1)P(A_2) = P(A_1)P(A_3) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(A_2 \cap A_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq P(A_2)P(A_3) = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$ となって、A_1, A_2, A_3 のどの 2 つも独立にならない。

(d) ある事象 A が、$\mathcal{F}$ の部分集合族 $\mathcal{G}$ と独立であるとは、A が任意の $B \in \mathcal{G}$ と独立になることである。

(e)$\mathcal{F}$ の n 個の部分集合族 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, ..., \mathcal{G}_n$ が独立であるとは、それぞれの部分集合族から任意にとった n 個の事象 $A_j \in \mathcal{G}_j$ が独立になることである。

問 1 $A_1, A_2, ..., A_n$ が独立である時、$A_1^c, A_2^c, ..., A_n^c$ も独立であることを示せ。

条件付き確率

事象 B の事象 A に関する条件付き確率 $P(B|A)$ を

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

で定める。これは事象 A のみを確率が定義される世界として B の確率を定義するものである。2 つの事象 A、B が独立なときは

$$P(B|A) = P(B)$$

となる。

$\mathcal{D}$ を Ω の分割：

$$\mathcal{D} = \{A_1, A_2, ...\}$$

$(A_i \cap A_j = \emptyset, \cup A_i = \Omega, P(A_i) > 0, i = 1, 2, ...)$ とする。確率変数 $P(B|\mathcal{D})$ を

$$P(B|\mathcal{D})(\omega) = \sum_i P(B|A_i) 1_{A_i}$$

とおく。

ボレル・カンテリの補題

定理 1.0.2 *(ボレル・カンテリ)*

$$(1)A_n \in \mathcal{F}(n = 1, 2, ...) \text{ が独立であってもなくても}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0; P(\liminf_{n\to\infty} A_n^c) = 1.$$

$$(2)A_n \in \mathcal{F}(n = 1, 2, ...) \text{ が独立のとき}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Rightarrow P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1; P(\liminf_{n\to\infty} A_n^c) = 0.$$

問 2 定理 *1.0.2* を証明せよ。

[*Hint*: (1) 任意の $m = 1, 2, ...$ に対し

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subset \cup_{j=m}^{\infty} A_j$$

であるから

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) \le P(\cup_{j=m}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=m}^{\infty} P(A_j)$$

これより $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ ならば、$m \to \infty$ のとき $\sum_{j=m}^{\infty} P(A_j) \to 0$
(2) 補集合を考えると

$$P(\liminf_{n\to\infty} A_n^c) = P(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{j=n}^{\infty} A_j^c) = 0$$

を証明すればよい。そのためには任意の n に対し

$$P(\cap_{j=n}^{\infty} A_j^c) = 0$$

であることを証明すればよい。
A_j の独立性と $e^{-x} \ge 1 - x$ より

$$P(\cap_{j=n}^{n+k} A_j^c) = \Pi_{j=n}^{n+k} P(A_j^c) = \Pi_{j=n}^{n+k}(1 - P(A_j)) \le \exp(-\sum_{j=n}^{n+k} P(A_j))$$

$k \to \infty$ とすれば仮定から $\sum_{j=n}^{n+k} P(A_j) \to \infty$ となるので、最後の項が 0 に収束する。つまり $P(\cap_{j=n}^{\infty} A_j^c) = 0$ q.e.d.]

例毎回独立に繰り返しさいころを投げる。X_i を、i 回目のさいころの目が 1 ならば 1 、そうでなければ 0 とする。X_i の分布は

$$P(X_i = 1) = \frac{1}{6}, \quad P(X_i = 0) = \frac{5}{6}$$

である。

事象の列 $\{X_i = 1\}$ は独立であり、$\sum_{k=1}^{\infty} P(X_i = 1) = \infty$ より、定理 1.2 から $P(\limsup_{i\to\infty}\{X_i = 1\}) = 1$ となる。つまり、1 の目が無限回出る確率は 1 である。

標本空間 が $\mathbf{R}$ に等しいとき、部分集合族としては $\mathbf{R}$ の部分集合の全体を考えるのではなく、ボレル集合と呼ばれる特別な部分集合の全体（これを**ボレル集合族**といい $\mathcal{B}$ で表す）を採用するのが標準的である。$\mathcal{B}$ はつぎの条件で特徴づけられる。

(1) $[a, b)$ のタイプの区間はボレル集合である。すなわち $[a, b) \subset \mathcal{B}$.

(2) $\mathcal{B}$ は補集合と可算和をとる操作に関して閉じている。($A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}, A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}$)

(3) $\mathcal{B}$ は上の (1),(2) の性質をもつ集合族のうち最小のものである。

$\mathbf{R}$ の部分集合でボレル集合でないものが存在することが知られている。しかし、常識的に考えられるほとんどの集合はボレル集合である。たとえば、あらゆるタイプの 1 次元区間はボレル集合であり、 1 点からなる集合やその加算和である有理数の集合、その補集合である無理数の集合などはみなボレル集合である。

1.1 測度論的基礎

近代的な確率論は測度論の概念・用語を用いて記述される。確率解析の理論もそうである。基本的に次のような対応がある：

確率論		測度論
全事象	Ω	全体集合
事象	A	可測集合 E
確率	P	$P(\Omega)=1$ なる測度 P
確率変数	X	可測関数 f
期待値	$E[X]$	積分　$\int f d\mu$
条件付き確率	$P(A\|\cdot)$	ラドン・ニコディム導関数　$\frac{dP(A\cap\cdot)}{dP(\cdot)}$

1.2　確率とは何か

古典的な確率の定義 (ラプラス) では,「N 個の場合の確からしさの同等性」を根拠にして確率を決めている。

では,「同等に確からしい」とは何か。つまり，扱っている対象の何と何を同一視し，何と何を区別すればよいか。そして，いかにして「どれが起こることも同程度に期待できる」と考えうるのか。

問 3 次の確率計算は実験にあうか。

（１）明日の天気は，雨が降るか（A），降らないか（A^c）のどちらかである。よって，$P(A)=1/2$。

よって，$P(A)=1/2$。

（２）植物（たとえばひな菊）の花びらを使った恋占いでは，結論となる事象には「愛してる」と「愛してない」の *2* つがあり，花びらの数の奇数・偶数に「愛してる」と「愛してない」を対応させる。偶数と奇数は交互に並んでいるから，これはこれら 2 つの事象が同等に確からしいことを（暗黙のうちに）仮定していることになる。この仮定は妥当か。

じつは，それは先験的には知りえない。「同等に確からしい」事象は，実験に合うように設定するものなのである。

例　N 個の箱に r 個の玉を入れる問題

＜仮定 I ＞　1 つの玉がどの箱に入るかは同等に確からしく、各々$1/N$ である。

次のように書いても同じ：

＜仮定 I' ＞　いろいろな玉の入れ方は全部で N^r 通りあるから、これらの書く場合を同等に確からしいと仮定して、各々$1/N^r$ とする。

これは重複順列 ${}_N\Pi_r = N^r$ 個の場合をすべて同等とみなす立場。

この仮定は，箱を空間の小領域、玉を気体の分子と見たときに,「マックスウエル-ボルツマンの統計」とよばれる。しかし、この統計（確率の決め方）では実験にあわなかった（黒体輻射の実験を説明できない）。

＜仮定 II ＞　玉は区別がつかない。

区別がつくのは、どの箱に何個づつ玉が入っているか、という様相のみである。したがって、重複組み合わせ（異なる N 種類のものから重複を許して r 個とる組み合わせ）${}_NH_r = {}_{N+r-1}C_r$ 個の場合をすべて同等とみなす立場。言い換えると、

＜仮定 II' ＞　玉の盛り分け方は全部で ${}_NH_r$ 通りあり、それらをすべて同等とする。

問 4　例えば、$N = 3, r = 2$ ならば、${}_3H_2 = 6$。これら *6* 通りをすべて書き出せ。

この仮定は,「ボーズ-アインシュタインの統計」とよばれる（光子 (ボーズ粒子）を取り扱うときに用いられる)。この場合実験に当う。

さらに、次の仮定を考える。

＜仮定 III ＞　1 つの箱に玉は 1 つしか入らない

とする。この場合には重複を許さない組み合わせ ${}_NC_r$ 通りの場合がある。言い換えると、

＜仮定 III' ＞　玉の盛り分け方は全部で ${}_NC_r$ 通りあり、それらをすべて同等とする。

この仮定は、電子や陽子（フェルミ粒子）を取り扱うときに用いられ,「フェルミ-ディラクの統計」とよばれる（この場合実験に当てはまる)。(物理では＜仮定 III ＞は,「パウリの排他原理」(異なる粒子は同時に同一状態を取ることはない）に対応する。)

問 5　$N = 4, r = 3$ とする。仮定 $\mathrm{I} - \mathrm{III}$ のもとで同等に確からしい場合を、各々すべて書き出せ。

上の仮定 II, III を現実離れしたものと思ってはいけない。

ある種の色盲の人は赤と緑の区別がつかない。青，赤，緑の 3 種類のランプ（発光ダイオード）を暗闇で等頻度で発光させるとする。この色盲の人には，赤のランプと緑のランプは区別がつかず，事象 $A =$「青が発光する」，事象 $B =$「赤（＝緑）が発光する」，の 2 つの事象に対して，$P(A \cup B) = 1, P(A) = 1/3, P(B) = 2/3$ と感じるであろう。

また，モンシロチョウは紫外線が見えるが，ヒトには紫外線が見えない。紫外線の発光によってある事象 A の発生が伝えられたとき，モンシロチョウには $P(A) > 0$ だとしても，ヒトには $P(A) = 0$ でなければ正しい確率と思われない（ヒトの目から見た実験に合わない）。

このように，何をもって「同等に確からしい」とするかは先見的には決まらない。確率は，光や熱のように物理量として実在するものではなく，我々の脳の中で「実験に合うように」設定されるものなのである。

1.2.1　いくつかの組み合わせ論的等式 (離散確率論の基礎)

(1) 二項定理 (数 IA)

$$(1+x)^k = \sum_{l=0}^{k} {}_kC_l x^l$$

$$(a+b)^k = \sum_{l=0}^{k} {}_kC_l a^l b^{k-l}$$

多項定理

よく知られているように

$$(a+b+c)^k = \sum_{0\le l, 0\le m, 0\le n, l+m+n=k} \frac{k!}{l!m!n!} a^l b^m c^n$$

であり、

$$\begin{aligned}(\sum_{l=1}^{n} x_l)^k &= \sum_{d_1\ge 0,\ldots,d_n\ge 0, d_1+\ldots+d_n=k} \frac{k!}{d_1!\cdots d_n!} x_1^{d_1}\cdots x_n^{d_n} \\ &= \sum_{d_1\ge 0,\ldots,d_n\ge 0, d_1+\ldots+d_n=k} k!\ \frac{x_1^{d_1}}{d_1!}\cdots\frac{x_n^{d_n}}{d_n!}\end{aligned}$$

ここで $n\to\infty$ とすると、k と n の役割を入れ替えて

$$(\sum_{n=1}^{\infty} x_n)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{d_1\ge 1,\ldots,d_k\ge 1, d_1+\ldots+d_k=n} x_{d_1}\cdots x_{d_k}$$

ともかける [1]。

[1] $(x_1+x_2+\ldots)(x_1+x_2+\ldots)\ldots(x_1+x_2+\ldots)$
この中からどいつを拾ってくるか; そいつらが全部で k 個ある。

(2)Fa'a di Bruno formula

$g(x)$ と $f(y)$ を微分可能関数で、$g(0)=0$, かつ形式的べき級数で

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$$

$$f(y)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{y^k}{k!}$$

とする。このとき合成関数 $f \circ g(x)$ は

$$f \circ g(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!})^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{d_1 \geq 1,\ldots,d_k \geq 1, d_1+\ldots+d_k=n} b_{d_1} \cdots b_{d_k} \frac{x^{d_1}}{d_1!} \cdots \frac{x^{d_k}}{d_k!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \sum_{d_1 \geq 1,\ldots,d_k \geq 1, d_1+\ldots+d_k=n} \frac{b_{d_1}}{d_1!} \cdots \frac{b_{d_k}}{d_k!} \tag{0.11}$$

で与えられる。（上記参照; $n! \Leftrightarrow k!$ となっている。）

以下、$P_1,...,P_k$ を $\{1,...,n\}$ の分割として、その要素数を $|P_1|,...,|P_k|$ と書くと、

$$n! \sum_{d_1 \geq 1,\ldots,d_k \geq 1, d_1+\ldots+d_k=n} \frac{b_{d_1}}{d_1!} \cdots \frac{b_{d_k}}{d_k!} = \sum_{d_1 \geq 1,\ldots,d_k \geq 1, d_1+\ldots+d_k=n} \frac{n!}{d_1! \cdots d_k!} b_{|P_1|} \cdots b_{|P_k|}$$

$$= k! \sum_{P_1 \cup \ldots \cup P_k=\{1,\ldots,n\}} b_{|P_1|} \cdots b_{|P_k|}$$

となる。($k!$ は $P_1,...,P_k$ の順列の数。) つまり

$$\frac{n!}{k!} \sum_{d_1 \geq 1,\ldots,d_k \geq 1, d_1+\ldots+d_k=n} \frac{b_{d_1}}{d_1!} \cdots \frac{b_{d_k}}{d_k!} = \sum_{d_1 \geq 1,\ldots,d_k \geq 1, d_1+\ldots+d_k=n} \frac{n!}{d_1! \cdots d_k!} b_{|P_1|} \cdots b_{|P_k|}$$

$$= \sum_{P_1 \cup \ldots \cup P_k=\{1,\ldots,n\}} b_{|P_1|} \cdots b_{|P_k|}$$

である。

(3)Bell 多項式

$$B_{n,k}(b_1, ..., b_{n-k+1}) = \sum_{P_1 \cup ... \cup P_k = \{1,...,n\}} b_{|P_1|} \cdots b_{|P_k|}, \tag{0.12}$$

$B_{n,0}(b_1, ..., b_n) = 0, B_{0,0} = 1$ をオーダー (n, k) の Bell 多項式という。

これより

$$f \circ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} a_k B_{n,k}(b_1, ..., b_{n-k+1}) \tag{0.13}$$

となる。ただし、$g(x)$ は上のようなものである。

たとえば $f(y) = e^y, x = 1$ とすると、$a_k = 1, k = 0, 1, ...$ となり

$$\exp(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n(b_1, ..., b_n)$$

where

$$A_n(b_1, ..., b_n) = \sum_{n=0}^{n} B_{n,k}(b_1, ..., b_{n-k+1})$$

となる。(e^x のテーラー展開の一般化)

(4)Starling number of the second kind

n 個の要素からなる集合を k 個の空でないブロックに分ける分割の総数を **Starling number of the second kind** という。$S(n, k)$ とかく。

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^{k} {}_kC_i (-1)^{k-i} i^n$$

証明省略。各自、証明を調べよ。

たとえば集合 $\{a, b, c, d\}$ を 2 個のグループに分割する仕方は、

$$\{a, b, c\}, \{d\}; \{a, b, d\}, \{c\}; \{a, c, d\}, \{b\}; \{b, c, d\}, \{a\}$$

$$\{a, b\}, \{c, d\}; \{a, c\}, \{b, d\}; \{a, d\}, \{b, c\}$$

の 7 通りあるので、$S(4, 2) = 7$ である。

$S(n, k)$ には

$$S(n, k) = \sum_{P:|P|=k} \frac{n!}{\Pi_{i=1}^{n} \{(i!)^{m_i} m_i!\}}$$

という表し方もある。ここで

$$1.m_1 + 2.m_2 + ... + n.m_n = n,\ m_1 + m_2 + ... + m_n = k$$

であり、m_i は大きさ i のブロックの数である。たとえば

$$n = (1 + ... + 1) + (2 + ... + 2) + (3 + ... + 3) + ...$$

[sum of $m_1, m_2, ...$ pieces] のとき
分割の総数は

$$\frac{n!}{\{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\cdots m_1!m_2!\cdots\}}$$

となる。
例
(i) 1 つの分割

$$n = 1.\ \{1\},\ P_1 = `1'$$

(ii)

$$n = 2.\ \{1, 2\}$$

2 つの分割

$$P_1 = `12',\ P_1|P_2 = 1|2$$

(iii)

$$n = 3. \quad \{1, 2, 3\}$$

5 つの分割

$$P_1 = `123'$$

$$P_1|P_2 = `12|3', `1|23', `13|2'$$

$$P_1|P_2|P_3 = `1|2|3'$$

練習問題
1. X, Y が独立で、各々$B(n, p), B(m, p)$ にたがうとき、$X+Y$ は $B(n+m, p)$ にしたがうことをしめせ。
2. λ を正の整数とし、

$$P(S = r) = {}_nC_r(\frac{\lambda}{n})^r(1 - \frac{\lambda}{n})^{n-r}$$

とおく。$n \to \infty$ のとき、（右辺）

$$\to \quad e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}$$

であることをしめせ。

3. X を確率変数とし、$\sigma(X) = \{X^{-1}(B); B \in \mathcal{B}_R\}$ とおく。$\sigma(X)$ が σ-加法族であることをしめせ。

4. 2 項分布、幾何分布、ポアソン分布、正規分布の平均、分散をもとめよ。

5. (1)$n = 3$ として、$S(3,1), ..., S(3,3)$ を求めよ。また、$\{1,2,3\}$ の分割 $P_1, ..., P_k, k = 1,2,3$ を具体的にすべて書け。

(2)$n = 4$ として、$S(4,1), ..., S(4,4)$ を求めよ。$\{1,2,3,4\}$ の分割 $P_1, ..., P_l, l = 1,2,3,4$ を具体的にすべて書け。

6. (i)X を 0 以上の整数に値をもつ確率変数とするとき，次を示せ.

$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

(ii) X を正の値をもつ確率変数数とするとき，次を示せ:

$$E[X] = \int_0^{\infty} P(X \geq x)dx$$

第2章　確率過程

2.1　一般の確率変数と平均

Ω を定義域とし、$\mathbf{R}$ を値域とする関数 $X(\omega)$ が任意の実数 a, b にたいして

$$X^{-1}((a, b]) \in \mathcal{F}$$

を満たすとき、X を**確率変数**という。上の左辺の集合は関数 X による $(a, b] \subset \mathbf{R}$ の逆像を表し、それはまた $\{X \in (a, b]\}$ など略記される。離散確率空間の場合には、確率変数は Ω の上の任意の関数であると定義すればよかったが、事象の集合 $\mathcal{F}$ が Ω の部分集合全体に必ずしも等しくない場合には、その定義に上のような制限を設ける必要があるのである。

補題 2.1.1 *(1)* 上の実数値関数 X についてつぎの 3 条件は同値である。
(i) X は可測関数である。
(ii) 任意の $a, b (a < b)$ に対して $X^{-1}((a, b]) \in \mathcal{F}$
(iii) 任意の 1 次元ボレル集合 B にたいして $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$
(2) n 次元確率ベクトル X はつぎの性質を満たす。任意の n 次元ボレル集合 B に対して $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$

上の補題により、確率変数の分布や結合分布という概念を導入することができる。X を確率変数とすると、任意の一次元ボレル集合 B に対してその X の逆像の確率 $P(X^{-1}(B))$ が定義可能となる。それを $\mu(B)$ とおく。μ は $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上の確率である。これを確率変数 X の**確率分布**といい、μ_X で表す。

任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して

$$F_X(x) = P(\{X(\omega) \leq x\})$$

を、確率変数 X の**分布関数**という。$F_X(x)$ は x に関して単調増加な関数になる。

$F_X(x)$ が、ある非負積分可能関数 $\varphi(x)$ を用いて

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$$

と表現されるとき、$\varphi(x)$ を**確率密度関数**という。

分布関数の例

1. $[0,1]$ 上の一様分布

$$F(x) = 0\ (x < 0),\ x\ (0 \le x < 1)\ 1\ (x \ge 1)$$

2. 　成功確率 $p \in [0,1]$ のベルヌイ分布[1]

$$F(x) = 0\ (x < 0),\ 1-p\ (0 \le x < 1),\ 1\ (x \ge 1)$$

3. パラメータ θ の指数分布

$$F(x) = 0\ (x < 0),\ 1 - e^{-\theta x}\ (0 \le x)$$

4. パラメータ λ の Poisson 分布

$$F(x) = 0\ (x < 0),\ \sum_{k=0}^{[x]} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\ (0 \le x)$$

5. パラメータ μ, σ^2 の正規分布

$$F(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \int_{-\infty}^{x} \exp(\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2)dt$$

期待値、条件付き期待値

一般の確率空間上の確率変数の**平均**（期待値）の一般的定義を与えておく。それは Ω 上の可測関数である $X(\omega)$ の確率測度 P によるルベーグ式積分 $\int_\Omega X(\omega)P(d\omega)$ の値として定義される:

$$E[X] = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega)$$

[1] $X = 0\ (prob\ 1-p),\ = 1\ (prob\ p)$

事象 A が与えられ $P(A)>0$ とする。$X(\omega)$ の条件付き確率測度 $P(.|A)$ による平均（期待値）$E[X1_A]/P(A)$ が考えられる。これを**条件付き期待値**という。第 1 節と同様にして確率変数 $E(B|\mathcal{D})$ を

$$E(B|\mathcal{D})(\omega)=\sum_i E(B|A_i)1_{A_i}(\omega)$$

とおく。ただし、$\mathcal{D}$ は σ-集合族。詳しくは Section 2.4.3(p.23-24) 参照。

問 1.3. 次の不等式を示せ。

(1)(シュワルツの不等式)X^2,Y^2がともに可積分ならば、XY も可積分で

$$|E(XY)|\le(E(X^2)E(Y^2))^{1/2}$$

さらに

$$E(|X+Y|^2)^{1/2}\le E(X^2)^{1/2}+E(Y^2)^{1/2}$$

(hint)[2]

(2) X^2が可積分ならば X も可積分で、

$$|E(X)|\le E(X^2)^{1/2}$$

(3) (**チェビシェフの不等式**）X^2が可積分ならば任意の$\epsilon>0$ に対して

$$P(|X-m|>\epsilon)\le\frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の確率変数をとる。

Ω 上の n 個の確率変数 $X_1,X_2,...,X_n$ が独立であるとは、任意の Borel 集合 $A_j\in\mathcal{B}$ に対して

$$P(X_1\in A_1,...,X_n\in A_n)=\Pi_{j=1}^n P(X_j\in A_j)$$

となることである。このことは、$(X_1,...,X_n)$ の分布関数 $F(x_1,...,x_n)$ が、X_j の分布関数 $F_j(x_j)$ を用いて

$$F(x_1,...,x_n)=\Pi_{j=1}^n F_j(x_j)$$

となることと同値である。

とくに $n=2$ で X_1,X_2 が独立ならば、

$$E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)$$

となる。

[2] $|(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3)|\le((x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2\cdot((y_1^2+y_2^2+y_3^2)^2)^{1/2}$: 高校

2.2　モーメント母関数 (ラプラス変換)、特性関数（フーリエ変換）

確率変数 X の特性関数 $\varphi_X(t)$ とモーメント母関数 $M_X(\theta)$ を次で定める。

定義 2.2.1 *(1)X が離散型のとき*

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \sum_k e^{itk} P(X = k)$$

$$M_X(\theta) = E[e^{\theta X}] = \sum_k e^{\theta k} P(X = k)$$

(2)X が連続型で確率密度関数 $f(t)$ をもつとき

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

$$M_X(\theta) = E[e^{\theta X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} f(x) dx$$

なお、モーメント母関数は θ の値によっては存在しないときがある。

特性関数は次の性質をもつ:

$$\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) \ \Rightarrow\ P_X(.) = P_Y(.)$$

2.3　ルベーグ式積分

確率変数に関するルベーグ式積分は、以下のようにして定義される。

まず X が非負な単関数である場合、すなわち排反事象 $E_1, ..., E_m \in \mathcal{F}$ があって X が

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{m} a_k I_{E_k}(\omega)$$

と表されているとき、

$$\int_\Omega X(\omega) P(d\omega) = \sum_{k=1}^{m} a_k P(E_k)$$

と定義する。

つぎに非負確率変数 X がある非負単関数の列 X_n の増加極限

$$X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\ (X_n(\omega) \le X_{n+1}(\omega))$$

となっているとき

$$\int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega X_n(\omega)P(d\omega)$$

とおく。このとき、左辺の値は X を下から単調に近似する単関数列 X_n の選び方に依存せずに定まることが証明される。この値が有限のとき、X は P に関して可積分であるといいい、この値をルベーグ式積分という。

特に任意の非負確率変数 X に対して、それを下から近似する単関数列として

$$X_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} I_{E_k}(\omega) + nI_{F_n}(\omega)$$

ただし

$$E_k = X^{-1}([\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})),\ F_n = X^{-1}([n,\infty)) \in \mathcal{F}$$

を取ることができるから、

$$\int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \lim_{n\to\infty}\{\sum_{k=1}^{n2^n}\frac{k-1}{2^n}P(X^{-1}([\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}))) + nP(X^{-1}[n,\infty))\}$$

が成立し、この式を非負確率変数 X の P によるルベーグ式積分の定義式としてもよい。

2.3.1 確率過程

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の上で定義され、連続時間をパラメータとする確率変数の族 $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ を**確率過程**という。ただし、$\mathcal{T}$ は時間パラメータの集合（離散または連続）である。

以下で標本 $\omega \in \Omega$ に依存するある主張 $\Lambda = \Lambda(\omega)$ を考えるとき、Λ が確率 1 で成立するとは

$P(\Lambda) = 1$ を満たす適当な事象 Λ があって、すべての $\omega \in \Lambda$ に対して $\Lambda(\omega)$ が成立する

という意味である。

$(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ は共通の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の上で定義されているので、標本 ω を固定すると、時間 $t \in \mathcal{T}$ を変数とする1つの見本関数

$$t \mapsto X_t(\omega)$$

が定まる。この関数を ω の**道** (または**標本路**) という。ω の道が
すべての $t \in \mathcal{T}$ に対して $\lim_{s\to t} X_s(\omega) = X_t(\omega)$
を満たすとき、**連続**であるといわれる。
道 $\{X_t(\omega); 0 \leq t \leq T\}$ が連続となる標本 ω 全体の集合は

$$\Gamma = \cap_{\epsilon>0} \cup_{h>0} \cap_{(s,t);|s-t|<h} \{\omega; |X_t(\omega) - X_s(\omega)| < \epsilon\}$$

と表される。この集合は非可算個の和、積を取る操作で定まるので可測集合かどうか一般の確率過程ではわからない。確率過程 (X_t) の性質によって可測になったりならなかったりする。(X_t) が連続な確率過程の場合は、上の和及び積をとる操作で s, t, h, ϵ の動きうる範囲を有理数に制限しても同じ集合 Γ となるので Γ は可測かつ $P(\Gamma) = 1$ が成立する。

一般の確率過程でも上手な「変形」をとれば上の集合は可測かつその確率が1であるようにできることがある。ここである確率過程 (X'_t) が (X_t) の変形であるとは、任意の $t \in [0, T]$ で $P(X_t = X'_t) = 1$ が成立することをいう。しかし変形は $P(X_t = X'_t, \forall t \in [0, T]) = 1$ を意味しないことに注意せよ。確率過程 (X_t) のある変形 (X'_t) に対して集合 Γ が可測かつ $P(\Gamma) = 1$ が成立するとき、(X'_t) を (X_t) の連続変形という。

確率過程 X_t について
「$0 \leq s < t \leq u \leq v$　のとき、$X_t - X_s$ と $X_v - X_u$ は独立」
が成り立つとき、$\{X_t\}$ は**加法過程**または**独立増分過程**という。

確率過程 $X(t, \omega)$ が**時間的に一様**とは、$X(t + s) - X(t)$ の分布が s のみに依存し t に依存しないことである。

2.3.2　確率過程のモデル

例 1 ある停留所でのバスの待ち時間を考える。$X(t)$ を時刻 t に来た客がバスを待つ時間とする (バスと客の到着が同時に起きた時は客はバスに乗るとする)。$X(t)$ の標本路 $X(t)(\omega)$ はのこぎりの歯を上に向けた形のようになる。

$X(t)$ の値は、バスの発車直後から次の到着までの間に単調減少し、その標本路のグラフは傾き - 1 の直線となる。（バスの到着時刻がわかれば標本路を描くことができる。）

なお、ω が異なれば標本路 $X(t)(\omega)$ のグラフも異なる

n 番目と $n+1$ 番目のバスの到着間隔を Y_n とする。Y_n は n 番目のバスの発車直後に来た客の待ち時間を表している。Y_n の列 $\{Y_n\}$ は $\mathcal{T} = \{1, 2, ...\}$ である確率過程とみなすことができる。

この例で分かるように $\mathcal{T}$ は連続的区間でなくともよい。$\mathcal{T}$ が実数のある区間の時確率過程は**連続時間型**といい、$\mathcal{T}$ が離散集合の時確率過程は**離散時間型**という。

定義 2.3.1 連続時間型確率過程 $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ にたいし

$$\bar{X} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(s)ds$$

が存在するならば左辺を $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ の**時間平均**という。

$N = \{T_1, T_2, ...\}$ を単調増加な時刻の列とするとき

$$\bar{X}_N = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} X(T_m)$$

が存在するならば左辺を $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ の $\mathbf{N}$ に関する**事象平均**という。ここで $T_1, T_2, ...$ は $0 < T_1 < T_2 < ...$ を満たす確率変数である。

離散型確率過程 $\{X(t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ に対しても同様な定義を行うことができる。

例 2

例 1 のバス待ちの例で時間平均と事象平均を計算する。バスの到着間隔 $\{Y_n\}$ は互いに独立で同一分布を持つ確率変数とする。最初のバスは時刻 0 に到着するとし、

$$m_1 = E[Y_1], \quad m_2 = E[Y_1^2]$$

はともに有限と仮定する。

$A(t)$ で時刻 t までに到着したバスの台数を表す。

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t}{A(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{Y_1 + ... + Y_{A(t)}}{A(t)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{Y_1 + ... + Y_n}{n} = m_1$$

となる（最後の等号は大数の強法則による）。

$\frac{t-T_{A(t)}}{t}$ は $t \to \infty$ のとき無視できるとすると、確率 1 で

$$\bar{X} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{m=1}^{n} \int_{T_m}^{T_{m+1}} X(s)ds$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} \frac{1}{A(t)} \sum_{m=1}^{A(t)} \int_0^{Y_m} (Y_m - s)ds$$

$$= \frac{1}{m_1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} [Y_m s - s^2/2]_0^{Y_m}$$

$$= \frac{1}{m_1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} Y_m^2/2 = \frac{m_2}{2m_1}$$

が成り立つ。

時間平均 $\bar{X}$ はランダムに停留所に到着した客の待ち時間の期待値であると考えられる。

一方、バスの発車直後に停留所に到着した客の待ち時間の期待値は以下のようになる。

上でやったように、$N = \{T_1, T_2, ...\}$ に関する $X(t+)$ の事象平均は

$$\bar{X}_N = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} X(T_m+) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} Y_m = m_1$$

である。ただし、$X(t+)$ は $X(t+0)$（直後）の意味である。

$$\bar{X} = \frac{m_2}{2m_1} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2 + m_1^2}{m_1} = \frac{m_1}{2}(\frac{\sigma^2}{m_1^2} + 1)$$

となるので、$\sigma > m_1$ ならば $\bar{X} > m_1$ となる。つまり、「バスの発車直後に停留所に到着した」ということを知っている分、「バスの発車直後に停留所に到着した客は思ったほど運が悪くない」（待ち時間のパラドックス）のである。

2.3.3 条件付き期待値

確率過程では時間の経過とともに手にする情報が増え、期待値や分布などの特性が変化することがある。この場合には確率変数を条件とする条件付き確率、条件付き期待値を考える。

離散的な場合

X, Y は離散的確率変数とし、集合 S に値をとるとする。各 $k \in S$ にたいし $P(X = k) > 0$ とする。

$\{X = k\}$ を条件とする Y の条件付き確率は

$$P(Y = j|X = k) = \frac{P(Y = j \cap X = k)}{P(X = k)}$$

で与えられる。

$\{X = k\}$ を条件とする Y の条件付き期待値は

$$E[Y|X = k] = \frac{1}{P(X = k)} \sum_{j \in S} jP(Y = j \cap X = k)$$

で与えられる。(以下 $P(Y = j \cap X = k)$ を $P(Y = j, X = k)$ とかく。)

定義

$E[Y]$ は有限であるとする。$g(.) = E[Y|X = .]$ によって定義された関数 g にたいして $Z = g(X)$ により定義した確率変数を、X を与えたときの Y の条件付き期待値といい、$Z = E[Y|X]$ と表す。

例 1 時間のうちに銀行に、預金または引き出しに来た客の数を N で表す。n 番目の客の残高を X_n で表す。$X_1, X_2, ...$ は互いに独立で同一分布にしたがう確率変数で N とは独立であると仮定する。N を与えたときのこれらの客の預金総額の条件付き期待値 Y を求める。

$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ であり、

$$g(n) = E[Y|N = n] = E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = nE[X_1]$$

である。したがって $E[Y|N] = g(N) = NE[X_1]$ となる。

補題 2.3.1 確率変数 Z は X の関数とする。このとき

$$E[Z1_A] = 0 \ for \ \ all \ A \ \Rightarrow \ Z = 0.$$

[3]

期待値と同様に条件付き期待値についても線形性などがなりたつ。

命題 1 *(1)*
$$Y \geq 0 \Rightarrow E[Y|X] \geq 0$$

(2)
$$E[aY_1 + bY_2|X] = aE[Y_1|X] + bE[Y_2|X]$$

(3) $\mathcal{D}_X = \{A_1, A_2, ...\}$ を X のなす部分集合族 *(*Ω の分割*)*, $\mathcal{D}_Y = \{B_1, B_2, ...\}$ を Y のなす部分集合族 *(*Ω の分割*)* とする。

$\mathcal{D}_X \subset \mathcal{D}_Y$ のとき
$$E[E[Y|X]] = E[Y]$$

(4)
$$X, Y \text{ が独立 } \Rightarrow E[Y|X] = E[Y]$$

(2),（3）の証明
事象 A に対し

$$E[E[aY_1 + bY_2|X]1_A] = aE[E[Y_1|X]1_A] + bE[E[Y_2|X]1_A]$$

$$= E[(aE[Y_1|X] + bE[Y_2|X])1_A]$$

これより条件付き期待値の一意性（上の補題）から $E[aY_1 + bY_2|X] = aE[Y_1|X] + bE[Y_2|X]$ となる。

X の値域を $\{x_1, x_2, ...\}$ とし、$A_i = X^{-1}(x_i)$ とする。条件付き期待値の定義から $E[E[Y|\{X = x_i\}]] = E[E[Y|X]1_{A_i}]$。これより

$$E[E[Y|X]] = \sum_i E[E[Y|\{X = x_i\}]] = \sum_i E[E[Y|X]1_{A_i}] = \sum_i E[E[Y]1_{A_i}] = E[Y]$$

となる。（$\mathcal{D}_X \subset \mathcal{D}_Y$ より．）q.e.d.

定義事象 D と確率変数 X に対し

$$P(D|X) = E[1_D|X]$$

で定義される確率を、X を与えた時の D の**条件付き確率**という。

---

[3]See [s] Thm 9.9 (i).

2.3.4 連続な確率過程

直線運動

$$X_t = a + b.t$$

で与えられるもの。ただし a, b は定数。

ガウス過程

定義 2.3.2 $\{X_t\}$ が次の *(1) – (3)* を満たすとき, $\{X_t\}$ を**ガウス過程**という.

(1) 加法過程である.
(2) 斉時である. （斉時 = 時間的に一様）
(3) 見本関数が *(*確率 *1* で*)* 連続である.

例 1 単位時間の間に n 回のペースでコインを投げ続け, 表が出たら $\frac{m}{n} + \frac{s}{\sqrt{n}}$ 点, 裏が出たら $\frac{m}{n} - \frac{s}{\sqrt{n}}$ 点を加点していく試行を考える. 但し時刻 0 では 0 点とする ($m \leq 1, s \leq 1$, $m = 0, 1, s = 1$ でもよい)。このようなランダム・ウォークに対して, n を無限大とする極限を考え, 時刻 $t (\geq 0)$ までの合計点を X_t とすれば,

$$X_t \sim N(mt, s^2 t)$$

となる。 このときの確率過程 $\{X_t\}$ はガウス過程である。このガウス過程は加法過程であり, かつ斉時性をもつ. [4]

ブラウン運動

確率過程 $X = (X_t)$ は次の性質をみたすとき**ブラウン運動**という。
(1) 加法過程であり、増分 $X_t - X_s$ の分布は $t - s$ のみに依存する
(2) X_t の分布は、平均 0 分散 t の正規分布である
(3) ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対し、その道は連続である

---

[4] See https://www.ig.com/jp/glossary-trading-terms/random-walk-theory-definition
https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ kumagai/Open-core-TK.pdf (p.9–11, p.13–14)

時間的に一様なガウス型加法過程 $X(t)$ の存在は仮定する。また $X(0) = 0$ とする。

$X(t)$ の平均 $m(t)$,　分散 $v(t)$ を

$$m(t) = E[X(t)],\ v(t) = V(X(t))$$

とおく。

命題 2 ある定数 m, t があって

$$m(t) = mt,\ v(t) = vt$$

である。

$m = 0, v = 1$ のとき、$X(t)$ をブラウン運動 (ウイナー過程) という。

問　関数 $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^d$ が連続で、すべての s, t について

$$f(t+s) = f(t) + f(s),\ s, t \in \mathbf{R}$$

を満たすとき、$f(t) = At, A \in \mathbf{R}^d$ であることを示せ。

命題 3 $X(t)$ がガウス型加法過程のとき $X(t) - X(s)$ の分布は正規分布 $N(m(t) - m(s), v(t) - v(s))$ にしたがう。

この定理の証明には中心極限定理を用いる。詳細省略。

$s < t$ とする。ブラウン運動は加法過程であるから、$X(s)$ と $X(t) - X(s)$ は独立である。$E[X(s)] = 0$ であるから

$$E[X(s)(X(t) - X(s))] = E[X(s)]E[X(t) - X(s)] = 0$$

となる。また $V(X(t) - X(s)) = t - s$ となる。

ブラウン運動の名は、イギリス人植物学者 R. Brown が 1827 年に、水に浮かべた花粉から出てくる微粒子の顕微鏡観察を行った結果発見した、微粒子の不規則運動にちなむ。Brown の最大の功績は、数多くの粒子の観察を行い、有機物のみならず無機物に対しても微粒子の不規則運動が観察されることを示したことにある（たとえばタバコの煙）。これはブラウン運動が物理現象であることを示している。

ブラウン運動は微粒子と水分子との衝突に起因する。このことを予言したのが A. Einstein で、1905 年の論文による。

A. Einstein の予言を実験により裏付けたのが J. Perrin である。Perrin による実験・考察は N. Wiener に大きな影響を与えた。Wiener により、Wiener 測度、Wiener 過程の構成という、現代確率論の基礎が作られた。[5]

ブラウン運動は日本人数学者伊藤清が 1942 年に生み出した確率微分方程式の理論においても中心的な役割を果たし、現在では物理学、生物学、経済学など様々な分野に応用されている。

1 次元ブラウン運動の確率密度関数は

$$p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}}$$

である。

2.3.5 不連続な確率過程

ポアソン過程

λを正の実数とするとき、件数過程 $\{N_t\}$ が次の (1) ∼ (3) を満たすとき、$\{N_t\}$ をパラメータλのポアソン過程という。あるいは $\{N_t\}$ 　はパラメータがλのポアソン過程に従うという。λは起こりやすさを表す指標であり、強度という。

(1) $0 \leq s < t \leq u < v, N_t - N_s$と $N_v - N_u$は独立
(2) $P(N_{t+dt} - N_t = 1) = \lambda dt$
(3) $P(N_{t+dt} - N_t \geq 2) = 0$
　$(P(N_{t+dt} - N_t = 0) = 1 - \lambda dt)$
ただし dt は小さな正の実数。

条件 (2) はつまり $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + o(h)$ ということであり、

$$\lim_{h \to 0+} \frac{P(N_{t+h} - N_t = 1)}{h} = \lambda$$

[5]See https://ja.wikipedia.org/wiki/
ブラウン運動
https://www.youtube.com/watch?v=SGOfu24RzlA

と言ってもよい。(3) はつまり $P(N_{t+h} - N_t = 2) = o(h) \quad P(N_{t+h} - N_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$, ただし $o(h)$ はランダウの記号, ということであり

$$\lim_{h \to 0+} \frac{P(N_{t+h} - N_t \geq 2)}{h} = 0$$

と言ってもよい。

つまり、ポアソン過程とは過去や未来とは独立に（定義の (1)）、常に一定の起こりやすさで生起し（定義の (2)）、同時に 2 件は生じない（定義の (3)）事柄の件数過程のことである。

パラメータ λ のポアソン過程は、定常な計数過程である。

なお、見本 X を固定して時間の関数 $t \mapsto X_t$ を記録したものを**計数過程**または**件数過程**という。たとえば、店への顧客の訪問数がこれにあたる。

$N(t)$ の標本路は階段型の関数であり、$N(t)$ はその増加点 $T_1, T_2, ...$ により表すこともできる。

計数過程の例は、交差点での車の通過台数、銀行に来る客の数、ある地点に来る放射線の数、などである。

なお、$N(t)$ の確率測度をもとめるためには、$n \in \mathbf{N}$ と $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_n$ に対する $N(u_1), N(u_2), ..., N(u_n)$ の結合分布を考える必要がある。

定義　計数過程 $\{N(t)\}$ はその結合分布が時刻に依存しないとき定常という。つまり、任意の $n \in \mathbf{N}$ と $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq ... \leq u_n$ に対し

$$N(u_1 + s) - N(s), N(u_2 + s) - N(u_1 + s), ..., N(u_n + s) - N(u_{n-1} + s)$$

の結合分布が s に依らないときである。

定理 2.3.1 $\{N_t\}$ が、パラメータがλのポアソン過程であるとき、$t > 0$ について、N_tはパラメータがλt のポアソン分布 $Po(\lambda t)$ に従う。

証明時間 t を m 分割する。m を十分大きくすると、$\frac{t}{m}$ は短いので、$\frac{t}{m} = dt$ とみなせる。すると、各区間は事柄が生じる件数はせいぜい 1 件または 0 件であり、それぞれの区間で N_t がパラメータ $m, \dfrac{\lambda t}{m}$ の二項分布に従うことが分かる ($N_t \sim Bin(m, \frac{\lambda t}{m})$ と表す) また、実際には $dt = \frac{t}{m} \to 0$ すなわち $m \to \infty$ なので、$P(N_t = n) = \lim_{m \to \infty} P(\sum_{k=1}^{m} N_{\frac{k}{m}t} = n)$

$$= \lim_{m \to \infty} {}_mC_n (\frac{\lambda t}{m})^n (1 - \frac{\lambda t}{m})^{m-n}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{m!}{(m-n)!n!}(1-\frac{\lambda t}{m})^{-n}(1-\frac{\lambda t}{m})^{m}\frac{(\lambda t)^n}{m^n}$$

ここで

$$\frac{m!}{(m-n)!m^n} = \frac{m(m-1)...(m-n+1)(m-n)...1}{m....m(m-n+1)(m-n)...1}$$
$$= \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{m....m} \to 1\ (m\to\infty)$$

より

$$= 1\cdot 1\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

証明終

定理 2.3.2 件数過程 $\{N_t\}$ について
(1) 加法過程である
(2) $0 \le s < t$ のとき $N_t - N_s \sim Po(\lambda(t-s))$
(1),(2) が成り立つとき、$\{N_t\}$ はパラメータ λ のポアソン過程である。

証明
(2) より

$$\begin{aligned} P(N_{t+h}-N_t=1) &= e^{-\lambda h}\lambda h \\ &= (1-h\lambda+o(h))\lambda h \\ &= \lambda h + o(h) \\ P(N_{t+h}-N_t\ge 2) &= 1-P(N_{t+h}-N_t=1)-P(N_{t+h}-N_t=0) \\ &= 1-e^{-\lambda h}\lambda h - e^{-\lambda h} \\ &= 1-(1+\lambda h)(1-\lambda h+o(h)) = o(h) \end{aligned}$$

これらのことから、ポアソン過程である。証明終

これより、ポアソン分布では、事象の発生は離散的（ばらばら）であり、その発生間隔は指数分布にしたがう。

ポアソン過程に関するいくつかの例題

例 2　ポアソン到着

ある店に客が全くランダムに到着する場合を考えよう。いま、微小時間 Δt の間に 1 人の客が到着する確率は $\lambda\Delta t$ とする。これは客の到着が時刻に無関係で、時間の長さにのみ依存するという事を意味している。

微小時間 Δt の間に 2 人以上の客が到着する確率はほとんど無視できるものとして、0 から t 時間内にちょうど $n(>0)$ 人が到着する確率 $p_n(t)$ を求めよう。

時間 $t+\Delta t$ の間に n 人到着する確率を $p_n(t+\Delta t)$ とする。$p_n(t+\Delta t)$ は、事象

[t 時間内に n 人到着し、その後 Δt 時間内に 1 人も到着しない]

と

[t 時間内に $n-1$ 人到着し、その後 Δt 時間内にちょうど 1 人到着する]

の和事象の確率だから

$$p_n(t+\Delta t) = p_n(t)(1-\lambda\Delta t) + p_{n-1}(t)\lambda\Delta t$$

となる。これより

$$\frac{p_n(t+\Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$$

となる。

$\Delta t \to 0$ とすると

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \tag{1}$$

である。

とくに $n=0$ のときは

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t)$$

であり、よって

$$p_0(t) = e^{-\lambda t} \tag{2}$$

である。

なお $t=0$ では誰も到着していないから $p_0(0)=1, p_n(0)=0$ となる。

以下、$P_n(s)$ を $p_n(t)$ のラプラス変換 (モーメント母関数) とする:

$$P_n(s) = \int_0^\infty e^{-st} p_n(t)dt$$

(1), (2) より

$$(s+\lambda)P_n(s) = \lambda P_{n-1}(s), \quad (s+\lambda)P_0(s) = 1$$

となり、これより数列と同様にして解けば[6]

$$P_n(s) = (\frac{\lambda}{s+\lambda})^n P_0(s) = \frac{\lambda^n}{(s+\lambda)^{n+1}}$$

となる。これを逆ラプラス変換すると

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}, \ n = 0, 1, ...$$

を得る。

つまり、$[0,t]$ に到着する客の数 はパラメータ λ のポアソン分布に従う。

例 3 前の客と後の客との到着時間間隔

相続く客と客との到着時点の間隔が t 以上 $t+\Delta t$ 未満である確率は、間隔が t までに 1 人も到着しない確率と、間隔が $(t, t+\Delta t)$ の間に 1 人到着する確率の積とで表される。

各々の確率は

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}, \quad 1 - e^{-\lambda\Delta t} = \lambda\Delta t + o(\lambda\Delta t)$$

であるから、もとめる確率は $\lambda e^{-\lambda t}\Delta t$ であり、その密度関数は

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

となる。つまり、パラメータ λ の指数分布である。

例 4 サービス時間の分布（銀行、コンビニ、床屋, ...）

各客がサービスを受ける時間は独立な確率変数であるとする。

(1) 1 人の客がサービスを受ける時間がパラメータ 1 の指数分布に従うとき、指数分布サービスという。このとき、平均サービス時間は

$$E[t] = \int_0^\infty t\mu e^{-\mu t}dt = \frac{1}{\mu}$$

になる。μ は単位時間にサービスを受ける平均客数であり、**サービス率**という。

[6] (1) で部分積分 $p'_n(t) \to \frac{d}{dt}(e^{-st}) = -(-se^{-st}) = se^{-st} \to sP_n(s)$

例 2 から、ある一定の時間 t の間にサービスを終えて出て行く客の数 n はパラメータ μ のポアソン分布に従う。（ポアソン + ポアソン = ポアソン （再生性））

(2) ガンマ分布サービス
指数分布では $t=0$ で最大値をとるので、サービス時間としては実情に合わないことがある。このような場合、ガンマ分布が用いられることが多い。k を自然数とするとき、サービス時間の分布として

$$f(t)=\frac{(k\mu)^k t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-k\mu t},\ t>0$$

を用いることが多い。指数分布は $k=1$ の場合である。

2.3.6　再生過程

ある出来事の生起間隔 $D_1, D_2, \cdots$ が互いに独立なら、その出来事の件数過程 $\{N_t\}$ のことを再生過程という。

定理 2.3.3 ある出来事の生起間隔 $D_1, D_2, \cdots$ が互いに独立に同一の指数分布に従うなら、その出来事の再生過程 $\{N_t\}$ はポアソン過程である。

証明 時刻 t からはじめた生起間隔を $D_{t_1}, D_{t_2}, \ldots$ とすると、指数分布の無記憶性から D_{t_1} は t 以前の生起間隔とは独立に D_1 と同一の分布に従う。また、$D_1, D_2, \ldots$ の独立性から $D_{t_2}, D_{t_3}, \ldots$ も t 以前の生起間隔および D_{t_1} とは独立に同一の分布に従う。
つまり、斉時 (斉時 = 時間的に一様) である加法過程を意味する。
また、斉時性より
$P(N_{t+h}-N_t \geq 2) = P(N_h - N_0 \geq 2)$
また、$D_1, D_2, \ldots$ の従う指数分布を $\exp(\lambda)$ とすると、

$$\begin{aligned}
&P(N_h - N_0 \geq 2) && = P(D_1 + D_2 \leq h) \\
&D_1 + D_2 \sim \Gamma(2, \lambda) \text{ より} && = \textstyle\int_0^h \lambda e^{-\lambda s} \lambda s ds \\
& && = -[\lambda s e^{-\lambda s}]_0^h + \textstyle\int_0^h \lambda e^{-\lambda s} ds \\
& && = -\lambda h e^{-\lambda h} - [e^{-\lambda s}]_0^h \\
&e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h) \text{ より} && = 1 - e^{-\lambda h}(\lambda h + 1) \\
& && = 1 - (1 - \lambda h + o(h))(\lambda h + 1) \\
& && = o(h)
\end{aligned}$$

以上よりポアソン過程の定義 (1) $\sim$ (3) を満たすのでポアソン過程である。証明終

この命題よりポアソン過程の次の表現を得る。

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{T_k < t\}}$$

ただし、$T_k = D_1 + ... + D_k$ であり、D_i は互いに独立な指数分布に従う確率変数である。

定理 2.3.4 *(指数分布の無記憶性)*
D が指数分布をする確率変数ならば、任意の x, y について

$$P(D > x + y | D > x) = P(D > y)$$

が成り立つ。

証明。

$$P(D > x + y | D > x) = \frac{P(D > x + y, D > x)}{P(D > x)}$$

$$= \frac{P(D > x + y)}{P(D > x)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y}.$$

証明終

定理 2.3.5 単位時間当たりの発生件数の期待値が同一である斉時な加法過程のうち、単位時間当たりの発生件数の分散が最小なのはポアソン過程である。

証明　斉時な加法過程であれば、単位時間あたりの発生件数の期待値はある正の定数となるので、その値を λ とする、すなわち、件数過程を $\{N_t\}$ とすれば、

$$\lambda = \lim_{h\to 0+} \frac{E(N_{t+h} - N_t)}{h}$$

また、$n = 1, 2, \cdots$ について

$$\lambda_n = \lim_{h\to 0+} \frac{P(N_{t+h} - N_t = n)}{h}$$ とすると

$$\lambda = \lim_{h\to 0} \frac{E(N_{t+h} - N_t)}{h} = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda_n$$ と表せる

$$\begin{aligned}
(\text{単位時間当たりの発生件数の分散}) &= \lim_{h\to 0+} \frac{V(N_{t+h} - N_t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0+} \left(\frac{E((N_{t+h} - N_t)^2)}{h} - \frac{E(N_{t+h} - N_t)^2}{h}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^2\lambda_n - 0 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^2\lambda_n
\end{aligned}$$

この条件で最小にするには

$\lambda_1 = \lambda, \lambda_n = 0\ (n = 2, 3, \cdots)$

すなわち

$$\lim_{h\to 0+} \frac{P(N_{t+h} - N_t = 1)}{h} = \lambda, \lim_{h\to 0} \frac{P(N_{t+h} - N_t \geq 2)}{h} = 0$$

ポアソン過程の定義を満たす。証明終[7]

ポアソン過程に関するいくつかの例

例 1 交通流モデル

特定地点を通過する際の車の時間間隔は再生過程でモデル化できる。詳細省略。

例 2 床屋連鎖

QB ハウス（簡易床屋）, ピッコロ　（大阪 梅田の（伝説の）カレー屋）

例 3 再生報酬過程

---

[7] 再生過程の他の例:地震
start: 活断層に応力の不釣り合いによるひずみが溜まる;
地震としてエネルギーを放出; go to start

i 番目の再生が起こる時刻で報酬 r_i を受け取る再生過程を**再生報酬過程**という。

例題 1 車の維持費の *1* 年間の平均費用を求める

車を保有している人は、車が故障又は買い替え時期が来たら，買い替える（故障した場合は修理も実施)。

解 1 車が故障するまでの寿命：寿命関数 $h(t)$

新車買替え年数：T

新車購入費用：A

故障修理費用：B（T 年経過前に生じた故障の修理費用）

このとき

i 番目の再生が起こる期間の期待値 $E[t_i] = \int_0^T th(t)dt + T\int_T^\infty h(t)dt$

i 番目の更新が起こった時の再生時コスト $E[r_i] = A + B\int_0^T h(t)dt$

この比

$$\frac{E[r_i]}{E[t_i]}$$

が *1* 年間の平均費用である。

具体例

車の寿命を $h(t) = (1/4)e^{-t/4}$ で表される指数分布、買い替え年数を $T = 5,$ 新車購入費用を $A = 10$ *(100* 万円*)*、故障修理費用を $B = 1.5$ *(15* 万円*)* とすると、*1* 期間あたりの費用の期待値は

$$E[r_i] = 10+1.5\int_0^T (1/4)e^{-t/4}dt = 10+1.5(1-e^{-5/4}) = 10+1.5(0.7135) = 11.070$$

一方、*1* 期間あたりの時間の期待値は

$$E[t_i] = \int_0^5 t\cdot(1/4)e^{-t/4}dt + \int_5^\infty 5\cdot(1/4)e^{-t/4}dt$$

$$= \int_0^\infty t\cdot(1/4)e^{-t/4}dt + \int_5^\infty (5-t)\cdot(1/4)e^{-t/4}dt$$

$$= 4-\int_5^\infty (t-5)\cdot(1/4)e^{-t/4}dt = 4-\frac{1}{4}\int_0^\infty ue^{-u/4}due^{-5/4} = 4-e^{-5/4} = 3.854$$

であるから[8]、*3.854* 年間である。

[8] $u = t-5, du = dt; e^{-t/4} = e^{-(u+5)/4} = e^{-u/4}.e^{-5/4}$

これより、長期的に見た、*1* 年あたりの維持費は

$$\frac{E[r_i]}{E[t_i]} = \frac{11.070}{3.854} = 2.869$$

となり、約 *28.69* 万円である。

同様な例は他に、スーパー買い物過程（食料品、日用品）などが考えられる。

問題

問 6 パラメータ $\lambda = 2$ のポアソン分布に従って到着するような場合、1 分間に 2 人以上到着する確率はいくらか。

問 7 時間 $[0, t]$ で発生するクレームはパラメータ λ のポアソン過程に従うとする. W_j を, $j-1$ 回目のクレーム *(* 保険会社への請求 *)* から j 回目のクレームが発生するまでの時間とするとき, W_j の分布を求めよ.

問 8 ある会社は, 中途採用の条件を年収 800 以下としている. 一方で, 中途採用の募集者の希望年収は期待値 900, 標準偏差 100 の対数正規分布に従う. 申込件数が月平均 *1* 件のポアソン過程に従う場合, 会社の条件に沿う募集が来るまでに *6* ヶ月以上を要する確率を求めよ.

2.3.7　複合ポアソン過程

以下 $X_1, X_2 \ldots$ は、互いに独立な同一の分布に従う確率変数の列であるとする。これらの確率変数は同一の分布に従うので、便宜のため、それらの確率変数を代表する確率変数を X と表す。N は $X_1, X_2, \ldots$ とは独立であり、取りうる値の範囲がが自然数である確率変数である。S は次のように定義される確率変数である。

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \cdots + X_N & (N > 0) \\ 0 & (N = 0) \end{cases} \tag{2.1}$$

複合分布の特性値を求めるにあたっては、次の 2 つの公式が基本となる。

定理 2.3.6 *(複合分布の基本的性質)*
(1)$E(S) = E(N)E(X)$
(2)$V(S) = E(N)V(X) + V(N)E(X)^2$

証明
(1)

$$
\begin{aligned}
E(S) &= E(E(S|N)) \\
\text{ここで } E(S|N=n) &= E(X_1 + \cdots + X_n) \\
&= E(nX) \\
&= nE(X) \text{ より} \\
E(S|N) &= NE(X) \text{ となる。}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
V(S) &= V(E(S|N)) + E(V(S|N)) \\
\text{ここで } V(S|N=n) &= nV(X) \text{ より} \\
V(S|N) &= NV(X) \\
\text{よって、} V(E(S|N)) + E(V(S|N)) &= V(NE((X))) + E(NV(X)) \\
&= E^2(X)V(N) + V(X)E(N)
\end{aligned}
$$

と

なる。

（別法）モーメント母関数をつかう。

$$\varphi_S(u) = E[\exp(iu\sum_{j=0}^{N(t)} X_j)] = \sum_{n=0}^{\infty} E[\exp(iu\sum_{j=0}^{n} X_j).1_{N(t)=n}]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E[\exp(iu\sum_{j=0}^{n} X_j)]E[1_{N(t)=n}] = \sum_{n} E[\exp(iu\sum_{j=0}^{n} X_j)]P(N(t)=n)$$

$$= \sum_{n} (\varphi_X(u))^n \times \frac{t^n}{n!} e^{-t} = \exp(\varphi_X(u)t)e^{-t}$$

これより

$$\varphi'_S(u) = t\varphi'_X(u)\varphi_X(u)$$

$$\varphi''_S(u) = (t\varphi''_X(u) + t^2\varphi'(u)^2)\varphi_X(u)$$

これから

$$E[S(t)] = tE[X]$$

$$E[S^2(t)] = tE[X^2] + t^2(E[X])^2$$

よって
$$V(S) = E[S^2] - (E[S])^2 = tE[X^2]$$
ここで $E[N] = V(N) = t$ とおくと（2）を得る。

定義 2.3.3 N がポアソン分布にしたがうとき、S の分布を**複合ポアソン分布**という。N_t がポアソン過程のとき、S_t を**複合ポアソン過程**という。

命題 4 複合ポアソン分布の特性値
(1) 平均 $E(S) = \lambda E(X)$
(2) 分散 $V(S) = \lambda E(X^2)$

証明 定理 2.4.6 より。証明終

例題 2 破産確率 *(ルンドベリモデル)*
損害保険では個々の支払額のばらつきが大きいため, 年度ごとの保険金の発生額の変動幅も大きい. 特に, 重大な事故などで極めて多額の支払いが発生することもある. その結果, 破産する *(*資本が負になる*)* 可能性さえある. 従って, 保険会社は, その可能性, 即ち破産確率に細心の注意を払う必要がある. 以下では, 破産するかしないかが問題となる主体を**ポートフォリオ**と呼び, 各ポートフォリオに対し, 以下を考える.
サープラス U_t 時間 t にポートフォリオの契約がすべて終了したときに残るはずの剰余金. サープラスが負となったとき, ポートフォリオは破産する.
初期サープラス U_0 モデル上の時刻 0 におけるサープラス. *(*通常は $U_0 = u_0 > 0$*(*定数*))*
ポートフォリオのサープラス過程 $\{U_t\}$ *(*リスク過程と呼ばれることもある. *)*
時刻 t までに収入する保険料の累計額 P_t に関する確率過程を保険料過程 $\{P_t\}$, 時刻 t までに支払う保険金の累計額 S_t に関する確率過程をクレーム総額過程 $\{S_t\}$ とする. すると, サープラス U_t は,
$$U_t = U_0 + P_t - S_t$$
となる.
ここでは
$$P_t = cdt$$

(c は単位時間あたりの保険料を表す正の定数), $\{S_t\}$ は複合ポアソン過程とする.

$\{S_t\}$ が複合ポアソン過程であるとき, S_t は複合ポアソン分布に従う.

ここで議論すべきは, このような破産確率モデルにおいて, 上の u_0 や c の値によって破産確率がどのように変化するかである. 特に, c に関しては, 純保険料と比べてどれだけ付加保険料を上乗せしたら破産確率がどのように変動するかが解る.

ここで, クレーム件数過程（ポアソン過程）のパラメータを λ, 個々のクレーム額の期待値 $E[X]$ を m とすると, 支払い m が平均 λ 回行われるので, このモデルにおける単位時間当たりの純保険料は $m\lambda$ である. さらに, 純保険料に対して, 純保険料の $\theta(>0)$ 倍を上乗せする（この θ を安全割増率と呼ぶ）とすれば,

$$c = (1+\theta)\lambda$$

となり,

$$U_t = u_0 + (1+\theta)\lambda mt - S_t$$

と表すことができ, これがルンドベリ・モデルである.

例題 3 *Amazon.co.jp* での書籍ランキング順位過程

Amazon.co.jp での書籍部門では１冊ごとにその時点での売り上げランキングが表示してある。ランキングは１時間ごとに変動する。

例[9]（和書）保健統計・疫学 *Amazon* 売れ筋ランキング*:* 本 *- 584,664* 位 *2020/01/01 14h00*

Amazon 売れ筋ランキング*:* 本 *- 584,424* 位 *2020/01/01 15h30*

（洋書）*Sean Connery: A Biography*

Amazon 売れ筋ランキング*:* 洋書 *- 567,028* 位 *(*洋書の売れ筋ランキングを見る*) 2020/01/01 14h00*

Amazon 売れ筋ランキング*:* 洋書 *- 567,092* 位 *2020/01/01 15h30*

以下では *Amazon.co.jp* での書籍部門を *Amazon* 書店と呼ぶ。*Amazon* 書店では１００万 $\sim$ 数１００万タイトルの書籍を扱っている。仮に $N =$

[9]

$1,000,000$ とし、それらに $i=1,...,N$ と番号をつける。N は一定期間（1 年間）一定とする。

$X_i(t), i=1,...,N$ は時刻 t での書籍 i の順位とする。ただし、$t=0,1,..,24\times 365$ とし、$X_i(0)=x_i$ は定数とする。

$X_i(t)$ はパラメータ λ_i の互いに独立なポアソン過程 $N_i(t)$ とする ,$i=1,..,N$。

$X_i(t)$ は単位時間に平均 λ_i 回ジャンプをするが、$X_i(t+s)-X_i(t)=0$ となる *(*つまり時刻 t から s たってもジャンプをしない）確率は $e^{-s\lambda_i}$ である。ジャンプをするとき本 i は $X_i(t)=n$ から $X_i(t+s)=1$ に瞬間的にジャンプする $(0<s<\alpha_i, \alpha_i>0)$。

これは本の売り上げが立つことに対応する。その時他の本 $j\neq i$ は瞬間的に $X_j(t)=n$ から $X_j(t)=n+1$ に値を変える。

一方、$X_i(t)=1$（順列の先頭に立つ）のは他の本 j についても平均 λ_j で独立に起こる。$j\neq i$ の本がジャンプをすると $X_i(t)$ は 1 ずつ値を上げる（ランキングを下げる）。これは、ランキングの数を見ればその本が（*Amazon* 書店で）最後に *1* 位になってからどれくらい時間がたっているかを示唆する、ということを示している。

命題 5 $X_1(0)=1$ とする *(*初期条件 : 時刻 0 で本 i が首位 と仮定*)*。$t>0$ において、$X_i(s)>1, s\leq t$ とする。下から数えた順位 $N-X_1(t)$ と N の比 $\frac{N-X_1(t)}{N}=1-\frac{X_1(t)}{N}$ は、$N\to\infty$ のとき、$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}e^{-\lambda_j t}$ に近づく。

$X_i(t)$ の代表として $X_1(t)=X_j(t)|_{j=1}$ をとった。ここで $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}e^{-\lambda_j t}$ は、時刻 t までに *1* 位にジャンプしない間の各粒子の「ジャンプしない率」$e^{-\lambda_j t}$ の平均である。つまりこの命題は、i 番目の本に関しての順位に関する**大数の法則**を表現している。

証明

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}e^{-\lambda_j t}=1-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}X_1(t)$$

をしめす。τ_i で「粒子 i がはじめて先頭に並ぶ時刻」を表す。$E[1_{\tau_i\leq t}]=P(1_{\tau_i\leq t})$ である。

また、$Z_i=1_{\tau_i\leq t}-P(1_{\tau_i\leq t}), i=1,...,N$ とおく。X_i はたがいに独立である。よって τ_i はたがいに独立なので、Z_i もたがいに独立である。これ

より

$$\frac{1}{N}X_1(t) - E[\frac{1}{N}X_1(t)] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i$$

である。(時刻 t までの間に、 $j = 1, ..., N$ の本が先頭に並ぶなら、その分だけ X_1 はランクを下げる（X_1 の値が上がる）。)

$|Z_i| \leq 1$ なので

$$E[\sum_{N=1}^{N'}(\frac{1}{N}X_1(t) - E[\frac{1}{N}X_1(t)])^4] = \sum_{N=1}^{N'} E[(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i)^4] \qquad (1)$$

が任意の $N' \leq \infty$ について成り立つ。

4 乗を展開する。たとえば

$$E[Z_1^3 Z_2] = E[Z_1^3]E[Z_2] = 0$$

である。

これらより *(1)* の右辺は, $|Z_i| \leq 1$ より

$$\sum_{N=1}^{N'} E[(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i)^4]$$

[10]

$$\sum_{N=1}^{N'} \frac{1}{N^4}(\sum_{i\neq j} 4E[Z_i^2]E[Z_j^2] + \sum_{i} E[Z_i^4])$$

$$\leq \sum_{N=1}^{N'} \frac{1}{N^4}(4N(N-1)+N) \leq \sum_{N=1}^{N'} \frac{4}{N^2} \leq \ 8$$

これより $\sum_{N=1}^{N'}(\frac{1}{N}X_1(t) - E[\frac{1}{N}X_1(t)])^4$ は確率 1 で収束し、したがって

$$\lim_{N\to\infty}(\frac{1}{N}X_1(t) - E[\frac{1}{N}X_1(t)]) = 0$$

である (確率過程としての収束)。

$X_i(t)$ はポアソン過程なので

$$P(\tau_i \leq t) = 1 - P(\tau_i > t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$$

[10] $(Z_1+Z_2)^4 = (Z_1^2 + 2Z_1Z_2 + Z_2^2)^2 = Z_1^4 + Z_2^4 + 4Z_1^2Z_2^2 + ...; E[...] = 0$

となるから

$$\lim_{N\to\infty} E[\frac{1}{N}X_1(t)] = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} P(\tau_i \le t)$$
$$= 1 - \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e^{-\lambda_i t}$$

となり、結論を得る。
　証明終

　この定理は
　N が大きければ、$\frac{1}{N}X_i(t)$ はほとんどばらつかない
　ということを言っている。

　なお、λ_i の決め方には天下り的な決め方はない。一般的には

$$\lambda_i = c(\frac{N}{i})^{1/\beta}$$

が妥当といわれていて（**ジップの法則**）、データにもよくあっているといわれている。ただし c, β は定数である。

命題 6 $t=0$ において x_i 位にある i 番目の書籍の、時刻 t での順位 $X_i(t)$ は次で与えられる：

$$X_i(t) = x_i + \sum_{j=1}^{N}\int_0^t 1_{\{X_j(s-)>X_i(s-)\}} dN_j(s) + \int_0^t (1-X_i(s-))dN_i(ds),\ i=1,...,N.$$

　証明 右辺第 *1* 項は時間の経過とともに当初 x_i 位の書籍 $X_i(s)$ が $X_j(s), j > i$ であった本に抜かれること、右辺第 *2* 項は時間の経過とともに、$X_i(s)$ 自身が売れて順位を上げること、を表している。証明終

　Amazon ランキングでは、誰かが「購入」をした瞬間にその商品が 1 位になり、その数秒後にまた誰かが別な商品を購入すれば、新たなその商品が 1 位になる、という「先頭に飛び出す規則」を用いている。これより、*Amazon* の順位は「どれぐらい前にこの商品は購入されたのか」を示すものである。つまり、ある本のランキングは、その本の順位だけではなく、すべての本の全体像を反映する。
　具体的に言うと、一万位から三万位ぐらいまでは、ほぼ「一時間ぐらいの間に一個、購入されたことになり一万位より先は「二個程度買われ

た」可能性を示す。さらに順位が上の商品は、一時間にかなりの購入者が集中したことを示す。

十万位ぐらいなら、今日か昨日、ひとつ購入されており、三日以上誰も買わなかった商品は、だいたい二十万位以下に落ちるが、誰かが買えば一万位台に回復する。一週間以上変化が起きないと三十万位から五十万位へと下降する。一年以上「誰も買わなかった商品」がどのぐらいの順位なのかは、考察しようがない。

また

$$X_C(t) = X_i(t) \quad conditioned\ X_i(0) = x_i = 1$$

とおく。これだけの情報から $X_i(t)$ の平均的な軌跡を作ることができる。

命題 7 （一般化したジップの分布）

$$X_C(t) = N\{(1 - e^{-ct}) + (ct)^{\beta}\Gamma(1-\beta, ct)\}$$

ここで $\Gamma(a, b)$ は不完全ガンマ関数：$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} t^{a-1}e^{-t}dt.$

証明省略。

$X_i(t)$ は確率変数であるが、$X_C(t)$ は t の実数値関数である。つまり、$X_i(0) = x_i = 1$ となる本の動きを見れば全体の順位の動きがわかる。

データとして、各々の本の売れ行き（λ_i に相当）は、その本が単位時間に何回、事象 $X_i(t) = 1$ を引き起こすか、によって観察される。

おおよその対応関係は次のようである *(*モデルに基づく推定値*)*。

順位	700,000	500,000	300,000	100,000	50,000	30,000
最後に売れてから（日）	72	26	9	36/24	13/24	6/24

練習問題

1. サイコロを 1 つ投げる。出目を見逃してしまったが，友人が出目は偶数だと教えてくれた。このとき出目が 4 以上であった確率を求めよ。

2 ある病気にかかっているか判定する検査について考える。この病気は 10 万人に一人が罹患している。「病気なのに陰性と判定してしまう確率」「病気でないのに陽性と判定してしまう確率」はともに 0.01 であるとする。ある人（太郎さん）が陽性と判定されたとき，本当に病気にかかっている確率を求めよ。

3 サイコロを 1 回だけふる。出目を X とする。また，Y を、出目が 1,2,3 なら 1，4,5 なら 2，6 なら 3 となる確率変数とする。このとき $E[X]$ と $E[E[X|Y]]$ を計算し，一致することを確認せよ。

4 独立確率変数 S_n, X がそれぞれ二項分布 $B(n,p)$，平均 λ の Poisson 分布に従うとすると，S_X は" 平均 $p\lambda$ の Poisson 分布従うことをしめせ。

5 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を独立で同じ確率分布に従う確率変数列とし，$X_{min} = \min\{X_i, i = 1, 2, ..., n\}$, $X_{max} = \max\{X_i, i = 1, 2, ..., n\}$ とおく.

(i) X_i の分布が平均 1 の指数分布のとき，

(ii) X, の分布が [0,1] 上のー様分布のとき.

それぞれについて，X_{min}, X_{max} の分布の確率密度関数を求めよ.

6 $\{X_n\}_{n=1\infty}$ を平均が m で分散が有限の独立同分布確率変数列とするとき

$$Y_n = ({}_nC_2)^{-1} \sum_{i<j}^{n} X_i X_j$$

が $n \to \infty$ のとき m^2 に収束することを示せ.

7 すべての $x > 0$ に対して次の不等式が成り立つことを示せ:

$$\frac{x}{1+x^2} e^{-x^2/2} \leq \int_x^\infty e^{-u^2/2} du \leq \frac{1}{x} e^{-x^2/2}$$

第3章　Poisson ランダム測度と Levy 過程

3.0.8　Poisson ランダム測度と Lévy 過程

この節では Poisson ランダム測度と Lévy 過程に関する基礎事項を振り返る。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする。ここで Ω は $\mathcal{T} = [0, T]$ 上定義された軌跡の集合である。ここで $T \leq \infty$ であり、$T = +\infty$ の場合には $\mathcal{T} = [0, +\infty)$ とする。多くの場合 T は有限として扱う。

$(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ は $\mathcal{F}$ の sub-σ-fields の増大する族である。これを**フィルトレーション**という。 ここで $\mathcal{F}_t$ は、右連続かつ、各軌跡 $s \mapsto \omega(s)$ が時刻 t までは可測となるような最小の σ-field である。

$(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\})$ 上で定義された $[0, \infty)$-値確率変数 $\tau(w)$ に対して，

$$\{\omega; \tau(\omega) \leq r\} \in \mathcal{F}_t,\ t \geq 0 \tag{3.1}$$

が成り立つとき，τ を $\mathcal{F}_t$ に関する**停止時刻**と呼ぶ.

$\{\omega; \tau(\omega) \leq r\}$ は $\mathcal{F}_t$ の可測集合であるから、停止時刻の条件を

$$\{\omega; \tau(\omega) < r\} \in \mathcal{F}_t,\ t \geq 0$$

に換えても同値である。

定義 3.0.4 *$\mathcal{T}$ 上の Lévy 過程 $(z(t))_{t \in \mathcal{T}}$ とは Ω 上の m 次元確率過程で次の (1)–(5) を満たすもののことである。*

(1) $z(0) = 0$ a.s.[1]

(2) $z(t)$ は独立増分をもつ (つまり $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n, t_i \in \mathcal{T}$, に対し確率変数 $z(t_i) - z(t_{i-1})$ 達は独立)

[1] ここで a.s. は ‘almost surely’(ほとんど確実に) の意味である。

(3) $z(t)$ は定常増分をもつ *(*つまり $z(t+h)-z(t)$ は h によるが、t によらない*)*

(4) $z(t)$ は確率連続 *(*つまり任意の $t \in \mathcal{T} \setminus \{0\}$ と任意の $\epsilon > 0$ に対し $P(|z(t+h)-z(t)| > \epsilon) \to 0$ *as* $h \to 0$*)*

(5) $z(t)$ は *càdlàg* な軌跡をもつ *(càdlàg : right continuous on* $\mathcal{T}$ *with left limits on* $\mathcal{T} \setminus \{0\}$*;* 右連続で左極限をもつ*)*

ここで $m \geq 1$ とする。$m = 1$ の場合には $z(t)$ は実数値過程である。

本講では主にジャンプ過程を扱う。時刻 t での増分を

$$\Delta z(t) = z(t) - z(t-). \tag{3.2}$$

とする。以下では $X_t, M_t, x_t, \ldots$ 等にも同じ記法 Δ を用いる。

$z(t)$ に対し計数過程 N を次のように導入する：

$A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ に対し

$$N(t, A) = \sum_{0 \leq s \leq t} 1_A(\Delta z(s)),\ t > 0. \tag{3.3}$$

とおく。これは時刻 t までの $z(.)$ の A へのジャンプ回数をはかる計数過程である。Lévy 過程 z の軌跡は càdlàg であるから、$\bar{A} \subset \mathbf{R}^m \setminus \{0\}$ であるような $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ に対し $N(t, A) < +\infty$ a.s. である。

$$N((a, b] \times A) = N(b, A) - N(a, A),$$

により $\mathcal{T} \times (\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ 上のランダム測度が定義できる。ここで $a \leq b$。このランダム測度 N が平均 $E[N((a, b] \times A)]$ をもつ Poisson 分布にしたがい、かつ、互いに素な $(a_1, b_1] \times A_1, \ldots, (a_r, b_r] \times A_r \in \mathcal{B}(\mathcal{T} \times (\mathbf{R}^m \setminus \{0\}))$ に対して $N((a_1, b_1] \times A_1), \ldots, N((a_r, b_r] \times A_r)$ が独立であるとき、**Poisson ランダム測度**という。

命題 8 *(Lévy -Itô decomposition theorem, [18] Theorem I.42)*

$z(t)$ を *Lévy* 過程とする。$z(t)$ は以下の表現をもつ。

$$z(t) = tc + \sigma W(t) + \int_0^t \int_{|z|<1} z \tilde{N}(dsdz) + \int_0^t \int_{|z| \geq 1} z N(dsdz), \tag{3.4}$$

for a.e. ω *for all* $t \in \mathcal{T}$*.*

ここで $c \in \mathbf{R}^m$, σ は $m \times m$ 行列である。$(W(t))_{t\in\mathcal{T}}, W(0)=0$ は m 次元 *(標準)Wiener* 過程、$N(dtdz)$ は平均測度 $\hat{N}(dtdz) = E[N(dtdz)]$ をもつ *Poisson* ランダム測度であり、$\tilde{N}(dtdz) = N(dtdz) - \hat{N}(dtdz)$ である。ここで $W(t)$ と $t \mapsto (\int_0^t \int_{|z|<1} z\tilde{N}(dsdz) + \int_0^t \int_{|z|\geq 1} zN(dsdz))$ は独立であり、さらに表現は一意的である。

ここで $\int_0^t \int zN(dsdz)$ と $\int_0^t \int z\tilde{N}(dsdz)$ は確率積分の意味である。その正確な定義については後で述べる。

Poisson ランダム測度を使って

$$\mu(A) = E[N(1,A)],\ A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m \setminus \{0\}) \tag{3.5}$$

とおく。これは **Lévy 測度**とよばれる。測度 μ は次を満たす。

$$\int_{\mathbf{R}^m \setminus \{0\}} (1 \wedge |z|^2)\mu(dz) < +\infty. \tag{3.6}$$

N に対応する**補償つき Poisson ランダム測度**を

$$\tilde{N}(dtdz) = N(dtdz) - dt\mu(dz).$$

により定義する。

とくに、もし $\mu(dz)$ が

$$\int_{|z|\geq 1} |z|\mu(dz) < +\infty,$$

を満たせば $z(t)$ は次のように書ける：

$$z(t) = tc' + \sigma W(t) + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^m \setminus \{0\}} z\tilde{N}(dsdz), \tag{3.7}$$

where $c' = c + \int_{|z|\geq 1} z\mu(dz)$.

$\mathbf{R}^m \setminus \{0\}$ 上の測度 μ は (1.2) を満たすとき、そしてそのときに限り、ある Lévy 過程の Lévy 測度になる。実際次の **Lévy -Khintchine** 表現がなりたつ。

命題 9 *(1)* $z(t)$ を $\mathbf{R}^m \setminus \{0\}$ 上の *Lévy* 過程とする。このとき

$$E[e^{i(\xi, z(t))}] = e^{t\Psi(\xi)},\ \xi \in \mathbf{R}^m, \tag{3.8}$$

ここで

$$\Psi(\xi) = i(c,\xi) - \frac{1}{2}(\xi, \sigma\sigma^T\xi) + \int (e^{i(\xi,z)} - 1 - i(\xi,z)1_{\{|z|<1\}})\mu(dz). \quad (3.9)$$

ここで $c \in \mathbf{R}^m$, $\sigma\sigma^T$ は非負行列であり、μ は *(3.6)* を満たす測度である。

(2) $c \in \mathbf{R}^m$, 行列 $\sigma\sigma^T \geq 0$ および *(3.6)* を満たす $\mathcal{B}(\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ 上の σ-*finite* 測度 μ に対して、*(3.8), (3.9)* を満たす確率過程 $z(t)$ が存在する。この $z(t)$ は *Lévy* 過程である。

証明は [19] Theorem 8.1、および [10] Sect. 0 を参照せよ。

$D_p = \{t \in \mathcal{T}; \Delta z(t) \neq 0\}$ とおく。これは a.s. に $\mathcal{T}$ の可算部分集合である。 $A \subset \mathbf{R}^m \setminus \{0\}$ とする。$\mu(A) < +\infty$ のとき、$D_p \ni t \mapsto \sum_{s \leq t, \Delta z(s) \in A} \delta_{(s,\Delta z(s))}$ により定義される測度は **Poisson 計数測度**という。関数 $D_p \ni t \mapsto p(t) = \Delta z(t)$ は **Poisson 点過程**という。

3.0.9 Lévy 過程の例

(1) Poisson 過程

強度 $\lambda > 0$ をもつ Poisson 過程とは $[0, +\infty)$ 上の非負整数値過程で次を満たすものである：

(i) $N_0 = 0, \Delta N_t = N_t - N_{t-}$ は 0 か 1

(ii) $s < t$ に対し $N_t - N_s$ は $\mathcal{F}_s$ と独立。

(iii) すべての t_1, t_2 とすべての $s > 0$ に対し、$N_{t_1+s} - N_{t_1}$ は $N_{t_2+s} - N_{t_2}$ と同分布。

(iv)

$$P(N_t = k) = \frac{1}{k!}(\lambda t)^k e^{-\lambda t}, k = 0, 1, 2, ...$$

実際には (iv) は (i)–(iii) からしたがう (cf. [18] Theorem I.23)。Poisson 過程の Lévy 測度は $\lambda\delta_{\{1\}}$ であり、$b = 0, \sigma = 0$ である。

(2) 複合 Poisson 過程

複合 Poisson 過程 $Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$ は、$(Y_k), k = 1, 2, ...$ は共通の有限分布 μ をもつ i.i.d. 確率変数とし、N_t は (Y_k) と独立な、強度 $\lambda > 0$ をもつ Poisson 過程とする。このとき $Y_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$ と表される確率過程を複合 Poisson 過程という。Y_t は次の表現をもつ：

$$Y_t = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^m \setminus \{0\}} z\ N(dsdz), \quad (3.10)$$

ここで $N(dsdz)$ は平均測度 $\lambda ds\mu(dz)$ をもつ $\mathcal{T}\times(\mathbf{R}^m\setminus\{0\})$ 上の Poisson ランダム測度である。

(3) 安定過程 (Stable process)

Lévy 測度 μ が

$$\mu(dz)=c_\alpha\frac{dz}{|z|^{m+\alpha}}, \tag{3.11}$$

で与えられる Lévy 過程を**対称安定過程**という。ここで $\alpha\in(0,2)$ であり、安定過程の指数という。

μ が、 S^{m-1} 上の関数 $a(.)\geq 0$ により

$$\mu(dz)=c'_\alpha a(\frac{z}{|z|})\frac{dz}{|z|^{m+\alpha}}, \tag{3.12}$$

で与えられる場合には、この過程は**非対称安定過程**という。$m=1$ の場合には μ は次の形になる

$$\mu(dz)=(c_-1_{\{z<0\}}+c_+1_{\{z>0\}})\frac{dz}{|z|^{1+\alpha}}, \tag{3.13}$$

where $c_-\geq 0, c_+\geq 0$.

(4) 多次元安定過程

$e_0,e_1,\ldots,e_m$ を $\mathbf{R}^m$ のベクトルで $\langle e_1,\cdots,e_m\rangle$ が $T_0\mathbf{R}^m$ の直交基底をなすものとする。$z(t)$ を

$$z(t)=x+e_1z_1(t)+\cdots+e_dz_m(t)\,,$$

により定義される Lévy 過程とする。ただし、$z_1(t),\cdots,z_m(t)$ は各々指数 α_j の (1 次元) 対称安定過程である ($j=1,...,m$)。$z(t)$ を**多次元安定過程**という。

ここで $\alpha_j\in(0,2)$ は互いに異なってもよい : $\sigma(1)\geq\sigma(2)\geq\cdots\geq\sigma(m)$。ただし σ は $\{1,...,m\}$ の置換である。

(5) Wiener 過程

(3.9) の表現において $c=0,\sigma\sigma^T=I,\mu\equiv 0$ となるものを (標準)Wiener 過程 (Brown 運動) という。

Wiener 過程 (Brown 運動)$W(t)$(で $W(0)=0$ を満たすもの) は定義 3.0.4 を満たす連続 Lévy 過程である。

Wiener 過程は次のスケーリング性をもつ : $c^{-\frac{1}{2}}W(ct)$ は $W(t)$ と同分布 for all $c>0$。

3.0.10 ウイナー (Wiener) 測度とブラウン運動（ウイナー過程）

μ を $\mathbf{R}^d$ 上の確率測度とする。$[0,\infty)$ 上の $\mathbf{R}^d$ 値連続関数の全体を W ないし W^d とかく。W には広義一様収束の位相を入れる。

定理 3.0.7 *(ウイナー (Wiener) 測度)* 任意の $n \in \mathbf{N}, 0 < t_1 < ... < t_n, E_1, E_2, ..., E_n$ に対して次を満たす確率測度 P がただ一つ存在する：

$$P(\{w \in W^d; w(0) \in E_0, w(1) \in E_1, ..., w(n) \in E_n\})$$

$$= \int_{E_0} \mu(dx) \int_{E_1} p(t_1, x, x_n) dx_1 \cdots \int_{E_n} p(t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, x_n) dx_n. \quad (3.14)$$

この測度を**ウイナー (Wiener) 測度**という。

d-次元確率過程で、その確率法則がある初期分布を持つウイナー測度であるものを**ブラウン運動**（ウイナー過程）という。初期分布が δ_x のとき、x **を出発するブラウン運動**という。

ブラウン運動を $W(t)$ ないし $B(t)$ とかく。

確率空間が与えられたとき、その空間に Brown 運動が存在するかどうかは自明ではありませんが、現在では様々な構成法が知られている。たとえば、Kolmogorov の拡張定理を用いて無限次元の Gauss 仮定として構成する方法や、random walk を scale 変換して無限に細かくしていく方法などがある。本ノートでは、有界区間における Brown 運動を Gauss 分布にしたがうランダムな係数をもつ Fourier 級数として構成する方法を紹介する。

定理 3.0.8 *(Brown 運動の構成)*

$\xi_0, \xi_1, ...$ を互いに独立な $N(0,1)$ にしたがう確率変数列とする。このとき $t \in [0,\pi]$ に対して

$$W(t)(\omega) = \frac{t}{\sqrt{\pi}} \xi_0(\omega) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{2^k+1}^{2^{k+1}} \xi_j(\omega) \frac{\sin jt}{j} \quad (3.15)$$

とおくと、$W(t), 0 \le t \le \pi$ は *Brown* 運動になる。

証明省略。

ここで $W(t)$ は $[0,\pi]$ 上の Brown 運動であるが、次のようにして $[0,\infty)$ での Brown 運動を構成できる。

(i) 定理1でできたBrown運動を独立に可算個用意し、それを $(W(t)^{(i)}, 0 \le t \le \pi)_{i=1,2,\ldots}$ とかく

(ii)

$$W(t)=\sum_{i=1}^{[t/\pi]} W(\pi)^{(i)} + W(t-[t/\pi]\pi)^{[t/\pi]+1}, \quad t \ge 0$$

とおけば、$W(t)$ は $[0,\infty)$ での Brown 運動になる。

命題 10 d-次元ブラウン運動 $W(t)$ について次が成り立つ。

(i) 独立増分をもつ。つまり $0<t_1<\ldots<t_n$ に対して $W(t_1), W(t_2)-W(t_1), \ldots, W(t_n)-W(t_{n-1})$ は独立である。

(ii)$s<t$ のとき、$W(t)-W(s)$ は平均 0、共分散行列 $(t-s)I$ の d-次元正規分布にしたがう。

(iii) $W(t)$ の各成分 $W(t)^i, i=1,\ldots,d$ は 1-次元ブラウン運動である。

(iv) 1-次元ブラウン運動 $W(t)^i$ は連続なマルチンゲールである。*(*マルチンゲールについては *4* 章を参照。*)*

以下 $x=0$ とする。また $W^1(t)=W(t)$ とかく。(ii) より, $E[W(s)W(t)]=\min\{s,t\}$ である。

じっさい、$s \le t$ とすると

$$E[W(s)W(t)] = E[(W(t)-W(s)+W(s)-W(0))(W(s)-W(0))]$$

$$= E[(W(t)-W(s))(W(s)-W(0))] + E[(W(s)-W(0))^2]$$

$$= s$$

となる。

また、(ii) より, 任意の $c>0$ に対し

$$W'(t)=cW(t/c^2) \tag{3.16}$$

もブラウン運動である。じっさい、$W'(t)-W'(s)$ は独立で、平均 0、共分散行列 $(t-s)I$ の d-次元正規分布にしたがう。q.e.d.

Brown 運動の Hölder 連続性

Brown 運動 $(W(t))_{t\geq 0}$ に対して

$$\lim_{h\to 0} \sup_{0\leq |t-s|\leq h, 0\leq s,t\leq 1} \frac{|W(s)(\omega)-W(t)(\omega)|}{\sqrt{2h\log(1/h)}} = 1, \quad a.s. \tag{3.17}$$

が成り立つ。

(証明省略)

ブラウン運動の微小変化

$T>0$ を固定し、$\Delta_n = \{0 \leq t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < ... < t_n^{(n)}\}, n=1,2,...$ を区間 $[0,T]$ の分割の列とする。$|\Delta_n| = \sup_{k=1,\ldots,n} |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ とかく。また $t<T$ に対し $\Delta_n(t) = \{t_k^{(n)}; t_k^{(n)} \leq t\}$ と置く。

次の定理は上の命題 (ii) の運動版である。

定理 (ブラウン運動の 2 次変分) $\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| < \infty$ ならば

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t_k^{(n)}\in\Delta_n(t)} |W(t_k^{(n)}) - W(t_{k-1}^{(n)})|^2 = t \quad a.s. \tag{3.18}$$

がなりたつ。

（証明省略）

この結果は

$$\int_0^t (dW(s))^2 = t$$

ということ、ないし

$$(dW(s))^2 = dt$$

とうことである。

ブラウン運動の具体例

株価の変動気体・液体分子の運動

http://www.sci.keio.ac.jp/eduproject/gallery/detail.php?eid=00044

http://www.sci.keio.ac.jp/eduproject/practice/physics/detail.php?eid=00023

https://www.try-it.jp/chapters-9234/sections-9305/lessons-9348/

3.0.11 ウイナー (Wiener) 過程の積分

以下ウイナー過程 $W(t)$ を $X(t)$ とかく。
(1) ウイナー過程のリーマン積分

$$\int_a^b X(t)dt \tag{3.19}$$

これは ω を固定すれば $t \mapsto X(t,\omega)$ は連続関数なので、リーマン積分として定義できる。

(2) 関数 $f(t)$ のウイナー積分
$[a,b]$ を区間とし、$[a,b]$ の分割を

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$$

とする（等間隔でなくてもよい）。ただし $\max_k |t_k - t_{k-1}| \to 0$ $(n \to \infty)$ とする。

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})|X(t_k) - X(t_{k-1})| \tag{3.20}$$

とおく。

定義 3.0.5 $\lim_{n\to\infty} I_n(f)$ が存在するときその極限を $I(f) = \int_a^b f(t)dX(t,\omega)$ とかく。これを $f(t)$ の**ウイナー積分**という。

$I(f)$ の性質
定義から $I_n(f)$ は、平均 0 の正規分布をもつ確率変数の有限個の和である ($f(t_{k-1})$ は確率変数ではない)。これより

$$E[I_n(f)] = 0 \tag{3.21}$$

である。よって $E[I(f)] = 0.$
分散は

$$V(I_n(f)) = \sum_{k=1}^{n} (f(t_{k-1}))^2 (t_k - t_{k-1})$$

より

$$V(I(f)) = \lim V(I_n(f)) = \int_a^b f(t)^2 dt$$

となる。つまり、正規分布の再生性より、$I(f)$ は $N(0,\|f\|^2)$ にしたがう。

(3) 伊藤積分

関数 $f(t)$ の代わりに、ウイナー過程の関数 $f(X(t))$ ないし $f(X(t),t)$ をウイナー積分する。

ブラウン運動の全変動は（確率 1 で）無限大なので、積分 $\int_a^b f(X(t))dX(t,\omega)$ は通常の Stieltjes 積分として定義することはできない。

$[a,b]$ を区間とし、$[a,b]$ の分割を

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$$

とする（等間隔でなくてもよい）。ただし $\max_k |t_k - t_{k-1}| \to 0\ (n \to \infty)$ とする。

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(X(t_{k-1}))|X(t_k) - X(t_{k-1})|$$

とおく。

$\lim_{n\to\infty} I_n(f)$ が存在するときその極限を $I(f) = \int_a^b f(X(t))dX(t,\omega)$ とかく。これを $f(X(t))$ の**伊藤積分**という。ただし、収束は平均 2 乗収束とする。なお、被積分関数の時刻の取り方が $X(t_{k-1})$ (区間の左端) なのに注意せよ。

ここでも

$$E[I_n(f)] = 0$$

である。よって $E[I(f)] = 0$.

伊藤積分は通常の積分と異なる、次のような計算規則にしたがう。

命題 11

$$d(tW(t)) = W(t)dt + tdW(t) \tag{3.22}$$

証明

$$\int_a^b tdW(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_{k-1}(W(t_k) - W(t_{k-1}))$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}W(t_k)) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (t_kW(t_k) - t_{k-1})W(t_{k-1})$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})W(t_k) + bW(b) - aW(a)$$
$$= bW(b) - aW(a) - \int_a^b W(t)dt$$

証明終

例題
$$\int_a^b X(t)^2 dX(t) = \frac{1}{3}X(b)^3 - \frac{1}{3}X(a)^3 - \int_a^b X(t)dt$$
を示せ。

解 2 伊藤積分の定義から

$$W(t_{n-1})^2(W(t_n) - W(t_{n-1}))$$
$$= \frac{1}{3}(W(t_n)^3 - W(t_{n-1})^3) - \frac{1}{3}W(t_n)^3 - \frac{2}{3}W(t_{n-1})^3 + W(t_{n-1})^2 W(t_n)$$
$$= \frac{1}{3}(W(t_n)^3 - W(t_{n-1})^3) - \frac{1}{3}(W(t_n) + 2W(t_{n-1}))(W(t_n)^2 - 2W(t_n)W(t_{n-1}) + W(t_{n-1})^2)$$
$$= \frac{1}{3}(W(t_n)^3 - W(t_{n-1})^3) - \frac{1}{3}(W(t_n) + 2W(t_{n-1}))(W(t_n) - W(t_{n-1}))^2$$

最後の項について k について和を取り $n \to \infty$ とすると
$$\int_a^b W(t)dt$$
に近づく。

一般に $m \geq 2$ に対し
$$d(X(t)^m) = mX(t)^{m-1}dX(t) + \frac{m(m-1)}{2}X(t)^{m-2}dt \tag{3.23}$$
が成り立つ。最後の項が補正項である。

命題 12
$$\int_a^b X(t)dX(t) = \frac{1}{2}X(b)^2 - \frac{1}{2}X(a)^2 - \frac{1}{2}(b-a)$$
これを単に
$$d(X(t)^2) = 2X(t)dX(t) + dt$$
とかく。

証明は、上記例題を見て各自行え。

命題 13 $f(x)$ が 2 回連続的微分可能とする。

$$df(X(t)) = f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))dt \tag{3.25}$$

が成り立つ。

上の結果を**伊藤の公式**（の簡単な場合）という。伊藤の公式については後の章（6 章）で詳しく論じる。

練習問題

$X(t)$ はウイナー過程（ブラウン運動）とする。

1.

$$\int_a^b X(t)^3 dX(t) = \frac{1}{4}X(b)^4 - \frac{1}{4}X(a)^4 - \frac{3}{2}\int_a^b X(t)^2 dt$$

を示せ。

2.

以下の期待値をもとめよ。

(1)

$$E[X(t)^3]$$

(2)

$$E[X(t)^4]$$

(3)

$$E[\exp(X(t))]$$

3. (i) ウイナー過程 $X(t)$ に対し共分散

$$Cov(X(t), X(s))$$

をもとめよ。

(ii)X が n 次元正規分布 $N(m, \Sigma)$ に従う確率変数のとき，$E[X_j] = m, Cov(X_i, X_j) = \Sigma_{i,j}$ を示せ.

(iii) $X_1, X_2, ..., X_n$ が独立であるための必要十分条件は，共分散行列 Σ が対角行列であることを示せ.

4. σ, τ を確率空間 $(\Omega, (\mathcal{F}_t), P)$ 上に定義された停止時刻とする。次をしめせ。

(1) $\mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$

(2) $\{\sigma < \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$, $\{\sigma > \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$, $\{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$, $\{\sigma \geq \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$, $\{\sigma = \tau\} \in \mathcal{F}_{\sigma\wedge\tau}$.

5. $X_1, X_2, ...$ を i.i.d. (独立同分布確率変数列) で，$(0, 1)$ 上の一様分布に従うとし，$S_n, = X_1 + \cdots + X_n$ とおき，$T = \min\{n \geq 1; S_n \geq 1\}$ で定義される停止時刻 T を考える．

(i) $t > 0$ に対して，$P(S_n < t) = t^n/n!$ を示せ．

(ii) $P(T \geq n) = 1/(n-1)!$, $E[T] = e$ を示せ．

第4章　マルチンゲールとセミマルチンゲール

この章ではジャンプのついた確率微分方程式 (SDE) について述べる。マルチンゲールおよびセミマルチンゲールの定義から始めて確率積分および確率微分方程式に至る。

4.1　マルチンゲールとセミマルチンゲール

フィルトレーション

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする。

$\mathcal{G}$ を標本空間 Ω の σ 加法族とする。$\mathcal{G}$ の任意の要素が $\mathcal{F}$ に含まれているとき、すなわち $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ のとき $\mathcal{G}$ を部分 σ 加法族という。

X を $\mathcal{F}$ 可測な確率変数とする。Ω の部分集合族

$$\{X^{-1}(B); B \in \mathcal{B}\} \tag{4.1}$$

は $\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族となる。これを $\sigma(X)$ と表し、確率変数 X から生成される σ 加法族または X を可測にする最小の σ 加法族という。

一般に $\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族は標本空間 Ω に関してわれわれが得た情報を記述していると見ることができる。

$\mathcal{F}$ の部分 σ 加法族の列 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ がつぎの性質をもつとき（離散パラメータ）の**フィルトレーション**と呼ぶ

$$(1)\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\},$$

$$(2)\ \text{単調増大性}\qquad m < n\ \text{のとき}\ \mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n.$$

離散パラメータの確率過程 $\{\mathcal{X}_n\}_{n\geq 0}$ が与えられているとする。$n > 0$ を固定して、次の型の事象族

$$\{X_0^{-1}(B_0) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(B_n); B_0, ..., B_n \in \mathcal{B}\} \tag{4.2}$$

を含む最小の σ 加法族を $\sigma(X_m; m \leq n)$ とあらわす。$F_n = \sigma(X_m; m \leq n)$ とおけば $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ はフィルトレーションである。これを確率過程 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ より生成されたフィルトレーションという。確率変数 X が $\mathcal{F}_n$ 可測であれば、n 変数ボレル可測関数 $\psi(x_1, ..., x_n)$ があって $X = \psi(X_1, ..., X_n)$ と表される。

フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ は次の (i), (ii) を満たすとき *usual condition* (通常の条件) をみたすという：

(i) $\mathcal{F}_0$ は $\mathcal{F}$ の零集合を含む

(ii) 右連続である。

以下では the usual condition を満たすフィルトレーションをもつ確率空間を考察する。

確率過程 $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ は、任意の t について X_t が $\mathcal{F}_t$-可測であるとき **適合している** *(adapted)* という。関数 $X_\cdot : [0, t] \times \Omega$ が任意の $t \geq 0$ について $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$-可測であるとき**発展的可測** (プログレッシブに可測) という。一般の適合過程は発展的可測とは限らない。しかし t に関して右または左連続な適合過程は発展的可測である。以下では主に

$$\mathcal{L}^* = L^2([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t, dt \times P) \tag{4.3}$$

に属するような確率過程を考える。

確率過程 $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ は、任意の $A \in \mathcal{B}$ に対して

$$\{(t, \omega); X_t(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}([0, \infty)) \otimes \mathcal{F} \tag{4.4}$$

となるとき**可測過程**という。可測過程と適合過程は互いに別の概念である。

フィルトレーション $\mathcal{F}$ に関する条件付き期待値 $E[X|\mathcal{F}]$ は次のように定義する。

定義 4.1.1

(1)$E[X|\mathcal{F}](\omega)$ は $\mathcal{F}$ 可測である

(2) 任意の $A \in \mathcal{F}$ に関して

$$\int_A E[X|\mathcal{F}](\omega) dP(\omega) = \int_A X(\omega) dP(\omega)$$

である。

言い換えると次のようになる。

$A \in \mathcal{F}$ として

$$\chi_A(\omega) = 1 \text{ if } \omega \in A, = 0 \text{ if } \omega \notin A$$

とおく。

$\mathcal{F} = \mathcal{F}_t$(時刻 t までに得られた情報) をもとにした、事象 A の条件付き確率 $P(A|\mathcal{F}_t)(\omega)$ を

$$P(A|\mathcal{F}_t)(\omega) = E[\chi_A|\mathcal{F}_t](\omega)$$

とおく。

ここで $X \geq 0$ に関し

$$Q(A) = \int_A X(\omega) dP(\omega)$$

とおくと、$Q(.)$ は Ω 上の測度となり、測度 $Q(.)$ は測度 $P(.)$ に絶対連続になる。

これより、ラドン-ニコディムの定理から、$\mathcal{F}$-可測な確率変数 $\frac{dQ}{dP}(\omega)$ が存在して

$$Q(A) = \int_A \frac{dQ}{dP}(\omega) dP(\omega)$$

がなりたつ。つまり

$$E[X|\mathcal{F}](\omega) = \frac{dQ}{dP}(\omega)$$

である。

条件付き確率の性質

$\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族とする。このとき次が成立する。

(1)

$$E[aX + bY|\mathcal{G}](\omega) = aE[X|\mathcal{G}](\omega) + bE[Y|\mathcal{G}](\omega)$$

(2) X が $\mathcal{G}$-可測の時、$E[X|\mathcal{G}](\omega) = X(\omega)$ である。

(3) X が $\mathcal{G}$-可測の時、

$$E[XY|\mathcal{G}](\omega) = X(\omega)E[Y|\mathcal{G}](\omega)$$

(4) $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ であるとき

$$E[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1](\omega) = E[X|\mathcal{G}_1](\omega)$$

(5) X と χ_B が独立 (for all $B \in \mathcal{G}$) であるとき

$$E[X|\mathcal{G}](\omega) = E[X]$$

マルチンゲール

càdlàg な軌跡をもつ適合過程 M_t は次をみたすとき**マルチンゲール**という：

$$(1)\ M_t \in L^1(P),\ t \in \mathcal{T} \tag{4.5}$$

$$(2)\ \text{もし } s \leq t \text{ ならば } E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s, a.s., \quad s,t \in \mathcal{T}. \tag{4.6}$$

ここで (2) の代わりに

$$\text{もし } s \leq t \text{ ならば } E[M_t|\mathcal{F}_s] \geq M_s, a.s., \quad s,t \in \mathcal{T},$$

がなりたつときには、X_t は **劣マルチンゲール**という。また、(2) の代わりに

$$\text{もし } s \leq t \text{ ならば } E[M_t|\mathcal{F}_s] \leq M_s, a.s., \quad s,t \in \mathcal{T},$$

がなりたつときには、X_t は **優マルチンゲール**という。

確率変数 $\mathrm{T} : \Omega \to [0, +\infty]$ は、 任意の $t \in \mathcal{T}$ について $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ となるとき、 **停止時刻**という。停止時刻の全体を $\mathcal{T}$ とかく。

$0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq ... \leq \tau_n \leq ...$ を停止時刻の列で $\mathrm{T}_n \to +\infty\ a.s$ となるものとする。適合過程 M_t で、上のようなある停止時刻の列があって、任意の n について $M_{t\wedge\tau_n}$ がマルチンゲールになるものを、**局所マルチンゲール**という。

マルチンゲールは局所マルチンゲールである。これは Doob の optimal sampling theorem による。

さらに (M_t^n) が二乗可積分なマルチンゲールになるとき、**局所二乗可積分マルチンゲール**という。

確率過程 X_t は、局所マルチンゲール M_t と、有界変動で càdlàg な適合過程 A_t を使って

$$X_t = X_0 + M_t + A_t \tag{4.7}$$

とかけるとき、**セミマルチンゲール**という。マルチンゲールはセミマルチンゲールである。

1 次元 (標準)Poisson 過程 N_t はセミマルチンゲールである。じっさい

$$N_t = \tilde{N}_t + t,$$

とかける。ここで $\tilde{N}_t = N_t - t$ は局所マルチンゲール (実際はマルチンゲール) である。

ジャンプ型の Lévy 過程 $z(t)$ について、もし $\int |z|\mu(dz) < +\infty$ ならば補償つき Lévy 過程 $\tilde{z}(t) = z(t) - \int_0^t ds \int z\mu(dz)$ は局所マルチンゲールである。

例題 4 Z を $E[|Z|] < \infty$ なる確率変数とする。

$$Z_t = E[Z|\mathcal{F}_t]$$

とおくと、$\{Z_t\}$ はマルチンゲールになる。

例題 5 $\{X_t\}$ を $X_0 = 0$ なるマルチンゲールとする。$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... \to \infty$ なる数列 $\{t_n\}$ をとり、さらに $\mathcal{F}_{t_i}$-可測な確率変数 α_i をとる $(i = 0, 1, 2, ...)$。$t_m \leq t < t_{m+1}$ なる t に対し

$$Z_t = \alpha_0 X_{t_1} + \alpha_1(X_{t_2} - X_{t_1}) + ... + \alpha_m(X_t - X_{t_m})$$

とおく。このとき $\{Z_t\}$ はマルチンゲールになる。

4.1.1 セミマルチンゲールに関する確率積分

セミマルチンゲール X_t についての上の分解を使って、有界かつ (局所的に) 可予測過程 $h(u)$ に関する確率 (伊藤) 積分を

$$\int_s^t h(u)dX_u = \int_s^t h(s)dM_u + \int_s^t h(s)dA_u \tag{4.8}$$

により定義する。

確率過程 $h(u)$ は、$\Omega \times \mathbf{R}_+$ 上の σ-field $\mathcal{P}$ に関し可測であるとき**可予測**という。ここで $\mathcal{P}$ は、左連続かつ右極限をもつ適合過程から生成される σ-field を表す。

$t \mapsto A_t$ は有界変動過程であるから、右辺第 2 項は通常の積分として定義できる。積分 $\int_s^t h(s)dM_u$ を以下のように定義する。

時間の列を $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ とする。単純過程 $h(t)$ とは

$$h(t) = h_0 1_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} h_i 1_{(t_i, t_{i+1}]}(t), \tag{4.9}$$

と表わされるものである。ここで h_i は $\mathcal{F}_{t_i}$-可測かつ $|h_i| < +\infty$ a.s. となるものである。$\mathbf{S}$ で単純過程の全体を表す。位相は (t, ω) に関する一様収束の位相である。

単純過程 $h \in \mathbf{S}$ の、 càdlàg 軌跡をもつマルチンゲール M に関する確率積分 $I(h)$ を次で定義する：

$$I(h) = h(0)M_0 + \sum_{i=0}^{n} h_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \tag{4.10}$$

$I(h)$ を h の M **に関する確率積分**という。

$I(h)$ は次の性質をもつ。

(1) もし $M_t = W(t)$ (Brown 運動) ないし $M_t = \tilde{N}_t$ (補償つき Poisson 過程) ならば、 $I(h)(t)$ はマルチンゲールである。すなわち、

$$E[I(h)(t)|\mathcal{F}_s] = I(h)(s), s \leq t$$

(2) $I^2(h)(t) - \int_0^t h^2(s)d[M]_s$ はマルチンゲールである。

(3) $E[I^2(h)(t)] = E[\int_0^t h^2(s)d[M]_s]$

ここで $[M]$ は M の **2 次変分**を表す (2 次変分については下記および [18]Section II.6 を参照)。

性質 (1) については [17] Proposition 2.5.7 を見よ。性質 (1) は後で述べる「可予測表現性」(定理 4.1.2) に関連している。つまり、$dM_t = \phi(t)dW(t)$ ないし $dM_t = \phi(t)d\tilde{N}(t)$ と表現できれば、$I(h)(t) = \int_0^t h(s)dM_s = \int_0^t h(s)\phi(s)dW(s)$ ないし $I(h)(t) = \int_0^t h(s)d\tilde{N}(s) = \int_0^t h(s)\phi(s)d\tilde{N}(s)$ となり、$I(h)$ はマルチンゲールになる。。

性質 (3) から、写像 $h \mapsto I(h)$ は、$L^2(\Omega \times [0,+\infty), P \times d[M]_s)$ における適合過程から $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ への同相写像に拡張されることがわかる。

さらに $\mathbf{S}$ は $L^2(\Omega \times [0,+\infty), P \times d[M]_s)$ において稠密であり、$h \in L^2(\Omega \times [0,+\infty), P \times d[M]_s)$、可予測、の元は $\mathbf{S}$ の元で近似されることから、I は $I : L^2(\Omega \times [0,+\infty), P \times d[M]_s) \to \mathbf{D}$ に拡張される。この I を**確率積分**という。

以上をまとめると、確率積分 $I(h), h \in L^2(\Omega \times [0,+\infty), P \times d[M]_s)$ は次を満たす。

(1) 定数 α, β および $h, g \in L^2(\Omega \times [0,+\infty), P \times d[M]_s)$ について

$$I(\alpha h + \beta g) = \alpha I(h) + \beta I(g), a.e.$$

(2) $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$ に対し

$$\int_{t_1}^{t_3} h(t)dM_t = \int_{t_1}^{t_2} h(t)dM_t + \int_{t_2}^{t_3} h(t)dM_t$$

(3) $t \mapsto I(h)(t)$ は適合過程であり、càdàg な軌跡の変形をもつ。

(4) $I(h)(0) = 0$ a.s.

(5) $M_t = W(t)$ または $M_t = \tilde{N}_t$ のとき、 $t \mapsto I(h)$ はマルチンゲールであり、よって

$$E[I(h)(t)] = 0, t > 0$$

(6)

$$[I(h)]_t = \int_0^t |h(s)|^2 d[M]_s,\ [I(h), I(g)]_t = \int_0^t h(s)g(s)d[M]_s$$

$M_t = W_t$ がブラウン運動の場合

M_t がブラウン運動の時、より詳しくは次のようである。

$(W_t)_{0\le t\le T}$ をブラウン運動とし、$(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ をブラウン運動によって生成されたフィルトレーションとする。$(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ に適合した確率過程 (f_t) のブラウン運動 $(M_t) = (W_t)$ による積分 $\int_0^t f_s dW_s$ は次のように定義する。

[I] まず、被積分関数 $f_t(\omega)$ が単関数過程である場合に積分を定義する。ここに f_t が単関数過程とは、$[0, T]$ の分割 $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots t_i < \cdots < t_m = T\}$ と二乗可積分かつ $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-可測な確率変数 $\phi_i, i = 1, 2, ...$ が存在して

$$f_t = \sum_{i=1}^{m} \phi_i 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t) \tag{4.11}$$

と表せることをいう。このとき任意の $t \in (t_k; t_{k+1}]$ にたいして f_s の dW_t による確率積分を

$$\int_0^t f_s dW_s = \sum_{i=1}^{k} \phi_i (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \phi_k (W_t - W_{t_k}) \tag{4.12}$$

によって定義する。単関数過程の確率積分はつぎの性質をもつ。

補題 4.1.1 確率過程 $(\int_0^t f_s dW_s)$ は平均 0 の連続な L^2-マルチンゲールである。さらに任意の $t \in [0, T]$ に対して

$$(1)\ E[(\int_0^t f_s dW_s)^2] = E[\int_0^t f_s^2 ds]$$

$$(2)\ E[\sup_{0\le u\le t} |\int_0^u f_s dW_s|^2] \le 4E[\int_0^t f_s^2 ds]$$

である。

[II] 次に確率積分の被積分過程 (f_t) が t に関して連続な適合過程であって、$E[\int_0^t f_s^2 ds] < \infty$ をみたすとする。f_t を単関数過程列 $\{f_t^n\}$ で近似し、上と同様な結果を導くことができる。

実際、このとき

$$E[\int_0^T (f_s - f_s^n)^2 ds] \to 0$$

が成立する。$\int_0^t f_s^n dW_s - \int_0^t f_s^m dW_s$ は単関数過程の確率積分だから、(2) の不等式より

$$E[(\int_0^t f_s^n dW_s - \int_0^t f_s^m dW_s)^2] \leq 4E[\int_0^t (f_s^n - f_s^m)^2 ds]$$

したがって $n \to \infty$ のとき確率積分の列

$$\{\int_0^t f_s^n dW_s, n = 1, 2, ...\}$$

は一様に L^2-収束する。極限過程を $\int_0^t f_s dW_s$ と書くと、これは連続なマルチンゲールで補題の式 (1),(2) を満たす。

すなわち、(f_t) を $E[\int_0^t f_s^2 ds] < \infty$ を満たす可測な $(\mathcal{F}_t)$-適合過程とすれば確率積分 $\int_0^t f_s dW_s$ が定義される。確率積分は連続な L^2-マルチンゲールであり、等式 (1) をみたす。

[III] 確率積分の被積分過程 (f_t) のクラスを広げたほうが応用上便利である。$(\mathcal{F}_t)$ に適合した確率過程 (f_t) が

$$\int_0^T f_t^2 dt < \infty, \ a.s. \tag{4.13}$$

を満たすとする。停止時刻の増大列 $\tau_n; n = 1, 2, ...$ を

$$\tau_n = \inf\{t > 0; \int_0^t f_s^2 ds \geq n\},$$

$$\tau_n = \infty \text{ if } \{...\} = \emptyset$$

で定義する。適合過程列 $\{f_t^n\}$ を $f_t^n = f_t 1_{t<\tau_n}$ によって定義すれば、

$$E[\int_0^T (f_t^n)^2 dt] \leq n^2$$

をみたす。ゆえに各 n で確率積分 $\int_0^t f_s^n dW_s$ は定義できる。$n < m$ のとき

$$\int_0^{t\wedge\tau_n} f_s^m dW_s = \int_0^t f_s^n dW_s$$

が成立する。ゆえに連続な確率過程 M_t で $M_{t\wedge\tau_n} = \int_0^t f_s^n dW_s$ をみたすものが存在する。この M_t を $\int_0^t f_s^n dW_s$ で表す。これは $(\mathcal{F}_t)$ 適合過程である。一般には M_t は可積分ではなく $(E[|M_t|] = \infty)$、マルチンゲールにはならない。

$(\hat{\mathcal{F}}_t)_{0\le t\le T}$ を、ブラウン運動によって生成されたフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}$ より大きなフィルトレーションとする：$(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T} \subset (\hat{\mathcal{F}}_t)_{0\le t\le T}$。

(W_t) がブラウン運動であって、

１）任意の t で W_t は $\hat{\mathcal{F}}_t$ 可測

２）任意の $s < t$ にたいし $W_t - W_s$ は $\hat{\mathcal{F}}_t$ と独立

の２性質を持っているとき、(W_t) を $\hat{\mathcal{F}}_t$-ブラウン運動という。

(f_t) が $\hat{\mathcal{F}}_t$ に適合して可積分性条件 (3) をみたすとき確率積分を上とまったく同じように定義できる。

2 次変分過程

マルチンゲール $M(t)$ について 2 次変分過程 $V_t^2(M)$ を次のように置く:

$\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t\}$ を $[0, t]$ の分割とし、

$$V_{t,\Delta}^2(M) = \sum_{i=1}^n |M(t_i) - M(t_{i-1})|^2 \tag{4.14}$$

また $V_t^2(M) = \sup_\Delta V_{t,\Delta}^2(M)$ とおく。

$V_t^2(M)$ は各 ω ごとに定まるが、各 $t > 0$ について $E[M(t)^2] < \infty$ であれば、M の 2 次変分は確率 1 で定まる。

定理 4.1.1 任意の $t > 0$ に対し $E[M^4(t)] < \infty$ を仮定する。確率過程 $[M] = ([M]_t)$ が存在し、$[M]_0 = 0$ かつ

$$E[|V_{T\Delta}^2(M) - [M]_t|^2] \to 0, \quad |\Delta| \to 0$$

を満たす。また $0 \le t \le T$ に対し $M^2(t) - [M]_t$ はマルチンゲールになる。

$[M]$ を M の **2 次変分**という。

以下では、 $(\mathcal{F}_t)$ は Lévy 過程 $z(t)$ によって生成され、 usual condition を満たすフィルトレーションとする。

次にランダム測度 $\tilde{N}$ の z 変数に関する積分を定義する。

$$I(\varphi) = \int \varphi(z)\tilde{N}((s,t] \times dz),\ I(\psi) = \int \psi(z)\tilde{N}((s,t] \times dz),$$

とおく。ここで

$$[I(\varphi), I(\psi)]_t = (t-s)\int \varphi(z)\psi(z)\mu(dz)$$

となる。ここで φ と ψ は

$$\int (|\varphi(z)|^2 + |\psi(z)|^2)\mu(dz) < +\infty.$$

なる可測関数である。

次に、$\tilde{N}$ に関する積分

$$\int\int_0^t h(s,z)\tilde{N}(dsdz)$$

は、単純可予測過程

$$h(t,z) = \sum_i \psi_i(z)1_{[t_i,t_{i+1})}(t),$$

から始めて、

$$E[\int_0^t \int |h(s,z)|^2 ds\mu(dz)] < +\infty \tag{4.15}$$

なる可測な $h(t,z)$ を単純可予測過程で近似することにより定義される。

以下のマルチンゲール表現定理がなりたつ。$m=1$ とする。

定理 4.1.2 *(Kunita-Watanabe* 表現定理 *cf. [12], [18] Theorem IV.43)* M_t を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に定義された局所 *2* 乗可積分マルチンゲールとする。可予測な *2* 乗可積分過程 $\phi(t), \psi(t,z)$ があって

$$M_t = M_0 + \int_0^t \phi(s)dW(s) + \int_0^t\int \psi(t,z)d\tilde{N}(dsdz) \tag{4.16}$$

がなりたつ。

この性質を**可予測表現性**という。
証明省略。

この定理は数理ファイナンスに応用される重要な定理であるが、証明はかなり複雑なので省略する。

上の定理からすべてのL^1-マルチンゲール(M_t)も連続変形をもつ。なぜなら連続なL^2-マルチンゲール(M_t^n)の列で(M_t)にL^1収束するものを選ぶ。M_tは右連続左極限を持つと仮定してよい。ここで$(|M_t - M_t^n|)$は劣マルチンゲールである。Doobのマルチンゲール不等式(劣マルチンゲール不等式)により

$$P(\sup_{0\le t\le T}|M_T - M_T^n| \ge \epsilon) \le \frac{1}{\epsilon}E[|M_T - M_T^n|]$$

したがって$\{(M_t^n)\}$は(M_t)に一様に確率収束する。$\{(M_t^n)\}$は連続過程だから極限過程(M_t)も連続である。

連続なL^1-マルチンゲールは局所二乗可積分マルチンゲールである。なぜなら停止時刻の列を

$$\tau_n = \inf\{t > 0; |M_t| \ge n\},$$

$$\tau_n = \infty \text{ if } \{...\} = \emptyset$$

とおく。

任意抽出定理により$M_t^n = M_{t\wedge\tau_n}$はマルチンゲールかつ$|M_t^n| \le n$が成立する。ゆえに$(M_t^n)$は$L^2$-マルチンゲールである。Kunita-Watanabe表現定理は局所二乗可積分マルチンゲールに対応するから、任意のL^1マルチンゲールも連続で定理のマルチンゲール表現をもつ。

4.2 ジャンプのある伊藤過程

$z(t)$を$\mathbf{R}^m$値のLévy過程で、Lévy測度$\mu(dz)$をもち、その特性関数ψ_tが

$$\psi_t(\xi) = E[e^{i(\xi,z(t))}] = \exp(t\int(e^{i(\xi,z)} - 1 - i(\xi,z)1_{\{|z|\le 1\}})\mu(dz)).$$

で与えられるものとする。

$$z(t) = (z_1(t), ..., z_m(t)) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^m\setminus\{0\}} z(N(dsdz) - 1_{\{|z|\le 1\}}.\mu(dz)ds),$$

とかく。ここで $N(dsdz)$ は $\mathcal{T} \times (\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ 上の平均測度 $ds \times \mu(dz)$ の Poisson ランダム測度である。Lévy 測度 μ の指数を β とする：

$$\beta = \inf\{\alpha > 0; \int_{|z|\le 1} |z|^\alpha \mu(dz) < +\infty\} \tag{4.17}$$

以下しばらく

$$\int_{\mathbf{R}^m\setminus\{0\}} |z|^2 \mu(dz) < +\infty \tag{4.18}$$

を仮定する。

次の形の確率微分方程式 (SDE) を考察する。

$$X_t = x + \int_0^t b(X_{s-})ds + \int_0^t f(X_{s-})dW(s) + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^m\setminus\{0\}} g(X_{s-}, z)\tilde{N}(dsdz). \tag{$*$}$$

以下、この形で表される確率過程を**伊藤過程**という。ここで次を仮定する:

$$|b(x)| \le K(1+|x|),\ |f(x)| \le K(1+|x|),\ |g(x,z)| \le K(z)(1+|x|),$$

$$|b(x)-b(y)| \le L|x-y|,\ |f(x)-f(y)| \le L|x-y|,$$

$$|g(x,z)-g(y,z)| \le L(z)|x-y|.$$

ここで K, L は正定数、$K(z), L(z)$ は

$$\int_{\mathbf{R}^m\setminus\{0\}} \{K^p(z) + L^p(z)\}\mu(dz) < +\infty,$$

を満たす正値関数である。たたし、 $p \ge 2$。

ここで $f(x)$ を**拡散係数**といい、$b(x)$ を**ドリフト（ずれ）係数**という。

定理 4.2.1 *x は p 次可積分とする。$b(x),\ f(x), g(x,z)$ に関する上の仮定のもとで、 SDE ($*$) は一意の解をもち、それは L^p に属す。*

証明省略

練習問題

1 $W(t)$ をウイナー過程とする。$Y(t) = \int_0^t W(s)ds$ とおく。以下をもとめよ。

(1) $E[Y(t)]$

(2) $E[Y(t)^2]$
(3) $E[Y(t)Y(s)]$

2 パラメータが λ のポアソン過程 $X(t)$ において、ジャンプ時刻を $0 < t_1 < t_2 < ...$ とし、$T_n = t_n - t_{n-1}, n \geq 1$ とおく。
(1) T_n は互いに独立で、各々パラメータ λ の指数分布をすることを示せ。
(2)$t_n = T_1 + ... + T_n$ の分布をもとめよ。

3 $\lim_{t \to 0} tW(1/t) = 0$ を示せ。

4 $p(t,x,y)$ を $t=0$ で x から出発して、時刻 y で y にいる密度関数とする。次を示せ:

$$P(W(0) = x, |W(t)| \in dy) = (p(t,x,y) + p(t,x,-y))dy$$

5 W を 1 次元 Brown 運動とすると，$\lambda \in \mathbf{R}$ に対して

$$\exp\left(\lambda W(t) - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)$$

$$\exp\left(i\lambda W(t) + \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)$$

がマルチンゲールであることを示せ．なお，複素数値確率過程がマルチンゲールとは，その実部，虚部がともにマルチンゲールということである．

6 $X(t)$ は確率微分をもち，$\mu(x) = bx + c, \sigma^2(x) = 4x$ である．$X(t) \geq 0$ と仮定して，過程 $Y(t) = \sqrt{X(t)}$ に対する確率微分を求めよ．

7 $(0,1)$ 上の過程 $X(t)$ は確率微分をもち，係数は $\sigma(x) = x(1?x)$ である．$0 < X(t) < 1$ と仮定して，

$$Y(t) = \log \frac{1 - X(t)}{X(t)}$$

で定義される過程は一定の拡散係数をもつことを示せ．

第5章　伊藤の公式

5.0.1　伊藤の公式

この節ではLévy過程に対する伊藤の公式と、その例、および証明の一部を述べる。

命題 14 *([16] Theorems 9.4, 9.5)*
(1) $X(t)$ を次で与えられる実数値過程とする：

$$X(t) = x + tc + \sigma W(t) + \int_0^t \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} \gamma(z)\tilde{N}(dsdz),\ t \geq 0$$

ここで $\gamma(z)$ は $\int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} \gamma(z)^2\mu(dz) < \infty$ なる関数である。$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を $C^2(\mathbf{R})$ 関数とし、

$$Y(t) = f(X(t))$$

とおく。このとき実数値過程 $Y(t), t \geq 0$ は次を満たす：

$$\begin{aligned} dY(t) &= \frac{df}{dx}(X(t))cdt + \frac{df}{dx}(X(t))\sigma dW(t) + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(X(t))\sigma^2 dt \\ &+ \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} [f(X(t)+\gamma(z)) - f(X(t)) - \frac{df}{dx}(X(t))\gamma(z)]\mu(dz)dt \\ &+ \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} [f(X(t-)+\gamma(z)) - f(X(t-))]\tilde{N}(dtdz),\ a.s. \end{aligned} \tag{5.01}$$

(2) $X(t) = (X^1(t), ..., X^d(t))$ を次で与えられる d 次元過程とする：

$$X(t) = x + tc + \sigma W(t) + \int_0^t \int \gamma(z)\tilde{N}(dsdz),\ t \geq 0.$$

ここで $c \in \mathbf{R}^d$, σ は $d \times m$ 行列、 $\gamma(z) = [\gamma_{ij}(z)]$ は $d \times m$ 行列値関数で上の確率積分が存在するもの、$W(t) = (W^1(t), ..., W^d(t))^T$ は m 次元標準 *Wiener* 過程とし、

$$\tilde{N}(dtdz) = (N_1(dtdz_1) - 1_{\{|z_1|<1\}}\mu(dz_1)dt, ..., N_m(dtdz_m) - 1_{\{|z_m|<1\}}\mu(dz_m)dt)$$

とする。ここで N_j は独立な *Poisson* ランダム測度で *Lévy* 測度 $\mu_j, j = 1, ..., m$ をもつものである。つまり、$X^i(t)$ は次で与えられる：

$$X^i(t) = x_i + tc_i + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} W_j(t) + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} \gamma_{ij}(z) \tilde{N}_j(dsdz_j), i = 1, ..., d.$$

$f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ を $C^2(\mathbf{R}^d)$ 関数とし、

$$Y(t) = f(X(t))$$

とおく。このとき $Y(t), t \geq 0$ は実数値確率過程であり、次を満たす：

$$dY(t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(t)) c_i dt + \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(t)) \sigma_{ij} dW_j(t)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X(t))(\sigma\sigma^T)_{ij} dt$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} [f(X(t) + \gamma^j(z_j)) - f(X(t)) - \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X(t)) \gamma_{ij}(z)] \mu_j(dz_j) dt$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} [f(X(t-) + \gamma^j(z)) - f(X(t-))] \tilde{N}_j(dtdz_j), \ a.s. \qquad (5.02)$$

ここで γ^j は $\gamma = [\gamma_{ij}]$ の第 j 成分を表す。

(3) $X(t)$ を次で与えられる 実数値過程とする：

$$dX(t) = x + c(t)dt + \sigma(t)dW(t) + \int_0^t \int \gamma(z) \tilde{N}(dsdz), \ t \geq 0.$$

ここで $c(t)$ は t に関して連続な適合過程, $\sigma(t)$ は $\mathcal{L}^*$ の元、$\gamma(z)$ は *(1)* のような関数で上の確率積分が存在するもの、$W(t)$ は 1 次元標準 *Wiener* 過程とし、

$$\tilde{N}(dtdz) = (N_1(dtdz_1) - 1_{\{|z_1|<1\}} \mu(dz_1)dt, ..., N_m(dtdz_m) - 1_{\{|z_m|<1\}} \mu(dz_m)dt)$$

とする。*($\mathcal{L}^*$ に関しては 4 章を参照。)*

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を $C^2(\mathbf{R})$ 関数とし、

$$Y(t) = f(X(t))$$

とおく。このとき実数値過程 $Y(t), t \geq 0$ は次を満たす：

$$dY(t) = \frac{df}{dx}(X(t))c(t)dt + \frac{df}{dx}(X(t))\sigma(t)dW(t) + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dx^2}(X(t))\sigma^2(t)dt$$
$$+ \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} [f(X(t)+\gamma(z)) - f(X(t)) - \frac{df}{dx}(X(t))\gamma(z)]\mu(dz)dt$$
$$+ \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} [f(X(t-)+\gamma(z)) - f(X(t-))]\tilde{N}(dtdz),\ a.s. \tag{5.03}$$

上の命題における、 $dW(t)$ および $\tilde{N}(dtdz)$ に関する確率積分の正確な定義は 4 章で述べた。

例 (1) $c = 0, \gamma(z) = 0, \sigma = 1$ そして $f(x) = x^2$ とする。このとき伊藤の公式より

$$df(W(t)) = 2W(t)dW(t) + \frac{1}{2}2dt = 2W(t)dW(t) + dt.$$

よって

$$df(W(t)) - dt = 2W(t)dW(t)$$

であり

$$\int_{\mathcal{T}} W(t)dW_t = \frac{1}{2}(W(T)^2 - T)$$

(2) $c = 0, \gamma(z) = z, \sigma = 0$ そして $f(x) = x^2$ とする。 つまり $X(t) = z(t) = \int_0^t \int z\tilde{N}(dsdz)$。$b = 0, \gamma(z) = z, \sigma = 0$ とし、$f(x) = x^2$ とする。このとき伊藤の公式より

$$df(z(t)) = \int \{(z(t)+z)^2 - z(t)^2 - 2zz(t)\}\mu(dz)dt$$
$$+ \int \{(z(t-)+z)^2 - z(t-)^2\}\tilde{N}(dtdz)$$
$$= \int z^2\mu(dz)dt + \int (2z(t-)+z)z\tilde{N}(dtdz)$$

このとき伊藤の公式より

$$df(z(t)) = \int \{(z(t)+z)^2 - z(t)^2 - 2zz(t)\}\mu(dz)dt$$
$$+ \int \{(z(t-)+z)^2 - z(t-)^2\}\tilde{N}(dtdz)$$

$$= \int z^2 \mu(dz)dt + \int (2z(t-) + z)z\tilde{N}(dtdz)$$

したがって

$$z(t)^2 = t\int z^2\mu(dz) + \int_0^t \int (2z(t-) + z)z\tilde{N}(dtdz)$$

となる。

(3) $c = 0, \gamma(z) = 0, \sigma = 1, f(x) = e^x$ とする。このとき伊藤の公式より

$$df(W(t)) = \quad e^{W(t)}dW(t) + \frac{1}{2}e^{W(t)}dt.$$

よって

$$e^{W(t)} = 1 + \int_0^t e^{W(s)}dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^t e^{W(s)}ds, a.s.$$

となる。

ここで

$$E[\int_0^T (e^{W(t)})^2 dW(t)] = \int_0^T e^{2t}dt = \frac{1}{2}(e^{2T} - 1) < \infty$$

となるから、$\{e^{W(t)}\} \in \mathcal{L}^*$ である。

(4) $X_t = W(t) - (1/2)t$ とし、$c = 0, \gamma(z) = 0, \sigma = 1, f(x) = e^x$ とする。このとき伊藤の公式より

$$e^{W(t)-(1/2)t} = 1 + \int_0^t e^{X(s)}dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^t e^{X(s)}ds$$

$$= 1 + \int_0^t e^{X(s)}dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t e^{X(s)}ds + \frac{1}{2}\int_0^t e^{X(s)}ds$$

$$= 1 + \int_0^t e^{W(s)-\frac{1}{2}s}dW(s)$$

となる。(3) と同様にして $\{e^{X(t)}\} \in \mathcal{L}^*$ であることがわかる。

右辺はマルチンゲールであるから左辺もマルチンゲールになり

$$E[e^{W(t)-(1/2)t}] = 1, t \geq 0$$

であることがわかる。これより

$$Q_T(A) = E[1_{\{A\}}e^{W(T)-(1/2)T}]$$

は $\mathcal{F}_T$ 上の確率測度になる。$Q_t, t \le T$ は $Q_s, s < t$ と整合的であり、Q_T は P と同値な確率測度になる。

(5) $d = 2, m = 1$ とし、 $c = 0, \sigma = 0, f(x, y) = xy$ とする。$X(t) = (X^1(t), X^2(2))$ はつぎで与えられるとする：

$$X^i(t) = x_i + \int_0^t \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} \gamma_{ii}(z)\tilde{N}(dsdz), i = 1, 2.$$

このとき伊藤の公式より

$$d(X_1(t)X_2(t)) = X^1(t-)dX^2(t) + X^2(t-)dX^1(t) + \int \gamma_1(z)\gamma_2(z)\mu(dz)dt$$

$$+ \int \gamma_1(z)\gamma_2(z)\tilde{N}(dtdz)$$

$$= X^1(t-)dX^2(t) + X^2(t-)dX^1(t) + \int \gamma_1(z)\gamma_2(z)N(dtdz).$$

注意 1 $W(t)$ による積分和 $\frac{df}{dx}(X(t))\sigma(t)$ について、$\frac{df}{dx}(X(t))\sigma(t)$ は発展的可測にはなるが 2 乗可積分になるとは限らない。したがって上式は

ほとんどすべての ω を固定した時、$W(t)$ に関する Lebesgue-Stieltjes 積分が収束する

という意味である。

指数型局所マルチンゲール

$$Z_t = \exp(\int_0^t f_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t f_s^2 ds) \qquad (*)$$

がマルチンゲールになるかどうかは数理ファイナンスでは重要な問題である。しかしこれを (f_t) によって判定することは難しい。よく知られた条件は $f_t(\omega)$ が (t, ω) によらず有界、つまり定数 C が存在して $|f_t(\omega)| \le C$ をみたすことである。より一般な条件として次の Novikov 条件

$$E[\exp(\frac{1}{2}\int_0^t f_s^2 ds)] < \infty, \text{ for all } t$$

がある。しかしこれも上の有界の場合以外に応用することは難しい。

(正値 (局所) マルチンゲールの指数表現)

(Z_t) を $Z_0 = 1$ をみたす連続な正値（局所）マルチンゲールであるとすると、

$$\int_0^T f_t^2 dt < \infty,\ a.s.$$

を満たす適合過程 (f_t) が存在して (Z_t) は $(*)$ によって表現できる。

このことを示すためにまず Z_t を $Z_t = Z_0 + \int_0^t \phi_s dW_s$ と表現する (マルチンゲールの表現定理)。$F(x) = \log x$ とおいて伊藤の公式を適用すると

$$\log Z_t = \int_0^t \frac{\phi_s}{Z_s} dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\phi_s^2}{Z_s^2} ds$$

$f_t = \frac{\phi_t}{Z_t}$ とおくと

$$\log Z_t = \int_0^t f_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t f_s^2 ds$$

となって、Z_t の指数表現を得る。

5.0.2 伊藤の公式 (確率積分の変換公式) の定式化と証明

変換公式の定式化

(1) $\varphi^i(\tau),\ t_0 \leqslant \tau \leqslant T;\ i = 1, 2,\ \cdots, n.$

(2) $\xi^j(\tau, \omega),\ t_0 \leqslant \tau \leqslant T,\ \omega \in \Omega;\ j = 1, 2,\ \cdots, r.$

(3) $p^k(E, \omega),\ E \in \mathcal{M}_S,\ \omega \in \Omega;\ k = 1, 2,\ \cdots, m\ \ (S = [t_0, T] \times \mathbf{R}).$

(4) $q^k(E, \omega),\ E \in \mathcal{M}_S,\ \omega \in \Omega;\ k = 1, 2,\ \cdots, m.$

これらのものは以下のような性質を満たしているとする.

(1) $\varphi^i(\tau)$ はすべて連続な単調増加関数である.

(2) $\xi^j(\tau, \omega)$ は

$$\left\{\mathbf{E}[\xi^j(t,\omega) - \xi^j(s,\omega)] = 0, \mathbf{E}\left[\left|\xi^j(t,\omega) - \xi^j(t_0,\omega)\right|^2\right] = \psi^j(t) \qquad (t_0 \leqslant s < t \leqslant T)\right\} \tag{5.1}$$

である正規加法過程である.

(3) $p^k(E,\ \omega)$ は $E \in \mathfrak{M}_S$ 上で定義された確率変数族として

(a) パラメータが

$$\Pi^k(E) = \iint_E \pi^k(\tau, u) d\tau du,\ E \in \mathfrak{M}_S \tag{5.2}$$

であるポアソン分布にしたがう. ただし, $\pi^k(\tau, u)$ は $t_0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 < \delta \leqslant |u| \leqslant N < +\infty$ で, $0 < c(\delta, N) \leqslant \pi^k(\tau, u) \leqslant d(\delta, N) < +\infty,\ k = 1,\ \cdots, m$ を満たすものである.

(b) 互いに素な $\mathfrak{M}_S$ の元 $E_1, \cdots, E_\nu$ に対して, $p^k(E_1, \omega),\ \cdots, p^k(E_\nu, \omega)$ は互いに独立であり,

(c) また, 同じ条件のもとで

$$p^k\left(\bigcup_{\alpha=1}^{\nu} E_\alpha,\ \omega\right) = \sum_{\alpha=1}^{\nu} p^k(E_\alpha,\ \omega) \tag{5.3}$$

が確率 1 で成り立つ.

(4) $E \in \mathfrak{M}_S$ に対して

$$q^k(E,\ \omega) = p^k(E,\ \omega) - \Pi^k(E),\ k = 1,\ \cdots, m.$$

であり, また次のような独立性の条件を満たす.

(5) 確率ベクトル

$$(\xi^1(\tau, \omega),\ t_0 \leqslant \tau \leqslant T),\ \cdots, (\xi^r(\tau, \omega),\ t_0 \leqslant \tau \leqslant T), \tag{5.4}$$

$$(p^1(E, \omega),\ E \in \mathfrak{M}_S),\ \cdots, (p^m(E, \omega),\ E \in \mathcal{M}_S) \tag{5.5}$$

はすべて互いに独立である.

$\varphi^i,\ \xi^j,\ p^k,\ q^k$ とともに (5.5) で構成される確率ベクトルと独立な有限次元または無限次元の確率ベクトル $\Xi_0(\omega)$ が与えられたとする.

さらに, 次のような条件を満たす関数 $a^i(\tau, \omega),\ b^i_j(\tau, \omega),\ f^i_k(\tau, u, \omega),\ t_0 \leqslant \tau \leqslant T,\ u \in \mathbf{R},\ \omega \in \Omega;\ i = 1,\ \cdots, n;\ j = 1,\ \cdots, r;\ k = 1,\ \cdots, m$ が定義されているとする.

(A) $a^i(\tau, \omega),\ b^i_j(\tau, \omega)$ はすべて (τ, ω) に関して $\mathrm{B}^1 \times \mathrm{B}$ 可測であり, $f^i_k(\tau, u, \omega)$ は (τ, u, ω) に関して $\mathrm{B}^{1+1} \times \mathrm{B}$-可測である.

(B) 任意の $t,\ t_0 \leqslant t \leqslant T$ に対して $a^i(\tau,\omega),\ b^i_j(\tau,\omega),\ f^i_k(\tau,u,\omega)$ すべてはωに関して

$$\mathrm{B}_t = \mathrm{B}(\Xi_0(\omega);\ \xi^j(\tau,\omega)-\xi^j(t_0,\omega),\ p^k(E,\ \omega);\ t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5.6}$$

$$E \subset \mathbf{R}^-(t);\ j=1,\ \cdots,r;\ k=1,\ \cdots,m) - \text{可測な} \tag{5.7}$$

関数と確率 1 で一致する.

(C) ほとんどすべてのωに対して

(C1) $\int_{t_0}^T |a^i(\tau,\omega)|d\varphi^i(\tau) < +\infty,\quad i=1,\ \cdots,n;$

(C2) $\int_{t_0}^T |b^i_j(\tau,\omega)|^2 d\psi^j(\tau) < +\infty,\quad i=1,\ \cdots,n,\ j=1,\ \cdots,r;$

(C3)

$$\int_{t_0}^T \int_{\mathbf{R}_{0,1}} |f^i_k(\tau,u,\omega)|^2 \pi^k(\tau,u)d\tau du < +\infty,$$

$$\int_{t_0}^T \int_{\mathbf{R}_{1,\infty}} |f^i_k(\tau,u,\omega)| \pi^k(\tau,u)d\tau du < +\infty, i=1,\ \cdots,n,\ k=1,\ \cdots,m.$$

ここで, $\mathbf{R}_{a,b} = (-b,b] \setminus (-a,\ a]\ (0 \leqslant a < b \leqslant +\infty)$ である.

以上のような条件のもとで, 次の確率積分が定義される.

$$\begin{aligned} X^i(t,\omega) = & \int_{t_0}^t a^i(\tau,\omega)d\varphi^i(\tau) + \sum_{j=1}^r \int_{t_0}^t b^i_j(\tau,\omega)d\xi^j(\tau,\omega) \\ & + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^t \int_{\mathbf{R}_{0,1}} f^i_k(\tau,u,\omega) q^k(d\tau \times du,\omega) \\ & + \sum_{k=1}^m \int_{t_0}^t \int_{\mathbf{R}_{1,\infty}} f^i_k(\tau,u,\omega) p^k(d\tau \times du,\omega),\quad t_0 \leqslant t \leqslant T,\ i=1,\ \cdots,n. \end{aligned} \tag{5.8}$$

容易にわかるように $X^i(t,\omega),\ t_0 \leqslant t \leqslant T$ の標本関数は確率 1 で右連続であり, ほとんどすべてのωに対して

$$X^i(t,\omega) - X^i(s,\omega) = \int_s^t a^i(\tau,\omega)d\varphi^i(\tau) + \sum_{j=1}^r \int_s^t b^i_j(\tau,\omega)d\xi^j(\tau,\omega)$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{0,1}} f_k^i(\tau,u,\omega)q^k(d\tau\times du,\omega)$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{1,\infty}} f_k^i(\tau,u,\omega)p^k(d\tau\times du,\omega), \qquad t_0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\ i=1,\ \cdots,n \tag{5.9}$$

が成り立つ.

確率積分 (5.9) に対する変換公式は次の通りである.

定理 5.0.2 (変換公式) 条件 (A), (B), (C) を仮定する. また, 次の条件が成り立つとする.

(1) 任意の $\delta>0$ に対して確率 1 で

$$\int_{t_0}^{T}\int_{\mathbf{R}_{\delta,\infty}} H(f_k^1(\tau,u,\omega),\ \cdots,f_k^n(\tau,u,\omega))\pi^k(\tau,u)d\tau du<+\infty, k=1,\ \cdots,m. \tag{5.10}$$

ここで $H(x)=H(x^1,\ \cdots,x^n)$ は非負な B 可測関数であり, x の有限区域で

$$H(x+y)\leqslant \alpha H(y)+\beta,\ y\in\mathbb{R}^n \tag{5.11}$$

を満たす定数 $\alpha,\ \beta\ (\geqslant 0)$ をもつとする.

(2) ほとんどすべての ω に対して, $\delta(\omega)>0, M(\omega)<\infty$ である確率変数 δ と M が存在して

$$|f_k^i(\tau,u,\omega)|\leqslant M(\omega),\ \ t_0\leqslant\tau\leqslant T,\ |u|\leqslant\delta(\omega), i=1,\ \cdots,n,\ k=1,\ \cdots,m. \tag{5.12}$$

このとき, $t_0\leqslant\tau\leqslant T,\ x\in\mathbb{R}^n$ で連続な偏導関数 $F_0(\tau,x)=\frac{\partial}{\partial\tau}F(\tau,x),\ F_i(\tau,x)=\frac{\partial}{\partial x^i}F(\tau,x)$,

$$F_{ij}(\tau,x)=\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}F(\tau,x);\quad i,j=1,2,\ \cdots,n \tag{5.13}$$

をもち, また適当な $c_1\geqslant 0,\ c_2\geqslant 0$ に対して

$$|F(\tau,x)|\leqslant c_1H(x)+c_2,\quad t_0\leqslant\tau\leqslant T,\ x\in\mathbb{R}^n \tag{5.14}$$

このとき、これらが成立するような任意の $F(\tau, x)$ に対して次のような関係式が成り立つ.

ほとんどすべての ω に対して

$$
\begin{aligned}
F(t, X(t)) - F(s, X(s)) = &\int_s^t F_0(\tau, X(\tau))d\tau \\
+\sum_{i=1}^n \int_s^t F_i(\tau, X(\tau))a^i(\tau)d\varphi^i(\tau) &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^r \int_s^t F_{ij}(\tau, X(\tau))b_k^i(\tau)b_k^j(\tau)d\psi^k(\tau) \\
&+\sum_{j=1}^r \int_s^t \sum_{i=1}^n F_i(\tau, X(\tau))b_j^i(\tau)d\xi^j(\tau,\omega) \\
&+\sum_{k=1}^m \int_s^t \int_{\mathbf{R}_{0,1}} \Big[F(\tau, X(\tau)+f_k(\tau,u,\omega)) - F(\tau, X(\tau)) \\
&\qquad - \sum_{i=1}^n F_i(\tau, X(\tau))f_k^i(\tau,u,\omega)\Big]\pi^k(\tau,u)d\tau du \\
+\sum_{k=1}^m \int_s^t \int_{\mathbf{R}_{0,1}} &\left[F(\tau, X(\tau)+f_k(\tau,u,\omega)) - F(\tau, X(\tau))\right] q^k(d\tau\times du,\omega) \\
+\sum_{k=1}^m \int_s^t \int_{\mathbf{R}_{1,\infty}} &\left[F(\tau, X(\tau)+f_k(\tau,u,\omega)) - F(\tau, X(\tau))\right] p^k(d\tau\times du,\omega), \\
&\qquad t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T. \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

ここで, $X(\tau) = (X^1(\tau), \cdots, X^n(\tau))$, $f_k(\tau,u,\omega) = (f_k^1(\tau,u,\omega), \cdots, f_k^n(\tau,u,\omega))$, $k = 1, \cdots, m$ を意味する.

特に, $F(\tau,x)$, $F_i(\tau,x)$, $F_{ij}(\tau,x)$ がすべて有界なら条件 (1), (2) は不要であり, π^k に対して $c \leqslant \pi^k(\tau,u) \leqslant d$ のような仮定をしなくてもよい.

条件 (5.11) を満たす関数としては, 例えば有界な非負の B 可測関数, あるいは

$$H(x) = |x|^N,\ N = 1, 2, \cdots;\ H(x) = \exp[|x|]$$

などを挙げることができる.

上で定式化した確率変数の変換公式は, 次の 3 つの段階を通して誘導することができる.

第 1 段階：$a^i(\tau,\omega)$, $b_j^i(\tau,\omega)$, $f_k^i(\tau,u,\omega)$ が $[t_0, T]\times\mathbf{R}_{\delta,N}$ $(0 < \delta,\ N < +\infty)$ で階段関数になるときの変換公式の誘導.

第 2 段階：区域 $[t_0, T] \times \mathbf{R}_{\delta,N}$ での変換公式の誘導.
第 3 段階：$S = [t_0, T] \times \mathbf{R}$ での公式 (5.15) の完全な誘導.

以上のような過程を踏んでこれから変換公式を証明する.

5.0.3　階段関数の場合

$0 < \delta < 1 < N < +\infty$ とし, $a^i(\tau, \omega), b^i_j(\tau, \omega), f^i_k(\tau, u, \omega)$ か区域 $[t_0, T] \times \mathbf{R}_{\delta,N}$ で階段関数になっている場合を考える. このとき,

$$X^i(t) - X^i(s) = \int_s^t a^i(\tau) d\varphi^i(\tau) + \sum_{j=1}^r \int_s^t b^i_j(\tau) d\xi^j(\tau, \omega) \tag{5.16}$$

$$+\sum_{k=1}^m \int_s^t \int_{\mathbf{R}_{\delta,1}} f^i_k(\tau, u) q^k(d\tau \times du, \omega)$$

$$+\sum_{k=1}^m \int_s^t \int_{\mathbf{R}_{1,N}} f^i_k(\tau, u) p^k(d\tau \times du, \omega)$$

$$= \int_s^t a^i(\tau) d\varphi^i(\tau) + \sum_{j=1}^r \int_s^t b^i_j(\tau) d\xi^j(\tau, \omega)$$

$$-\sum_{k=1}^m \int_s^t \int_{\mathbf{R}_{\delta,1}} f^i_k(\tau, u) \pi^k(\tau, u) d\tau du$$

$$+\sum_{k=1}^m \int_s^t \int_{\mathbf{R}_{\delta,N}} f^i_k(\tau, u) p^k(d\tau \times du, \omega), \quad i = 1, \ \cdots, n$$

とおくと, 次のような関係式が成り立つ. ほとんどすべての ω に対して

$$F(t, X(t)) - F(s, X(s)) \tag{5.19}$$

$$= \int_s^t F_0(\tau, X(\tau)) d\tau + \sum_{i=1}^n \int_s^t F_i(\tau, X(\tau)) a^i(\tau) d\varphi^i(\tau)$$

$$+\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \int_s^t F_{ij}(\tau, X(\tau)) b^i_k(\tau) b^j_k(\tau) d\psi^k(\tau)$$

$$+\sum_{j=1}^{r}\int_s^t\sum_{i=1}^{n}F_i(\tau,X(\tau))b_j^i(\tau)d\xi^j(\tau,\omega)$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{\delta,1}}F_i(\tau,X(\tau))f_k^i(\tau,u)\pi^k(\tau,u)d\tau du$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{\delta,N}}\left[F(\tau,X(\tau)+f_k(\tau,u))-F(\tau,X(\tau))\right]p^k(d\tau\times du,\omega),$$

$$t_0\leqslant s\leqslant t\leqslant T.$$

これからこの関係式を証明する.

5.0.4

$Y^i(\tau,\omega),\ V^i(\tau,\omega)$ を次のように定義する.

$$Y^i(t,\omega)-Y^i(s,\omega)=\int_s^t a^i(\tau,\omega)d\varphi^i(\tau)+\sum_{j=1}^{r}\int_s^t b_j^i(\tau,\omega)d\xi^j(\tau,\omega) \tag{5.20}$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{\delta,1}}f_k^i(\tau,u)\pi^k(\tau,u)d\tau du,$$

$$V^i(t,\omega)-V^i(s,\omega)=\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{\delta,N}}f_k^i(\tau,u)p^k(d\tau\times du,\omega),\quad i=1,\ \cdots,n. \tag{5.21}$$

$\xi^j(\tau,\omega),t_0\leqslant\tau\leqslant T$ は正規加法過程であるためにその標本関数は確率 1 で連続である．よって $Y^i(\tau,\omega),t_0\leqslant\tau\leqslant T$ の標本関数もほとんどすべての ω に対して連続である．また, $V^i(t,\omega),t_0\leqslant\tau\leqslant T$ の標本関数はその定義から容易にわかるように確率 1 で右連続な第一種関数である.

$a^i(\tau,\omega),\ b_j^i(\tau,\omega),\ f_k^i(\tau,u,\omega)$ はすべて階段関数であるため適当な分割 $s=t_0<t_1<\cdots<t_\alpha=t,\ \widetilde{\mathbf{R}}_{\delta,1}=A_1\cup\cdots\cup A_\beta,\ \widetilde{\mathbf{R}}_{1,N}=A_{\beta+1}\cup\cdots\cup A_r$ が存在して

$$a^i(\tau,\omega)=a^i(t_{\mu-1},\ \omega),\ t_{\mu-1}\leqslant\tau<t_\mu,\quad \mu=1,\ \cdots,\alpha\ (i=1,\ \cdots,n), \tag{5.22}$$

$$b_j^i(\tau,\omega)=b_j^i(t_{\mu-1},\ \omega),\quad t_{\mu-1}\leqslant\tau<t_\mu, \tag{5.23}$$

$$f_k^i(\tau, u, \omega) = f_k^i(t_{\mu-1},\ u_\nu,\ \omega),\quad t_{\mu-1} \leqslant \tau < t_\mu,\ u \in A_\nu, \tag{5.24}$$

$$\mu = 1,\ \cdots, \alpha,\ \nu = 1,\ \cdots, r\quad (i = 1,\ \cdots, n,\ k = 1,\ \cdots, m)$$

となる. ここで$\widetilde{\mathbf{R}}_{a,b}$は$\mathbf{R}_{a,b}$と同じ端点をもつ左半閉区間を意味し, $A_1,\ \cdots, A_r$は互いに素な左半閉区間, u_ν は A_ν の左端点を表す.

区間 $[s,t]$ を固定する. 媒介小区間 $[t_\mu, t_{\mu+1}]$ をすべて p 等分し, その分点を$t_{\mu p} = t_\mu + \frac{p}{\rho}(t_{\mu+1} - t_\mu),\ p = 0, 1,\ \cdots, \rho\ (\mu = 0, 1,\ \cdots, \alpha - 1)$と表す. すると

$$F(t, X(t)) - F(s, X(s)) = \sum_{\mu=0}^{\alpha-1} \sum_{p=1}^{\rho} \left[F(t_{\mu p}, X(t_{\mu p})) - F(t_{\mu p-1}, X(t_{\mu p-1}))\right] \tag{5.25}$$

$:= \mathrm{S}_1(\rho) + S_2(\rho) + S_3(\rho)$ と表すことができる. ただし,

$$S_1(\rho) = \sum_{\mu} \sum_{p} \left[F(t_{\mu p}, X(t_{\mu p})) - F(t_{\mu p-1}, X(t_{\mu p}))\right], \tag{5.26}$$

$$S_2(\rho) = \sum_{\mu} \sum_{p} \left[F(t_{\mu p-1}, X(t_{\mu p-1}) + \Delta Y(t_{\mu p-1})) - F(t_{\mu p-1}, X(t_{\mu p-1}))\right], \tag{5.27}$$

$$S_3(\rho) = \sum_{\mu} \sum_{p} \left[F(t_{\mu p-1}, Y(t_{\mu p}) + V(t_{\mu p})) - F(t_{\mu p-1}, Y(t_{\mu p}) + V(t_{\mu p-1}))\right] \tag{5.28}$$

である.

ここで$Y(t) = (Y^1(t),\ \cdots, Y^n(t)), V(t) = (V^1(t),\ \cdots, V^n(t)), \Delta Y(t_{\mu p-1}) = Y(t_{\mu p}) - Y(t_{\mu p-1})$. 以降, 同様の表記法として $\Delta V(t_{\mu p-1}) = V(t_{\mu p}) - V(t_{\mu p-1})$, $\Delta t_{\mu p-1} = t_{\mu p} - t_{\mu p-1}$ として表すことにする.

$\rho \to \infty$ のとき, $S_1(\rho),\ S_2(\rho),\ S_3(\rho)$ の極限を計算しよう.

5.0.5

まず, 等式

$$\lim_{\rho\to\infty} S_1(\rho) = \int_s^t F_0(\tau, X(\tau))d\tau \quad \text{a.s..} \tag{5.29}$$

を証明する. これは以下のように示される.

$F(t + \Delta t, x) - F(t, x) = F_0(t + \theta\Delta t, x)\Delta t,\ 0 < \theta < 1$ と表されるから

$$S_1(\rho) = \sum_\mu \sum_\rho F_0(t_{\mu p-1} + \theta_{\mu p-1}\Delta t_{\mu p-1},\ X(t_{\mu p}))\Delta t_{\mu p-1} \tag{5.30}$$

$$= \sum_\mu \sum_\rho F_0(t_{\mu p}, X(t_{\mu p}))\Delta t_{\mu p-1} \ = \sum_\mu \sum_\rho \varepsilon_{\mu p-1}\Delta t_{\mu p-1}, \quad 0 < \theta_{\mu p-1} < 1;$$

$$\varepsilon_{\mu p-1} = F_0(t_{\mu p-1} + \theta_{\mu p-1}\Delta t_{\mu p-1},\ X(t_{\mu p})) - F(t_{\mu p},\ X(t_{\mu p})). \tag{5.31}$$

$F_0(\tau,\omega)$ が連続であること, $X^i(\tau,\omega),\ s \leqslant \tau \leqslant t$ の標本関数が確率 1 で有界であることより

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup_{\mu,p} |\varepsilon_{\mu,p-1}| = 0 \quad \text{a.s.} \tag{5.32}$$

である. よって

$$\lim_{\rho\to\infty} \left| \sum_\mu \sum_\rho \varepsilon_{\mu p-1}\Delta t_{\mu p-1} \right| \leqslant (t-s) \lim_{\rho\to\infty} \sup_{\mu,p} |\varepsilon_{\mu p-1}| = 0 \quad \text{a.s..} \tag{5.33}$$

一方, $\psi_\rho(\tau) = t_{\mu p},\ t_{\mu p-1} < \tau \leqslant t_{\mu p},\ p = 1,\ \cdots, \rho,\ \mu = 0,\ \cdots, \alpha-1$ とおくと $|\psi_\rho(\tau) - \tau| \leqslant \frac{t-s}{\rho} \to 0,\ (\rho \to \infty)$ であり,

$$\sum_\mu \sum_\rho F_0(t_{\mu p}, X(t_{\mu p}))\Delta t_{\mu p-1} = \int_s^t F_0(\psi_\rho(\tau), X(\psi_\rho(\tau)))d\tau \tag{5.34}$$

が成り立つ. 容易に検討できるように積分記号のもとで極限をとることが可能なので

$$\lim_{\rho\to\infty} \sum_\mu \sum_p F_0(t_{\mu p}, X(t_{\mu p}))\Delta t_{\mu p-1} = \int_s^t F_0(\tau, X(\tau))d\tau \quad \text{a.s..} \tag{5.35}$$

(5.31), (5.33), (5.35) から (5.29) が得られる.

以下、$S_2(\rho), S_3(\rho)$ については省略。

5.0.6　区域 $(s,t] \times \mathbf{R}_{\delta,N}$ での変換公式

この節では, a^i, b^i_j, f^i_k が区域 $(t_0, T] \times \mathbf{R}_{\delta,N}$ で条件 (C) を満たす一般的な場合において前節で得られた結果を拡張する.

a^i, b^i_j, f^i_k が満たすべき条件として, 次のようなものが挙げられる.

1) $a^i(\tau,\omega),\ t_0 \leqslant \tau \leqslant T,\ \omega \in \Omega;\ i=1,\ \cdots,n$ は第 1 節の条件 (A), (B) を満たすとともに確率 1 で

$$\int_{t_0}^{T} |a^i(\tau,\omega)| d\varphi^i(\tau) < +\infty,\ i=1,\ \cdots,n. \tag{5.36}$$

2) $b^i_j(\tau,\omega),\ t_0 \leqslant \tau \leqslant T,\ \omega \in \Omega;\ i=1,\ \cdots,n,\ j=1,\ \cdots,r$ も第 1 節の条件 (A), (B) を満たし, 確率 1 で

$$\int_{t_0}^{T} |b^i_j(\tau,\omega)|^2 d\psi^j(\tau) < +\infty,\ i=1,\ \cdots,n,\ j=1,\ \cdots,r. \tag{5.37}$$

3) $f^i_k(\tau,u,\omega),\ t_0 \leqslant \tau \leqslant T,\ u \in \mathbf{R}_{\delta,N},\ \omega \in \Omega;\ i=1,\ \cdots,n,\ k=1,\ \cdots,m$ も第 1 節の条件 (A), (B) を満たし, 確率 1 で次の関係式が成り立つ.

$$\int_{t_0}^{T} \int_{\mathbf{R}_{\delta,N}} |f^i_k(\tau,u,\omega)| \pi^k(\tau,u) d\tau du < +\infty,\ i=1,\ \cdots,n,\ k=1,\ \cdots,m; \tag{5.38}$$

$$\int_{t_0}^{T} \int_{\mathbf{R}_{\delta,N}} H(f^1_k(\tau,u,\omega),\ \cdots,f^n_k(\tau,u,\omega)) \pi^k(\tau,u) d\tau du < +\infty,\ k=1,\ \cdots,m. \tag{5.39}$$

ここで H は条件 (5.11) を満たす関数である.

以上のような条件の下で確率積分

$$X^i(t) - X^i(s) = \int_s^t a^i(\tau) d\varphi^i(\tau) + \sum_{j=1}^{r} \int_s^t b^i_j(\tau) d\xi^j(\tau,\omega) \tag{5.40}$$

$+ \sum_{k=1}^{m} \int_s^t \int_{\mathbf{R}_{\delta,1}} f^i_k(\tau,u) q^k(d\tau \times du,\omega)\ + \sum_{k=1}^{m} \int_s^t \int_{\mathbf{R}_{1,N}} f^i_k(\tau,u) p^k(d\tau \times du,\omega),\ i=1,\ \cdots,n$ が定義される.

$F(\tau,x),\ t_0 \leqslant \tau \leqslant T,\ x \in \mathbb{R}^n$ を条件 (5.13), (5.14) を満たす関数とすると次のような変換公式が成立する. 確率 1 で

$$F(t,X(t)) - F(s,X(s)) = \int_s^t F_0(\tau,X(\tau)) d\tau + \sum_{i=1}^{n} \int_s^t F_i(\tau,X(\tau)) a^i(\tau) d\varphi^i(\tau) \tag{5.41}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\int_s^t F_{ij}(\tau, X(\tau))b_k^i(\tau)b_k^j(\tau)d\psi^k(\tau) \tag{5.42}$$

$+\sum_{j=1}^r\int_s^t\sum_{i=1}^n F_i(\tau, X(\tau))b_j^i(\tau)d\xi^j(\tau,\omega)$ - $\sum_{k=1}^m\sum_{i=1}^n\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{\delta,1}} F_i(\tau, X(\tau))f_k^i(\tau,u)\pi^k(\tau,u)$
$+\ \sum_{k=1}^m\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{\delta,N}}\left[F(\tau,\ X(\tau)+f_k(\tau,u))-F(\tau,X(\tau))\right]p^k(d\tau\times du,\omega),$

$$t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T.$$

この節では, 上述の変換公式を証明する.
詳細は省略。

5.0.7　一般的な変換公式

この節では 第 1 節で定式化した変換公式の証明を完結する.

$a^i(\tau,\omega), b_j^i(\tau,\omega), f_k^i(\tau,u,\omega)$ が第 1 節の条件 (A), (B), (C) および定理の仮定 (1), (2) を満たしているため, 任意の $\delta, N > 0$ に対して前節の条件 (5.36), (5.37), (5.38) および (5.39) が成り立つ.

したがって, N を自然数とし

$$X_N^i(t)-X_N^i(s)=\ \int_s^t a^i(\tau)d\varphi^i(\tau)+\sum_{j=1}^r\int_s^t b_j^i(\tau)d\xi^j(\tau,\omega)$$

$$+\sum_{k=1}^m\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{\frac{1}{N},1}} f_k^i(\tau,u)q^k(d\tau\times du,\omega)$$

$$+\sum_{k=1}^m\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{1,N}} f_k^i(\tau,u)p^k(d\tau\times du,\omega),\ i=1,\ \cdots,n$$

とすると, 前節の結果より確率 1 で

$$F(t,\ X_N(t))-F(s,X_N(s))$$

$$=\int_s^t F_0(\tau,X_N(\tau))d\tau+\sum_{i=1}^n\int_s^t F_i(\tau,X_N(\tau))a^i(\tau)d\varphi^i(\tau)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\int_s^t F_{ij}(\tau,X_N(\tau))b_k^i(\tau)b_k^j(\tau)d\psi^k(\tau)$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\int_s^t F_i(\tau,X_N(\tau))b_j^i(\tau)d\xi^j(\tau,\omega)\\
&-\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{\frac{1}{N},1}} F_i(\tau,X_N(\tau))f_k^i(\tau,u)\pi^k(\tau,u)d\tau du\\
&+\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{\frac{1}{N},N}}[F(\tau,X_N(\tau)+f_k(\tau,u))\\
&\qquad -F(\tau,X_N(\tau))]\,p^k(d\tau\times du,\omega)\\
&=\int_s^t F_0(\tau,X_N(\tau))d\tau+\sum_{i=1}^{n}\int_s^t F_i(\tau,X_N(\tau))a^i(\tau)d\varphi^i(\tau)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}\int_s^t F_{ij}(\tau,X_N(\tau))b_k^i(\tau)b_k^j(\tau)d\psi^k(\tau)\\
&+\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\int_s^t F_i(\tau,X_N(\tau))b_j^i(\tau)d\xi^j(\tau,\omega)\\
&+\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{\frac{1}{N},N}}[F(\tau,X_N(\tau)+f_k(\tau,u))\\
&-F(\tau,X_N(\tau))-\sum_{i=1}^{n}F_i(\tau,X_N(\tau))f_k^i(\tau,u)]\pi^k(\tau,u)d\tau du\\
&+\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{\frac{1}{N},1}}[F(\tau,X_N(\tau)+f_k(\tau,u))-F(\tau,X_N(\tau))]\,q^k(d\tau\times du,\omega)\\
&+\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{1,N}}[F(\tau,X_N(\tau)+f_k(\tau,u))-F(\tau,X_N(\tau))]\,p^k(d\tau\times du,\omega),
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

$$t_0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\ N=1,2,\ \cdots.$$

この式で $N\to\infty$ として極限をとると (5.15) が得られることを示せば定理の証明が終わる.

証明終

5.1　変換公式の適用の実例

この節では, これまで得た変換公式を用いて確率積分の形で与えられた加法過程の特性関数と確率積分の高次モーメントを評価する実例を考察する.

5.1.1

次のような加法過程が与えられたとする.

$$
\begin{aligned}
X^l(t) - X^l(s) = & \int_s^t a^l(\tau) d\varphi^l(\tau) + \sum_{j=1}^r \int_s^t b_j^l(\tau) d\xi^j(\tau, \omega) \\
& + \sum_{k=1}^m \int_s^t \int_{\mathbf{R}_{0,1}} f_k^l(\tau, u) q^k(d\tau \times du, \omega) \\
& + \sum_{k=1}^m \int_s^t \int_{\mathbf{R}_{1,\infty}} f_k^l(\tau, u) p^k(d\tau \times du, \omega),\ l = 1,\ \cdots, n. \qquad (5.44)
\end{aligned}
$$

ここで $a^l(\tau),\ b_j^l(\tau),\ f_k^l(\tau, u)$ は $t_0 \leqslant \tau \leqslant T,\ u \in \mathbf{R}$ で定義された関数として次の条件を満たすものである.

1) $a^l(\tau),\ b_j^l(\tau)$ は有界な B-可測関数である.

2) $f_k^l(\tau, u)$ は τ, u に関して B-可測で u の原点の近傍で有界となり, u に関する積分

$$
\int_{\mathbf{R}_{0,1}} \left| f_k^l(\tau, u) \right|^2 \pi^k(\tau, u) d\tau du, \quad \int_{\mathbf{R}_{1,\infty}} \left| f_k^l(\tau, u) \right| \pi^k(\tau, u) d\tau du \qquad (5.45)
$$

l $= 1, \cdots, n,\ k = 1,\ \cdots, m$ はすべて τ に関して $[t_0, T]$ で有界である.

さらに $\varphi^l(\tau),\ \xi^j(\tau, \omega),\ p^k(E, \omega), q^k(E, \omega)$ はすべて第 1 節で導入したものであるとする.

容易にわかるように (5.44) で定義された $X^l(\tau, \omega), t_0 \leqslant \tau \leqslant T$ は加法過程であり, その標本関数は確率 1 で右連続な第一種関数である. ここでは

$$
X(t, \omega) - X(s, \omega) = (X^1(\tau, \omega) - X^1(s, \omega),\ \cdots, X^n(t, \omega) - X^n(s, \omega))
$$

の特性関数を求める.

ます, 次の補題を証明する.

補題 5.1.1 $\theta^1(\tau),\ \cdots,\theta^N(\tau),\ t_0\leqslant\tau\leqslant T$ は単調増加する連続関数で, $A^1(\tau),\cdots,A^N(\tau),\ t_0\leqslant\tau\leqslant T$ はすべて有界な複素数値 B-可測関数であるとする. このとき,

$$F(s,t)=\exp\left(\sum_{l=1}^{N}\int_s^t A^l(\tau)d\theta^l(\tau)\right),\quad t_0\leqslant s\leqslant t\leqslant T \tag{5.46}$$

は, 方程式

$$F(s,t)=1+\sum_{l=1}^{N}\int_s^t A^l(\tau)F(s,\tau)d\theta^l(\tau) \tag{5.47}$$

の一意的な解となる.

証明 $\theta(\tau)=\sum_{l=1}^{N}\theta^l(\tau)$ とすると $\theta(\tau),t_0\leqslant t\leqslant T$ は単調増加な連続関数であり, 各々の θ^l は θ に関して絶対連続である. よって, ラドン-ニコディムの定理より非負の B-可測関数 $B^l(\tau)$ が存在して $\theta^l(t)-\theta^l(s)=\int_s^t B^l(\tau)d\theta(\tau),\ t_0\leqslant s\leqslant t\leqslant T;\ l=1,\ \cdots,N$ が成り立つ. そして常に θ の測度の値は θ^l の測度の値より小さくないため, ほとんどすべての τ に対して $B^l(\tau)\leqslant 1$ が成り立つ. よって

$$\sum_{l=1}^{N}\int_s^t A^l(\tau)d\theta^l(\tau)=\int_s^t\left(\sum_{l=1}^{N}A^l(\tau)B^l(\tau)\right)d\theta^l(\tau)=\int_s^t C(\tau)d\theta(\tau) \tag{5.48}$$

となり, 方程式 (5.47) は

$$F(s,t)=1+\int_s^t\left(\sum_{l=1}^{N}A^l(\tau)B^l(\tau)\right)F(s,\tau)d\theta^l(\tau) \tag{5.49}$$

$=1+\int_s^t C(\tau)F(s,\tau)d\theta(\tau)$ として単純化される.

$$G(t)-G(s)=\int_s^t C(\tau)d\theta(\tau) \tag{5.50}$$

とし, 前で誘導した変換公式を用いると (この場合は $b_j^l,\ f_k^l$ がすべて 0 となる特殊な場合である) $\exp\left(G(t)-G(s)\right)-1=\int_s^t\exp\left(G(\tau)-G(s)\right)C(\tau)d\theta(\tau)$.

よって F(s, t) $=\exp\left(G(t)-G(s)\right)=\exp\left(\sum_{l=1}^{N}\int_s^t A^l(\tau)d\theta^l(\tau)\right)$ は方程式 (5.1.1), したがって方程式 (5.47) の解となる.

次に (5.46) が方程式 (5.47) の一意的な解であることを示す．(5.47) の右辺は t に関して連続であるから, 解は常に t に関して区間 $s \leqslant t \leqslant T$ で連続となる．

(5.47) の任意の 2 つの解を $F_1(s,t), F_2(s,t)$ とするとき, $F_1(s,t) \equiv F_2(s,t),\ t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ であることを言えば証明が終わる．

任意の s を固定し, $\sup_{s\leqslant t\leqslant T} |F_1(s,t) - F_2(s,t)| = K$ とする．$A^l(\tau)$ はすべて有界であるから $|A^l(\tau)| \leqslant D,\ l = 1,\ \cdots, N$ である定数 D が存在する．そして F_1, F_2 はすべて (5.47) の解であるから $\mathrm{F}_1(s,t) - F_2(s,t) = \sum_{l=1}^N \int_s^t A^l(\tau)[F_1(s,\tau) - F_2(s,\tau)]d\theta^l(\tau),\quad s \leqslant \tau \leqslant T.$

したがって, 次のような評価式が成り立つ．

$$|F_1(s,t) - F_2(s,t)| \leqslant DK(\theta(t) - \theta(s));$$

$$\begin{aligned}|F_1(s,t) - F_2(s,t)| &\leqslant KD^2 \int_s^t (\theta(t) - \theta(s))d\theta(\tau)\\ &= K\frac{D^2[\theta(t) - \theta(s)]^2}{2!}.\end{aligned}$$

一般的に

$$\begin{aligned}|F_1(s,t) - F_2(s,t)| &\leqslant K\frac{D^k[\theta(t) - \theta(s)]^k}{k!}\\ &\leqslant K\frac{D^k[\theta(T) - \theta(t_0)]^k}{k!} \longrightarrow 0, \quad k \to \infty\end{aligned}$$

となり, $F_1(s,t) \equiv F_2(s,t),\ s \leqslant t \leqslant T$ であることがわかる．s は任意であるから F_1, F_2 は完全に一致し, したがって (5.47) の解はただ一つである．
証明終

特性関数を求める前に次のような事実を指摘しておく．確率積分を定義するときには被積分関数が実数の値をとることを念頭においていた．複素数の値をとる場合には被積分関数をその実数部と虚数部の積分の和の形として定義する．このとき, 前で示された性質と変換公式がこの場合にも保たれることを検討することができる．

加法過程 (5.44) の特性関数を求める．虚数単位を $i = \sqrt{-1}$ と表し, 2 つのベクトル $x = (x^1,\ \cdots, x^n),\ y = (y_1,\ \cdots, y_n)$ の内積を $(y,x) = \sum_{l=1}^n y_l \cdot x^l$ と表そう．そして $X(t,\omega) - X(s,\omega)$ の特性関数を

$$F(s,t;y) = \mathbf{E}\left[\exp\left(i(y, X(t,\omega) - X(s,\omega))\right)\right]$$

とする．このとき, 次の定理が成り立つ．

定理 5.1.1 条件 1), 2) の下で, 関係式 *(5.44)* より決定される n 次元加法過程の特性関数は

$$F(s,t;y)=\exp\left[i\int_s^t (y,a(\tau)d\varphi(\tau))-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\int_s^t (y,b_k(\tau))^2 d\psi^k(\tau)\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{0,1}}\{\exp[i(y,f_k(\tau,u))]-1-i(y,f_k(\tau,u))\}\,\pi^k(\tau,u)d\tau du$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{1,\infty}}\{\exp[i(y,f_k(\tau,u))]-1\}\,\pi^k(\tau,u)d\tau du \qquad (5.51)$$

である.

証明仮定より変換公式の適用条件がすべて成り立つ. このことより

$$\exp(i(y,\ X(t)-X(s)))-1=i\int_s^t \exp(i(y,X(\tau)-X(s)))(y,a(\tau)d\varphi(\tau))$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\int_s^t \exp(i(y,X(\tau)-X(s)))(y,b_k(\tau))^2 d\psi^k(\tau)$$

$$+i\sum_{k=1}^{r}\int_s^t \exp(i(y,X(\tau)-X(s)))(y,b_k(\tau))d\xi^k(\tau,\omega)$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{0,1}} \exp(i(y,X(\tau)-X(s)))\ \cdot[\exp(i(y,f_k(\tau,u)))-1-i(y,f_k(\tau,u))]\pi^k(\tau,u)d\tau du$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{0,1}} \exp(i(y,X(\tau)-X(s)))[\exp(i(y,f_k(\tau,u)))-1]q^k(d\tau\times du,\omega)$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{1,\infty}} \exp(i(y,X(\tau)-X(s)))[\exp(i(y,f_k(\tau,u)))-1]p^k(d\tau\times du,\omega)$$

が成り立つ.

両辺の期待値をとると

$$F(s,t;y)-1=i\int_s^t F(s,\tau;y)(y,a(\tau)d\varphi(\tau))-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r}\int_s^t F(s,\tau;y)(y,b_k(\tau))^2 d\psi^k(\tau)$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{0,1}} F(s,\tau;y)\cdot[\exp(i(y,f_k(\tau,u)))-1-i(y,f_k(\tau,u))]\pi^k(\tau,u)d\tau du$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{1,\infty}}F(s,\tau;y)[\exp(i(y,f_k(\tau,u)))-1]\pi^k(\tau,u)d\tau du. \qquad (5.52)$$

ところで, これは (5.47) のような形の積分方程式である. $A^l(\tau)$ 該当する関数は $iy_la^l(\tau),\ l=1,\cdots,n;\ -\frac{1}{2}(y,b_k(\tau))^2, k=1,\cdots,r;$

$$\int_{\mathbf{R}_{0,1}}[\exp(i(y,f_k(\tau,u)))-1-i(y,f_k(\tau,u))]\pi^k(\tau,u)du,\quad k=1,\ \cdots,m;$$

$$\int_{\mathbf{R}_{1,\infty}}[\exp(i(y,f_k(\tau,u)))-1]\pi^k(\tau,u)du,\quad k=1,\ \cdots,m$$

などである.

これらのうち最初の 2 つが有界であることは明らかである. 最後の 2 つの積分が τ に関して有界であることを示す. z を実数とすると

$$\left|e^{iz}-1\right|=\left|\int_0^z e^{i\theta}d\theta\right|\leqslant|z|,$$

$$\left|e^{iz}-1-iz\right|=\left|\int_0^z(e^{i\theta}-1)d\theta\right|\leqslant\left|\int_0^z|\theta|d\theta\right|=\frac{|z|^2}{2}$$

であるから

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbf{R}_{0,1}}[\exp(i(y,f_k(\tau,u))]-1-i(y,f_k(\tau,u))]\pi^k(\tau,u)du\right|\\&\qquad\leqslant\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}_{0,1}}|(y,f_k(\tau,u))|^2\,\pi^k(\tau,u)du\\&\qquad\leqslant\frac{1}{2}|y|^2\cdot\sum_{l=1}^{n}\int_{\mathbf{R}_{0,1}}\left|f_k^l(\tau,u)\right|^2\pi^k(\tau,u)du;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbf{R}_{1,\infty}}[\exp(i(y,f_k(\tau,u)))-1-i(y,f_k(\tau,u))]\pi^k(\tau,u)du\right|\\&\qquad\leqslant\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}_{1,\infty}}|(y,f_k(\tau,u))|\,\pi^k(\tau,u)du\\&\qquad\leqslant\sum_{l=1}^{n}\left|y^l\right|\cdot\int_{\mathbf{R}_{1,\infty}}\left|f_k^l(\tau,u)\right|\pi^k(\tau,u)du.\end{aligned}$$

よって, 条件 2) よりこれらは τ に関して有界となる.

方程式 (5.52) を解くと補題 5.1.1 により解が一意的に決定されるが, その解は (5.51) に他ならない. 証明終

(5.44) の特殊な場合として, $\varphi(\tau) \equiv \tau,\ \xi(\tau,\omega) \equiv w(\tau,\omega)$ はウィーナー過程, $\pi(\tau,u) = \frac{1}{u^2},\ u \in \mathbf{R}^1$ となる 1 次元加法過程

$$X(t) - X(s) = \int_s^t a(\tau)d\tau + \int_s^t b(\tau)dw(\tau,\omega)$$

$$+ \int_s^t \int_{|u|\leqslant 1} f(\tau,u)q(d\tau \times du,\omega) + \int_s^t \int_{|u|>1} f(\tau,u)p(d\tau \times du,\omega)$$

の特性関数の対数は

$$\Phi(s,t;y) = \log F(s,t;y) = \int_s^t \left(iya(\tau) - \frac{y^2}{2}b^2(\tau) \right) d\tau$$

$$+ \int_s^t \int_{|u|\leqslant 1} \left(e^{iyf(\tau,u)} - 1 - iyf(\tau,u)\right) \frac{du}{u^2}d\tau + \int_s^t \int_{|u|>1} \left(e^{iyf(\tau,u)} - 1\right) \frac{du}{u^2}d\tau$$

となる.

特に, $a(\tau),\ b(\tau),\ f(\tau,u)$ がすべて τ に関係なく一定である場合には, Φ が差 $t-s$ のみに関係し,

$$\Phi(s,t;y) = \Phi(t-s;y) = (t-s)\left[\left(iay - \frac{b^2}{2}y^2\right)\right.$$

$$+ \int_{|u|\leqslant 1} \left\{e^{iyf(\tau,u)} - 1 - iyf(\tau,u)\right\} \frac{du}{u^2}$$

$$\left. + \int_{|u|>1} \left\{e^{iyf(\tau,u)} - 1\right\} \frac{du}{u^2}.\right.$$

これは無限分解可能な分布の特性関数の対数に対する表示式の 1 つに他ならない.

5.1.2

変換公式を適用する他の実例として確率積分の高次モーメントを評価する問題を考える.

$\xi(\tau,\omega),\ t_0 \leqslant \tau \leqslant T$ を正規加法過程とし,

$$\mathbf{E}[\xi(t)-\xi(s)]=0, \quad \mathbf{E}\left[|\xi(t)-\xi(s)|^2\right]=\psi(t)-\psi(s)$$ する.そして

p(E, ω) は

$$\mathbf{E}[p(E,\omega)]=\int\int_E \pi(\tau,u)d\tau du \tag{5.54}$$

であり, 第1節の条件 (3) を満たすポアソン場とし,

$$q(E,\omega)=p(E,\omega)-\mathbf{E}[p(E,\omega)] \tag{5.55}$$

とする.

関数 $b(\tau,\omega),\ f(\tau,u,\omega),\ q(\tau,u,\omega)$ はそれぞれ $\xi(\tau,\omega),\ p(E,\omega),\ q(E,\omega)$ に関する積分が定義される関数族に属するとする. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 5.1.2　1) $\int_s^t \boldsymbol{E}[|b(\tau,\omega)|^n]d\psi(\tau)<+\infty$ ならば

$$\boldsymbol{E}\left[\left|\int_s^t b(\tau,\omega)d\xi(\tau,\omega)\right|^n\right] \leqslant c(\psi(t)-\psi(s))^{\frac{n}{2}-1}\cdot\int_s^t \boldsymbol{E}\left[|b(\tau,\omega)|^n\right]d\psi(\tau). \tag{5.56}$$

2) $\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{1,\infty}} \boldsymbol{E}[|f(\tau,u,\omega)|^n]\pi(\tau,u)d\tau du<+\infty$ が成り立つならば

$$\boldsymbol{E}\left[\left|\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{1,\infty}} f(\tau,u,\omega)p(d\tau\times du,\omega)\right|^n\right] \tag{5.57}$$

$\leqslant c_1\int_s^t\int_{\mathbf{R}_{1,\infty}} \boldsymbol{E}\left[|f(\tau,u,\omega)|^n\right]\pi(\tau,u)d\tau du.$

3) $|g(\tau,u,\omega)| \leqslant G(\tau,u)Y(\tau,\omega),\ t_0\leqslant\tau\leqslant T,\ u\in\mathbf{R}_{0,1}$ で $G(\tau,u)$ は有界で

$$\sup_{s\leqslant\tau\leqslant t}\int_{\mathbf{R}_{1,\infty}} G^2(\tau,u)\pi(\tau,u)du<+\infty \tag{5.58}$$

を満たしているとする. さらに, $Y(\tau,\omega)$ に対しては $Y(\tau,\omega)\leqslant Y(\omega),\ t_0\leqslant\tau\leqslant T$ となる確率変数 $Y(\omega)$ が存在するとする $(Y(\tau,\omega)$ は τ,ω に関して可測であり, τ を固定するとき ω に関して $B_\tau(p)$ 可測である$)$.
このとき,

$$\int_s^t \boldsymbol{E}\left[|Y(\tau,\omega)|^{2n}\right]d\tau<+\infty$$ らば

$$\boldsymbol{E}\left[\left|\int_s^t \int_{\mathbf{R}_{0,1}} g(\tau,u,\omega)q(d\tau\times du,\omega)\right|^{2n}\right] \leqslant c_2 \int_s^t \boldsymbol{E}\left[|Y(\tau,\omega)|^{2n}\right] d\tau \quad (5.60)$$

が成り立つ. ただし, c, c_1, c_2 はすべて $n=1,2,\cdots,$ にのみ関係する定数である.

(証明省略)

第6章　損害保険数理

6.0.3　サープラス過程

S_t を、複合ポアソン過程

$$S_t = \sum_{i=1}^{N}(t)X_i$$

$$E[N(t)] = \lambda t, E[X_i] = \mu$$

とするとき $U_t = u_0 + (1+\theta)\lambda\mu t - S_t$ を**サープラス過程**という。このとき $E(U_t) = E(u_0 + P_t - S_t) = u_0 + (1+\theta)\lambda\mu t - \lambda\mu t = u_0 + \theta\lambda\mu t$ である。

定義 6.0.1 ポートフォリオ*:* 破産するかしないかが問題となる主体
サープラス U_t*:* もし時刻 t にポートフォリオの契約がすべて終了したとしたら残るはずの余剰金
破産*:* 資本が負になること。$U_t < 0$ になること
安全割増率 θ*:* 保険会社が支払い不可能状態にならないために保険料に上乗せする割合
存続確率 ϕ*:* 下に定義している

とする。

以下、**ルンドベリモデル**を用いて存続確率を考えていく。ルンドベリモデルとは前提をかなり単純にしたモデルである。

ルンドベリモデルにおいては、**サープラス**

$$U_t = U_0 + P_t - S_t$$

の各項は
$U_0 = u_0$　(非負の定数)
$P_t = c\lambda t$　(c は単位時間当たりの保険料を表す正の定数)

$S_t = \sum_{n=1}^{N_t} X_n \qquad (N_t$はポアソン過程$, t \geq 0, X_n$を N_tに独立な同分布列)
である。ただし、$\{S_t\}$ は複合ポアソン過程である

また、**クレーム件数過程**（ポアソン過程）N_t のパラメータを λ、個々のクレーム額の期待値を $E(X)$ を μ とすると、このモデルにおける単位時間当たりの保険料は $\lambda\mu$ である。さらに、純保険料に対して、純保険料の $\theta(>0)$ 倍を上乗せすれば、

$$c = (1+\theta)\lambda\mu$$

となる。結局ルンドベリモデルは $U_t = u_0 + (1+\theta)\lambda\mu t - S_t$

サープラス U_t が過去最低額を更新した時、**欠損を発生した**という。この θ を**安全割り増し**という。

クレーム総額分布

定義 6.0.2 確率過程 X_t において、任意の $t_1 < \cdots < t_n < t$ について、

$$E(X_t | X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) = X_{t_n} \tag{6.1}$$

が成り立つとき X_t は**マルチンゲール**であるという。

したがって、確率過程 e^{-RU_t} 　がマルチンゲールであるということは、
$E(e^{-RU_t}|U_\tau) = e^{-RU_\tau} \qquad (t \geq \tau)$
ということを意味する。

ここで、$E(e^{-RU_t})$ が t によらず一定の値とになるということは、特に $t=0$ の場合に注目すれば

$$E(e^{-RU_t}) = e^{-RU_0} \tag{6.2}$$

であるということである。また、

$$\begin{aligned} E(e^{-RU_t}) &= E(e^{-R\{u_0+(1+\theta)\lambda\mu t - S_t\}}) \\ &= e^{Ru_0} e^{-R(1+\theta)\lambda\mu t} M_{S_t}(R) \qquad \text{であるから}^{1}\text{、} \\ &= e^{-Ru_0} e^{-R(1+\theta)\lambda\mu t} e^{\lambda(M_X(R)-1)t} \end{aligned}$$

$e^{-R(1+\theta)\lambda\mu t} e^{\lambda(M_X(R)-1)t} = 1$。

つまり $\{-(1+\theta)\mu R + M_X(R) - 1\}\lambda t = 0,\ 1 + (1+\theta)\mu R = M_X(R)$ でなければならない。このような定数 $R > 0$ を調整係数という。

実際, R は次のように定義される。

[1] $M_S(R) = S$ のモーメント母関数 $= e^{\lambda t(M_X(R)-1)}$

定義 6.0.3 ルンドベリモデルにおいて、次の方程式を満たす r の正の解を、当モデルの**調整係数** R という:

$$1 + (1+\theta)\mu r = M_X(r) \tag{6.3}$$

この方程式のニュートン法を用いた場合の初期値は、

$$M_X(r) \approx 1 + \mu r + \frac{E(X^2)}{2} r^2 \tag{6.4}$$

と近似できることから、調整係数を求める方程式そのものの代わりに、

$$1 + (1+\theta)\mu r = 1 + \mu r \frac{E(X^2)}{2} r^2 \tag{6.5}$$

を解いて求めた

$$r = \frac{2\theta\mu}{E(X^2)}$$

とする。

次に、確率過程 $\{e^{-RU_t}\}$ のマルチンゲール性に注目してルンドベリ不等式を導く。以下破産時刻を表す確率変数を T とする。

定義 6.0.4 破産時刻とは
$0 < T < \infty$ かつ $t > T \quad \Longrightarrow \quad U_t < 0$
となる時刻 T のことである。

$t \mapsto e^{-RU_t}$ がマルチンゲールなら、条件付期待値
$E(e^{-RU_t}|T \le t) = E(E(e^{-RU_t}|U_T)|T \le t)$
$= E(e^{-RU_T}|T \le t) > 1 \qquad (U_T < 0)$
がなりたつ。したがって任意の t について、

$$\begin{aligned} e^{-Ru_0} &= E(e^{-RU_t}) \\ &= E(e^{-RU_t}|T < t)P(T \le t) + E(e^{-RU_t}|T > t)P(T > t) \\ &> E(e^{-RU_T}|T < t)P(T \le t) \\ &> P(T \le t) := \epsilon(u_0, t) \end{aligned}$$

つまり、

$$\epsilon(u_0, t) < e^{-Ru_0} \tag{6.6}$$

が成り立つが、この不等式は任意の t に関するものであるから、$t \to \infty$ とすれば、

$$\epsilon(u_0) \leq e^{-Ru_0} \tag{6.7}$$

となる。これを**ルンドベリの不等式**という。*(*$\epsilon(u_0)$ は破産確率*)*

存続確率と破産確率の定義。

定義 6.0.5 存続確率
$\phi(u, \nu) = P(U_t \leq 0, 0 \leq t \leq \tau | U_0 = u)$ *(*有限期間*)*,
$\phi(u) = \lim_{\nu \to \infty} \phi'(u, \nu)$ *(*無限期間*)*

定義 6.0.6 破産確率
$\epsilon(u, \nu) = 1 - \phi(u, \nu)$ *(*有限期間*)*,
$\epsilon(u) = 1 - \phi(u)$ (無限期間)

定理 6.0.3 ルンドベリモデルにおいては次の等式が成り立つ。

$$\epsilon(u_0) = \frac{e^{-Ru_0}}{E(e^{-RU_T} | T < \infty)} \tag{6.8}$$

証明
任意の t に対して、

$$e^{-Ru_0} = E(e^{-RU_T} | T \geq t)\epsilon(u_0, t) + E(e^{-RU_t} | T > t)P(T > t) \tag{6.9}$$

が成り立つ。したがって、もしこの右辺の第 2 項について

$$E(e^{-RU_t} | T > t)P(T > t) \to 0 \qquad (t \to \infty) \tag{6.10}$$

がいえれば、式（３）で $t \to \infty$ とすれば、

$e^{-Ru_0} = E(e^{-RU_T}|T < \infty)\epsilon(u_0)$,
すなわち,

$$\epsilon(u_0) = \frac{e^{-Ru_0}}{E(e^{-RU_T}|T < \infty)} \tag{6.11}$$

がえられる。
以下では式 (4) の証明を行う。
$E(U_t) = u_0 + \theta\lambda\mu t, V(U_t) = \lambda t E(X^2)$ より、任意の $0 < \epsilon < 1$ について、

$$\begin{aligned} P(U_t < u_0 + (1-\epsilon)\theta\mu t) &< P(|U_t - E(U_t)| > \epsilon\theta\mu t) \\ &\leq \frac{\lambda t E(X^2)}{(\epsilon\theta\lambda\mu t)^2} \qquad \text{(チェビシェフの不等式)} \\ &= \frac{C}{t} \qquad (C \text{ は } t \text{ によらない}) \end{aligned}$$

であるので

$$P(U_t < u_0 + (1-\epsilon)\theta\lambda\mu t) \to 0 \qquad (t \to \infty)$$

したがって
$E(e^{-RU_t}|T > t)P(T > t)$
$= E(e^{-RU_t}|T > t, U_t < u_0 + (1-\epsilon)\theta\lambda\mu t)P(T > t \cap U_t < u_0 + (1-\epsilon)\theta\lambda\mu t)$
$+ E(e^{-RU_t}|T > t, U_t \geq u_0 + (1-\epsilon)\theta\lambda\mu t)P(T > t \cap U_t \geq u_0 + (1-\epsilon)\theta\lambda\mu t)$
$\leq P(U_t < u_0 + (1-\epsilon)\theta\lambda\mu t) + E(e^{-RU_t}|U_t \geq u_0 + (1-\epsilon)\theta\lambda\mu t)$
$\to 0 \qquad (t \to \infty)$.
証明終
となる。

定理 6.0.4 *(存続確率の積分微分方程式)*

$$\phi'(u) = \frac{1}{(1+\theta)\mu}\{\phi(u) - \int_0^u \phi(u-x)\ dF_X(x)\} \tag{6.12}$$

証明
まず、$c = \lambda(1+\theta)\mu$ とする。
ポアソン過程の性質より、極小区間 dt でクレーム件数の確率は、
$P(N_{dt} = N_0) = 1 - \lambda dt + o(dt)$
$P(N_{dt} > N_0) = \lambda dt + o(dt)$
となる。そして、存続確率を 3 つの場合に場合分けして考える。

[1] クレームが発生しなかったとき

$$(1-\lambda dt+o(dt))\phi(u+cdt) \tag{6.13}$$

[2] 発生するがサープラスの範囲以内のとき

$$\int_0^{u+cdt}(\lambda dt+o(dt))\phi(u+cdt-x)dF_X(x) \tag{6.14}$$

[3] 発生してサープラスの範囲外のとき

$$\int_{u+cdt}^{\infty}(\lambda dt+o(dt))0dtF_X(x)=0 \tag{6.15}$$

[1] $\sim$ [3] の和が存続確率なので

$$\phi(u)=(1-\lambda dt)\phi(u+cdt)+\lambda dt\{\int_0^{u+cdt}\phi(u+cdt-x)dF_X(x)+0\}+o(dt) \tag{6.16}$$

これより $c\dfrac{\phi(u+cdt)-\phi(u)}{cdt}=\lambda\phi(u+cdt)-\lambda\displaystyle\int_0^{u+cdt}\phi(u+cdt-x)dF_X(x)$

となり、$dt\to 0$ すると、

$c\phi'(u)=\lambda\{\phi(u)-\displaystyle\int_0^u\phi(u-x)dF_X(x)\}$

$$\phi'(u)=\frac{\lambda}{c}\{\phi(u)-\int_0^u\phi(u-x)dF_X(x)\} \tag{6.17}$$

$$=\frac{1}{(1+\theta)\mu}\{\phi(u)-\int_0^u\phi(u-x)dF_X(x)\} \tag{6.18}$$

となる。証明終

存続確率の積分微分方程式を解くには境界条件を設定しなければならない。

定理 6.0.5 存続確率の境界条件の例

$$[1]\ \phi(\infty)=1,\quad [2]\ \phi(0)=\frac{\theta}{1+\theta},\quad [3]\ \phi'(0)=\frac{\theta}{(1+\theta)^2\mu}.$$

証明

[1] の証明

初期サープラス u が ∞ ならば明らかに存続確率は 1 である。

[2] の証明

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \phi'(u)du &= \phi(\infty) - \phi(0) \\
&= \frac{1}{(1+\theta)\mu}\{\int_0^\infty \phi(u)du + \int_0^\infty \int_0^u \phi(u-x)d(1-F_X(x))du\} \\
&= \frac{1}{(1+\theta)\mu}\{\int_0^\infty \phi(u)du + \int_0^\infty \int_0^u \phi(u-x)(1-F_X(x))'dxdu\} \\
&= \frac{1}{(1+\theta)\mu}\{\int_0^\infty \phi(u)du + \int_0^\infty [\phi(u-x)(1-F_X(x))]_0^u du \\
&- \int_0^\infty \int_0^u (-\phi'(u-x))(1-F_X(x))dxdu\} \\
&= \frac{1}{(1+\theta)\mu}\{\int_0^\infty \phi(u)du + \int_0^\infty \phi(0)(1-F_X(u))du - \int_0^\infty \phi(u)du \\
&+ \int_0^\infty (1-F_X(x))(\int_x^\infty \phi'(u-x)du)dx\} \\
&= \frac{1}{(1+\theta)\mu}\{\phi(0)\int_0^\infty (1-F_X(u))du + (\phi(\infty)-\phi(0))\int_0^\infty (1-F_X(x))dx\} \\
&= \frac{1}{(1+\theta)\mu}\int_0^\infty \phi(\infty)(1-F_X(x))dx \\
&= \frac{1}{1+\theta}
\end{aligned}$$

[3] の証明　　*(5)* の u に 0 を代入すると

$$\begin{aligned}
\phi'(0) &= \frac{1}{(1+\theta)\mu}\{\phi(0) - \int_0^0 \phi(u-x)\ dF_X(x)\} \\
&= \frac{1}{(1+\theta)\mu}\phi(0) \\
&= \frac{\theta}{(1+\theta)^2\mu} \qquad \textit{([2]} \text{ を代入}\textit{)}
\end{aligned}$$

証明終

また、ルンドベリモデルにおいて初期サープラスが 0 のとき破産確率は必ず、

$$\epsilon(0) = \frac{1}{1+\theta} \tag{6.19}$$

である。

定義 6.0.7 ルンドベリモデルにおいて、u を初期サープラスとするとき、破産が発生し、かつ破産直後の欠損額が y 以上になる確率を $G(u,y)$ とかく。すなわち、

$$G(u,y) := P(T < \infty \wedge -U_T \geq y) \tag{6.20}$$

とする。もちろん、

$$\epsilon(u) = G(u,0), \qquad \phi(u) = 1 - G(u,0) \tag{6.21}$$

である。

定理 6.0.6 $G(u,y)$ の積分微分方程式は

$$\frac{\partial}{\partial u}G(u,y) = \frac{1}{(1+\theta)\mu}\{G(u,y) - \int_0^u G(u-x,y)\ dF_X(x) - \int_{u+y}^{\infty}\ dF_X(x)\} \tag{6.22}$$

である。

証明

存続確率の積分微分方程式と同じように 3 つの場合に場合分けを行う。

[1]dt 内でクレーム発生 0 のとき

$(1 - \lambda dt + o(dt))G(u + cdt, y)$.

[2]dt 内でクレーム発生が 1 件でかつ、クレーム額が $u + cdt$ より小さいとき

$(\lambda dt + o(dt))\displaystyle\int_0^{u+cdt} G(u + cdt - x, y)dF_X(x)$.

[3]dt 内でクレーム発生が 1 件でかつ、クレーム額が $u + cdt + y$ より大きいとき

$(\lambda dt + o(dt))\displaystyle\int_{u+cdt+y}^{\infty} dF_X(x)$.

そして、[1] $\sim$ [3] の和が $G(u,y)$ より

$$G(u,y) = (1-\lambda dt)G(u+cdt,y) + \lambda dt \int_0^{u+cdt} G(u+cdt-x,y)dF_X(x)$$
$$+\lambda dt\{\int_{u+y}^{\infty} dF_X(x)\} + o(dt)$$
$$c\frac{G(u+cdt,y)-G(u,y)}{cdt} = \lambda G(u+cdt,y) - \lambda \int_0^{u+cdt} G(u+cdt-x,y)dF_X(x)$$
$$+\lambda \int_{u+cdt+y}^{\infty} dF_X(x) + \frac{o(dt)}{dt}$$

両辺 c で割って $dt \to 0$ にすると、

$$\frac{\partial}{\partial u}G(u,y) = \frac{1}{(1+\theta)\mu}\{G(u,y) - \int_0^u G(u-x,y)\, dF_X(x) - \int_{u+y}^{\infty} dF_X(x)\}$$

証明終

定理 6.0.7 $G(u,y)$ の境界条件の例

$$[1] \quad G(\infty,y) = 0 \tag{6.23}$$

$$[2] \quad G(0,y) = \frac{1}{(1+\theta)\mu}\int_y^{\infty}(1-F_X(x))dx \tag{6.24}$$

$$\text{特に } \epsilon(0) = G(0,0) = \frac{1}{1+\theta}$$

証明

[1] の証明

サープラス u が ∞ なら破産する確率は *0* である。

[2] の証明 (6) を $[0,\infty)$ で積分する。

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{\partial}{\partial u}G(u,y) &= G(\infty,y) - G(0,y) \\
&= 0 - G(0,y) \\
&= \frac{1}{(1+\theta)\mu}\{\int_0^{\infty} G(u,y)du - \int_0^{\infty}\int_0^u G(u-x,y)dF_X(x)du \\
&\qquad - \int_0^{\infty}\int_{u+y}^{\infty} f(x)dx\}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \int_0^u G(u-x,y)dF_X(x)du &= \int_0^\infty \int_x^\infty G(u-x,y)dudF_X(x) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty G(v,y)dvdF_X(x) \qquad (v=u-x) \\
&= \int_0^\infty h(y)dF_X(x) \qquad (h(y)=\textstyle\int_0^\infty G(v,y)dv)
\end{aligned}$$

と、できるので

$$\begin{aligned}
G(0,y) &= \frac{-1}{(1+\theta)\mu}\{h(y)-\int_0^\infty h(y)dF_X(x)-\int_0^\infty\int_{u+y}^\infty f(x)dxdu\} \\
&= \frac{1}{(1+\theta)\mu}\{\int_0^\infty F(\infty)-F(u+ydu)\} \qquad (\int_0^\infty dF_X(x)= \\
&= \frac{1}{(1+\theta)\mu}\{\int_0^\infty 1-F(u-y)du\} \qquad (F(\infty)=1) \\
&= \frac{1}{(1+\theta)\mu}\int_y^\infty 1-F(x)dx \qquad (x=u+y)
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
\epsilon(0) &= G(0,0) \\
&= \frac{1}{(1+\theta)\mu}\int_0^\infty (1-F_X(x))dx \\
&= \frac{1}{(1+\theta)}
\end{aligned}$$

次に、初期サープラスが 0 のルンドベリモデルにおいて、破産直後の欠損額を Y とするとき、その分布関数 $F_Y(y)$ は、

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= 1-P(-U_T>y|T<\infty) \\
&= 1-\frac{G(0,y)}{G(0,0)} \\
&= 1-\frac{1}{\mu}\int_y^\infty (1-F_X(x)) \\
&= \frac{1}{\mu}\{\int_0^\infty (1-F_X(x))dx-\int_y^\infty (1-F_X(x))dx\} \\
&= \frac{1}{\mu}\int_0^y (1-F_X(x))dx
\end{aligned}$$

となり、密度関数 $f(x)$ は

$$f_Y(y)=\frac{1-F_X(y)}{\mu} \tag{6.25}$$

となる。　証明終

6.0.4 破産確率の計算

以下、いくつかの場合に破産確率を計算してみる。畳み込みを使う方法では、破産までの欠損の発生回数に応じて次のように計算する。

(1) ポートフォリオの欠損を 1 回のみ考える場合

例題 *6* $[0,t]$ で発生する自動車事故はポアソン過程（パラメータ λ）に従うとする。自動車の保険付帯率が $p(0<p<1)$ のとき、$[0,t]$ で保険会社に報告される車両保険クレーム件数の期待値および分散をもとめよ。なお、保険の付帯率と自動車事故の発生とは独立であるとする。

解 3 $[0,t]$ で報告される自動車事故件数を $S_t(S_0=0), [0,t]$ で発生する自動車事故件数を $N_t(N_0=0)$ とする。このとき、S_t は二項分布に従う確率変数 X_i をもちいて

$$S_t = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_t}$$

$$f(X_i = x) = \begin{cases} p & (x=1\text{ のとき}) \\ 1-p & (x=0\text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{6.26}$$

と表すことができる。
条件付き確率を用いて報告されるクレーム件数の確率は $P(S_t=k|N_t=n) = {}_nC_k p^k(1-p)^{n-k}$ と表現でき、さらに自動車事故件数はポアソン過程に従うことから

$$P(N_t=n) = e^{\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \tag{6.27}$$

となる、よって

$$\begin{aligned} P(S_t=k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(S_t=k|N_t=n)P(N_t=n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} {}_nC_k p^k(1-p)^{n-k} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k(1-p)^{n-k} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{k!}p^k e^{-\lambda t p}(\lambda t)^k \end{aligned}$$

と S_t はポアソン過程に従う[2]。ゆえに、$[0, t]$ で保険会社に報告されるクレーム件数の期待値、分散はともに λtp といえる。

例題 7 ある保険会社は、
クレーム件数 N の期待値と標準偏差が $6.7, 2.3$
クレーム額 X の期待値と標準偏差が $179, 521$
のポートフォリオを保有している。
保険会社は、このポートフォリオの保険金支払いに備えて、クレーム総額の期待値の 40% に当たるファンドを期初めのサープラスとして保有し、保険料収入は期待どおりとした。このとき、1 年後の期末のサープラスが負になる確率を正規近似をを用いて求めよ。

解 4 題意より、基礎値は

$$E(N) = 6.7 \quad V(N) = 2.3^2 \quad E(X) = 179 \quad V(X) = 521^2$$

となっている。これらを用いて年間のクレーム総額 S の期待値、分散、標準偏差は
$E(S) = E(E(S|N)) = E(N)E(X) = 6.7 \times 179 = 1199.3$
$V(S) = E(V(S|N)) + V(E(S|N)) = V(X)E(N) + E(X)^2V(N)$
$= 521^2 \times 6.7 + 179^2 \times 2.3^2$
$= 1988151.59$
$\sqrt{V(S)} = 1410.0$ と計算できる。
したがって、一年後のサープラスが負になる確率は
$\epsilon = P(0.4 \times 1199.3 + 1199.3 - S < 0) = P(\frac{S-1199.3}{1410} > \frac{0.4\times1199.3}{1410})$
$\approx 1 - \Phi(0.34) = 1 - 0.633 = 36.7\%$ である。

(2) ポートフォリオの欠損を複数回考える場合

定理 6.0.8

$$\phi(u) = F_L(u) \tag{6.28}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k F_Y^{k*}(u) \tag{6.29}$$

[2] $n = (n-k) + k, l = n-k$; then $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}[(1-p)(\lambda t)]^l = e^{(1-p)\lambda t}$

$$= \frac{\theta}{1+\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta}{1+\theta}(\frac{1}{1+\theta})^k F_Y^{k*}(u) \qquad (u \geq 0) \tag{6.30}$$

ただし、$F_Y(y) = \dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_0^y (1 - F_X(x))dx.$ *($\frac{\theta}{1+\theta}$:存続確率)*

証明初期サープラス u のルンドベリモデルを考える。U_t が初めて u を下回る時刻を T_1 として、$L_1 := u - U_{T_1}$ と定義する。また、U_t が初めて U_{T_1} を下回る時刻を T_2 とし、$L_2 := U_{T_1} - U_{T_2}$ と定義する。以下同様に U_t が初めて $U_{T_{n-1}}$ を下回る時刻を T_n として、$L_n := U_{T_{n-1}} - U_{T_n}$ と定義する。すなわち、サープラスが過去最低額を更新する時刻に着目し、更新回数が n 回の時刻を T_n とし、その時の最低額の更新幅を L_n と定義する。さらに、更新回数を確率変数 K とし、$L := L_1 + \cdots + L_K$ と定義すれば、存続確率 $\phi(u)$ は

$$\phi(u) = P(L \leq u) = F_L(u) \qquad (u \geq 0) \tag{6.31}$$

と表すことができる。

ここで、重要なのは $L_1, L_2, \cdots$ が互いに独立に、うえで見た Y と同一の分布に従うことと、K は幾何分布 $NB(1, \dfrac{\theta}{1+\theta})$ に従うことである。前者は明らか、後者は証明する。

すでに更新が k 回 $(k = 0, 1, \ldots)$ 生じている条件下で、今後は更新が生じない確率は、初期サープラスが 0 のときに破産しない確率 $\phi(0) = \dfrac{\theta}{1+\theta}$ に等しいので、

$$P(K = k | K \geq k) = \frac{P(K = k)}{P(K \geq k)} = \frac{\theta}{1+\theta} \tag{6.32}$$

$$P(K = k) = \frac{\theta}{1+\theta} P(K \geq k) \tag{6.33}$$

したがって、

$$P(K \geq 0) = 1$$

および、

$$P(K \geq k) = P(K \geq k-1) - P(K = k-1)$$

よって、

$$\begin{aligned} P(X \geq k) &= P(K \geq k-1) - \tfrac{\theta}{1+\theta} P(K \geq k-1) \\ &= \frac{1}{1+\theta} P(K \geq k-1) \\ &= (\frac{1}{1+\theta})^k P(K \geq 0) \\ &= (\frac{1}{1+\theta})^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(K = k) &= P(K \geq k) - P(K \geq k-1) \\ &= \frac{\theta}{1+\theta}(\frac{1}{1+\theta})^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{6.34}$$

となり、$K \sim NB(1, \dfrac{\theta}{1+\theta})$ がわかった。
以上の結果と L の複合幾何分布の分布関数を具体的に表現すると定理の通りになる。

証明終

練習問題

1 ルンドベリモデルで、会社の初期資本が u_0 とし、保険料は単位時間に c の割合で連続的に収入される。クレームの時間間隔は、独立に、平均 $\frac{1}{\lambda}$ の指数分布にしたがうとする。また、クレーム額は平均 $\frac{1}{\mu}$ の指数分布にしたがう。
(1)1 回目のクレームの発生により会社が破産する確率をもとめよ。
(2) 時刻 T までにちょうど *1* 回のクレームが発生し、それにより会社が破産しない確率をもとめよ。
(3) 時刻 T までにちょうど *1* 回のクレームが発生し、それにより会社が破産しないという条件の下で、時刻 T における会社の資産額の期待値をもとめよ。

2 ルンドベリモデルで、クレーム額 (Z_i) の確率分布が次で与えられるとする：

$$f_{Z_i}(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi x^3}} \exp\{-\frac{\alpha}{2x}(\frac{x}{\mu} - 1)^2\}, \quad x > 0$$

$$f_{Z_i}(x) = 0, \quad x \leq 0.$$

$u_0 = N$ とし、ルンドベリモデルにもとづき破産確率を $e^{-c_0 N}$ まで許容するとき、安全割り増し θ の値をもとめよ。

3 k 個の契約者集団があり、そのクレーム件数を各々 $X_1, ..., X_k$ と表す。$X_1, ..., X_k$ は独立であるとし、X_i は λ_i のポアソン分布、λ_i はパラメータ α_i, β のガンマ分布 $\Gamma(\alpha_i, \beta)$ にしたがうとする $i = 1, ..., k$。このとき総クレーム数 $S = X_1 + ... + X_k$ はどのような分布にしたがうか。

関連図書

[1] 池田信行, 偶然の輝き——ブラウン運動を巡る *2000* 年, 岩波書店, *ISBN-13 : 978-4000067942*

[2] 黒田耕嗣-岩沢宏和, 損害保険数理 *(*アクチュアリー数学シリーズ*)*, 日本評論社, *ISBN-13 : 978-4535607095*

[3] 志賀徳造, ルベーグ積分から確率論 *(*共立講座 *21* 世紀の数学*)*, 共立出版, *ISBN-13 : 978-4320015623*

[4] 津野義道, ファイナンスの確率積分―伊藤の公式、*Girsanov* の定理、*Black - Scholes* の公式, 共立出版, *ISBN-13 : 978-4320016675*

[5] 服部哲弥, *Amazon* ランキングの謎を解く*:* 確率的な順位付けが教える売上の構造, 化学同人, *ISBN-13 : 978-4759813395*

[6] 柳瀬真一郎，確率と確率過程*:*具体例で学ぶ確率論の考え方，森北出版，*ISBN-13 : 978-4627061811*

[7] *R.* デユレット-今野紀雄，確率過程の基礎，丸善出版，*ISBN-13 : 978-4621061800*

[8] *Billingsley P. Convergence of Probability Measures. New York, USA, Wiley-Interscience, 1999.*

[9] *Itô K. Kakuritsu-ron, I–III. (in Japanese) [Probability theory, I–III.] 2nd ed. Tokyo, Japan, Iwanami Shoten, 1983.*

[10] *Itô K. Stochastic Processes : Lectures given at Aarhus University, Berlin, Germany, Springer, 2004.*

[11] *Jacod J. Calcul stochastique et problèm des martingales. Lect Notes in Math 714. Berlin, Germany, Springer-Verlag, 1975.*

[12] *Kunita H, Watanabe S. On squqre integrable martingales. Nagoya Math J 1967, 30, 209–245.*

[13] *Kunita H. Stochastic differential equation based on Lévy processes and stochastic flows of diffeomorphisms. In: Rao, MM., ed. Real and stochastic analysis. Boston, USA, Birkhauser, 2004, 305–373.*

Sankhya 2011, 73-A, 1–45.

[14] *Kurtz TG, Pardoux E, Protter P. Stratonovich stochastic differential equations driven by general semimartingales. Ann Inst Henri Poincaré 1995, 31, 351-377.*

[15] *Marcus SI. Modeling and approximation of stochastic differential equations driven by semimartingales. Stochastics 1980/81, 4, 223–245.*

[16] *Di Nunno G, Oksendal B, Proske F. Malliavin calculus for Lévy processes with applications to finance. Berlin, Germany, Springer, 2008.*

[17] *Privault N. Stochastic analysis in discrete and continuous settings with normal martingales. Lecture Notes in Math 1982. Berlin, Germany, Springer-Verlag, 2009.*

[18] *Protter Ph. Stochastic Integration and Differential Equations. 2nd ed. Berlin, Germany, Springer-Verlag, 2005.*

[19] *Sato K. Additive Processes (in Japanese). Tokyo, Japan, Kinokuniya, 1990 ; English version: Lévy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge, UK Cambridge University Press, 1999.*