Part II (ana-[A])

ガウス求積法 Gaussian quadrature のノート

1 ラグランジュ補間 (Lagrange interpolation)

数値解析では多項式補間のために Lagrange 多項式が使われる。$x_j \neq y_j$ なる (x_j, y_j) に対し、Lagrange 補間多項式は各 x_j に値 y_j を対応させる最小次数の多項式である

$$L(x) = \sum_{j=0}^{k} y_j l_j(x) \tag{0.1}$$

がデータ $(x_0, y_0), ..., (x_j, y_j), ..., (x_k, y_k)$ に基づく補間多項式とする。ここで

$$l_j(x) = \Pi_{0 \leq m \leq k, i \neq j} \frac{x - x_m}{x_j - x_m}$$

は多項式である。ここで $x = x_j$ ならば $l_j(x_j) = 1$ であり、 $i \neq j$ ならば $l_j(x_i) = 0$ である。

$$l(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_k) \tag{0.2}$$

とおくと $L(x)$ は

$$L(x) = l(x) \sum_{j=0}^{k} \frac{w_j}{x - x_j} y_j \tag{0.3}$$

となり、ここで

$$w_j = \frac{1}{l'(x_j)} = \frac{1}{\Pi_{j=0, i \neq j}^{k} (x_j - x_i)}.$$

である。また

$$l'(x) = \frac{d}{dx} l(x)$$

となる。

$l(x)$ と w_j の定義から

$$L(x_j) = y_j,\ j = 0, .., k.$$

であり、これより

$$L(x_i) = \sum_{j=0}^{k} y_j l_j(x_i) = \sum_{j=0}^{k} L(x_j) l_j(x_i) \tag{0.4}$$

である。

2　ガウス求積法

ガウス求積法は上のアイデアを数値積分に適用したものである。

データ (x_j, y_j) と、関数 $f(x)$ で $y_i = f(x_i)$ なるものに対し、

$$g(x) = \sum_{i=0}^{k} (f(x_i)\ l_i(x)) \tag{1.0}$$

とおく。$g(x)$ の積分 $G(x) = \int g(x)dx$ をもとめる。

解析的にはどの点 $x_1, ..., x_k$ を選ぶかの問題になる。

以下、(1) と (2) をしめす。

(1) 各点 $x_1, ..., x_n \in [a, b]$ (ノード)　と正の重み $w_1, ..., w_n$ (荷重) で、$p(x)$ が次数 $\leq M$ の多項式のとき

$$\int_a^b p(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} w_i p(x_i)$$

を満たすものをもとめることができる。ここで M と n は $M = 2n + 1$ をみたす。

(2) 各点 $x_1, ..., x_n \in [a, b]$ (ノード)　と正の重み $w_1, ..., w_n$ (荷重) で、$f(x)$ が連続関数のとき

$$\int_a^b f(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

を満たすものをもとめることができる。

2.1　Idea of proof

簡単のため $\mu(dx) = dx$ とする。

2.1.1 Proof of part (1)

N 次多項式を有限区間 $[-1, 1]$ で、M 個の点を用いて数値的に積分したい。つまり、関数 $f(x)$ が n 個の既知の係数 a_n を用いて

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

に対し

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx \tag{1.1}$$

を考える。

[Step 1]

この積分を離散的な点だけを用いて計算したい。つまり、適当な M 個の点を用いて

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx = \sum_{i=1}^{M} f(x_i) w_i \tag{1.2}$$

となるような (x_i, w_i) の組み合わせを求める。

(1.2) を積分すると

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx = \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{N} a_n (\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}) \tag{1.3}$$

である。また

$$\sum_{i=1}^{M} f(x_i) w_i = \sum_{i=1}^{M} \sum_{n=0}^{N} a_n x_i^n w_i = \sum_{n=0}^{N} a_n (\sum_{i=1}^{M} x_i^n w_i)$$

これより、N は任意なので

$$\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{i=1}^{M} x_i^n w_i, \ n = 0, 1, ..., N \tag{1.4}$$

を満たさなければならない。

x_i, w_i の選び方は存在する。x_i, w_i の選び方に関する右辺の自由度は $2M$ なので、$N + 1 \leq 2M$, つまり $N \leq 2M - 1$ でなければならない。

[Step 2]

積分 (1) を求めるために、離散的な N 個の点 $x = x_i$ における $f(x)$ の値を利用する。データは $(x_1, y_1), ..., (x_j, y_j), ..., (x_N, y_N)$ であるので、$y_i = f(x_i) \equiv f_i, i = 1, ..., N,$ とする。

$F(x)$ を、上の N 個の点を全て通る $N-1$ 次多項式であるとする。具体的には、ラグランジュ多項式を用いて

$$F(x) = \sum_{k=1}^{N} f_k (\Pi_{1 \leq i \leq N, i \neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}) \tag{1.5}$$

となる。

誤差関数

$$g(x) = f(x) - F(x)$$

とおく。($g(x), f(x)$ は $2N-1$ 次、$F(x)$ は $N-1$ 次多項式である。)

また、$f(x_i) = F(x_i)$ (for all i) なので、$g(x)$ は

$$g(x_1) = g(x_2) = ... = g(x_N) = 0 \tag{1.6}$$

を満たす。

積分を考えると

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{-1}^{1} F(x)dx$$

(1.2) を $F(x)$ に適用して

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{i=1}^{N} F(x_i)w_i \tag{1.7}$$

と表されることが望まれる。。

$f(x)$ は $2N-1$ 次であり、$F(x)$ は N 個の点で表現されているので、誤差関数の積分 (1.7) (の両辺) をゼロにするような (x_i, w_i) の組み合わせが存在する。(以下で示す。)

まず、(1.6) より

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N)G(x) \tag{1.8}$$

と書き換えることができる。ここで $G(x)$ は $N-1$ 次多項式である。そこで

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N)G(x)dx = 0 \tag{1.9}$$

を満たす N 個の $x = x_i$ を探すことができればよい。

$G(x)$ は $N-1$ 次の Legendre 多項式を用いた基底関数で展開可能であるので

$$G(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j x^j = \sum_{j=0}^{N-1} a_j P_j(x) \tag{1.10}$$

と書くことができる。

また

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N)$$

も、N 次多項式の関数で書くことができる。

N 次多項式として N 次 Legendre 多項式 $P_N(x)$ を選ぶことにする。

点 $x_1, x_2, ..., x_N$ を $P_N(x) = 0$ を満たす N 個の点と選ぶとすると、N 次だけの Legendre 多項式だけで書くことができる。つまり

$$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_N) = cP_N(x) \tag{1.11}$$

ただし c は $x_1, ..., x_N$ から決まる定数。

これより

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} g(x)dx &= \int_{-1}^{1} cP_N(x) \sum_{j=0}^{N-1} a_j P_j(x)dx \\
&= c \sum_{j=0}^{N-1} a_j \int_{-1}^{1} P_N(x)P_j(x)dx \\
&= c \sum_{j=0}^{N-1} a_j \delta_{N,j} \\
&= 0
\end{aligned}$$

つまり、N 次 Legendre 多項式のゼロ点を求積法におけるゼロ点として選ぶと

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{i=1}^{N} F(x_i)w_i \tag{1.12}$$

となることがわかる。

[Step 3]

(1.7), (1.10) を満たす w_i の選び方。

[Step 2] では、$2N-1$ 次の多項式で記述される $f(x)$ の積分は、N 個の点を用いて

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)w_i \tag{1.13}$$

が成り立つ分点の位置と重み x_i, w_i の組があることを示し、x_i は、N 次 Legendre 多項式のゼロ点であった。

(1.5) を使う。

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} F(x)dx = \int_{-1}^{1} \sum_{k=1}^{N} f_k(\Pi_{1\le i\le N, i\ne k}\frac{x-x_i}{x_k-x_i})dx$$

$$= \sum_{k=1}^{N} f_k \int_{-1}^{1} (\Pi_{1\le i\le N, i\ne k}\frac{x-x_i}{x_k-x_i})dx$$

$$w_k = \int_{-1}^{1} (\Pi_{1\le i\le N, i\ne k}\frac{x-x_i}{x_k-x_i})dx \tag{1.14}$$

とおくと

$$\text{上の右辺} = \sum_{k=1}^{N} f_k w_k$$

となる。

具体的な (1.14) の計算。

(1.11) より

$$\Pi_{i=1,i\ne k}^{N}(x-x_i) = \frac{cP_N(x)}{x-x_k} \tag{1.15}$$

とかける。

また

$$cP_N'(x) = \frac{\partial}{\partial x}[(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_N)]$$

$$= [(x-x_2)\cdots(x-x_N)+(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_N)+...+(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{N-1})]$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \Pi_{i=1,i\ne k}^{N}(x-x_i)$$

とくに

$$cP_N'(x_k) = \Pi_{i=1,i\ne k}^{N}(x_k-x_i) \tag{1.16}$$

(1.15), (1.16) より

$$\Pi_{i=1,i\ne k}^{N}(x-x_i)[\Pi_{i'=1,i'\ne k}^{N}(x_k-x_{i'})]^{-1}$$

$$= \Pi_{i=1,i\neq k}^{N} \frac{(x - x_i)}{x_k - x_i}$$
$$= \frac{cP_N(x)}{x - x_k} \cdot \frac{1}{cP_N'(x_k)}$$
$$= \frac{P_N(x)}{(x - x_k)P_N'(x_k)}$$

これより

$$w_k = \int_{-1}^{1} (\Pi_{1\leq i\leq N, i\neq k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}) dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{P_N(x)}{(x - x_k)P_N'(x_k)} dx$$

である。

[Step 4]

クリストッフェル＝ダルブーの定理

2.1.2 Proof of part (2)

Weierstrass 近似定理 (WAT):

$[a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ と $\epsilon > 0$ に対し、多項式 $p(x)$ で $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ for all $x \in [a, b]$ となるものがとれる。

$Q(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$ とおく。

$$Q(f) - \int_a^b f(x)dx = Q(f) - Q(p) + Q(p) - \int_a^b f(x)dx = I + II \quad (say). \tag{2.1}$$

と書き換える。

II は Weierstrass 近似定理より

$$\int_a^b |p(x) - f(x)| dx \leq \epsilon(b - a) \tag{2.2}$$

である。

I は次のように評価される：

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(f(x_i) - p(x_i)) \leq \sum_{i=1}^{n} w_i \epsilon$$

$$\leq \epsilon \sum_{i=1}^{n} w_i = \epsilon Q(1) \quad (\leq \epsilon \int_a^b 1dx = \epsilon(b-a).) \tag{2.3}$$

よって (1.2) の証明終わり。q.e.d.

2.1.3 モーメント法

(part 2-1)

多項式 $p(x) = x^j, j = 0, ..., M$ に対する具体的な求積法

$$\int_a^b x^j dx = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^j \tag{2.4}$$

for some $x_1, ..., x_n$ if $j \leq 2n-1$ をもとめる。

問題はいかに (x_i) と (w_i) を捜すかである。モーメント法を使う。

2-1-(a)

Hankel 行列 H を導入する。

$(N+1) \times (M+1)$ 行列 H は、

$$H_{ij} = \mu_{i+j}, \ i, j = 0, ..., N+M \tag{2.5}$$

のとき、測度 $\mu(.)$ に対応する $(N+1) \times (M+1)$ Hankel 行列という。ただし、$(\mu_0, \mu_1, ..., \mu_{N+M})$ は $\mu(.)$ の $(N+M)$ モーメントである。

ここで

$$\mu_j = \int_a^b x^j \mu(dx), \ j = 0, 1, 2, ... \tag{2.6}$$

である。

H の例

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\det H = 1/12 > 0.$$

2-1-(b)

Vandermonde 行列 V

$$V = \begin{pmatrix} x_0^0 & \cdots & \cdots & x_n^0 \\ x_0^1 & \cdots & \cdots & x_n^1 \\ x_0^2 & \cdots & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ x_0^n & \cdots & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ x_0^1 & \cdots & \cdots & x_n^1 \\ x_0^2 & \cdots & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ x_0^n & \cdots & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

を導入する。ここで $x_0, ..., x_n$ はたがいに異なるとする。

V は可逆なので一意なベクトル $\omega = {}^t(w_0, w_1, ..., w_n)$ が存在し

$$V\omega = {}^t(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n) \tag{2.7}$$

となる。ただし $\beta_i = \int_b^a x^i dx, i = 0, ..., n$。よって $w_0, ..., w_n$ が一意にとれる

じっさい、(2.7) の

$$\omega = {}^t(w_0, w_1, ..., w_n).$$

を捜す。

ここで $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n$ は具体的に

$$\beta_0 = \int_a^b dx = b - a$$

$$\beta_1 = \int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$...$$

$$\beta_n = \int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}(b^{n+1} - a^{n+1}) \tag{2.8}$$

で与えられる。

$p_n(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ とおく。ここで $(x_i,p_n(x_i)), i=0,1,...,n$ はデータである。

(2.7) より

$$\int_a^b dx = w_0+w_1+...+w_n$$
$$\int_a^b xdx = w_0x_0+w_1x_1+...+w_nx_n$$
$$...$$
$$\int_a^b x^n dx = w_0x_0^n+w_1x_1^n+...+w_nx_n^n$$

である。

$$V\omega=(\beta_0,\beta_1,...,\beta_n)$$

で V が可逆なので

$$\{the\quad sum\quad by\ the\ data\quad (x_i,p_n(x_i))\}$$
$$=w_0p_n(x_0)+w_1p_n(x_1)+...+w_np_n(x_n)$$
$$=a_0(w_0+w_1+...+w_n)+a_1(w_0x_0+w_1x_1+...+w_nx_n)+...+a_n(w_0x_0^n+w_1x_1^n+...+w_nx_n^n)$$
$$=a_0\int_a^b dx+a_1\int_a^b xdx+...+a_n\int_a^b x^n dx$$
$$=\int_a^b p_n(x)dx \tag{2.9}$$

となる。

(part 2-3)

Legendre 多項式

k 次多項式 $(p^{(k)}(x))$ の列が、測度 $\alpha(A)$ に関して直交多項式とは、

$$\int p^{(k)}(x)p^{(l)}(x)\alpha(dx)=0\ (k\neq l),=c_k\ (k=l). \tag{2.10}$$

が成り立つことを言う。$c_k=1,k=0,1,..$ ならば正規直交多項式という。

我々は $p^{(k)}(x)$ の根は単純であり、区間 $[a,b](a=-1,b=1$ にあるとする。また多項式の最高次の係数は 1 に等しいとする。

ノード (分点) (x_i) と重み (w_j) を具体的に求める。ノード (x_i) と重み (w_j) が与えらた時、次の漸化式が成立する：

$$x_j p^{(j)}(x) = (x - w_j) p^{(j-1)}(x) - x_{j-1} p^{(j-2)}(x), j = 1, ..., n, \qquad (2.11)$$

with

$$p^{(-1)}(x) = 0,\ p^{(0)}(x) = 1.$$

なお Legendre 多項式の場合、$d\alpha = dx$ ととる。

なお、相異なる $x_0, ..., x_n$ と相異なる $y_0, ..., y_n$ に対し、n 次多項式 $(deg\ p = n)$ $p(x)$ で

$$p(x_i) = y_i\ (0 \leq i \leq n). \qquad (2.12)$$

なるものがただ一つ存在することが知られている。このとき

$$\int_{-1}^{1} p(x) dx = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i. \qquad (2.13)$$

である。

n 次 Legendre 多項式 $P_n(x)$ の零点 $x_1, x_2, ..., x_n$ に対し、

$$w_i = \frac{2}{(1 - x_i^2)[P_n'(x_i)]^2} = \frac{2}{(1 - x_i^2)[nP_{n-1}(x_i)]^2}. \qquad (2.14)$$

であることが知られている。ただし、$P_n(1) = 1, n = 1, 2, ..$ となるものをとる。

例

n	x_i	w_i
1	0	2
2	$\sqrt{1/3}, -\sqrt{1/3}$	1, 1
3	0, $\sqrt{3/5}, -\sqrt{3/5}$	8/9, 5/9, 5/9
...	...	...

2.2 Excercise (練習)

[1] ラグランジュの補間公式

Proposition 1 *x 座標が互いに異なる $n+1$ 個の点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1})$ を通る n 次以下の関数 $y = f(x)$ は次のように定まる:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f_i(x)}{f_i(x_i)} y_i$$

where

$$f_i(x) = \Pi_{1 \le j \le n+1, i \ne j}(x - x_j) \tag{2.15}$$

例 ラグランジュの補間公式 $(n = 2)$

x 座標が互いに異なる 3 個の点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ を通る 2 次以下の関数 $y = f(x)$ は次のように定まる。

$$f(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \cdot y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \cdot y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)} \cdot y_3$$

例 1

3 点 $(-2, 3), (-1, 2), (1, 6)$ を通る 2 次以下の関数 $f(x)$ を求める。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x+1)(x-1)}{(-2+1)(-2-1)} \cdot 3 + \frac{(x+2)(x-1)}{(-1+2)(-1-1)} \cdot 2 + \frac{(x+2)(x+1)}{(1+2)(1+1)} \cdot 6 \\ &= x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

例 2

3 点 $(0, 1), (1, 3), (4, 9)$ を通る 2 次以下の関数 $f(x)$ を求める。

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-1)(x-4)}{(0-1)(0-4)} \cdot 1 + \frac{(x-0)(x-4)}{(1-0)(1-4)} \cdot 3 + \frac{(x-0)(x-1)}{(4-0)(4-1)} \cdot 9 \\ &= 2x + 1 \end{aligned}$$

例 **3**: 三次補間

関数 $f(x)$ が四点 $(-1,2),(0,5),(2,-1),(3,2)$ を通るとき、 これらの四点を通る三次関数 $p(x)$ をラグランジュの補間公式を用いて求める。

解答

四点

$$(x_0, f(x_0)),(x_1, f(x_1)),(x_2, f(x_2)),(x_3, f(x_3)),$$

を通る三次関数 p(x) を与えるラグランジュの補間公式は、

$$\begin{aligned}
p(x) = &\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \cdot f(x_0)+ \\
&\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \cdot f(x_1)+ \\
&\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \cdot f(x_2)+ \\
&\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \cdot f(x_3)
\end{aligned}$$

である。

四点の座標を代入して

$$\begin{aligned}
p(x) = &\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)} \cdot 2+ \\
&\frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(0+1)(0-2)(0-3)} \cdot 5+ \\
&\frac{(x+1)(x-0)(x-3)}{(2+1)(2-0)(2-3)} \cdot (-1)+ \\
&\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(3+1)(3-0)(3-2)} \cdot 2 \\
= &-\frac{1}{6}x(x-2)(x-3) + \frac{5}{6}(x+1)(x-2)(x-3) \\
&+\frac{1}{6}(x+1)(x)(x-3) + \frac{1}{6}(x+1)(x)(x-2) \\
= &\, x^3 - 3x^2 - x + 5
\end{aligned}$$

となる。

（2.15）の証明についても、 $n=2$ の場合の場合についてのみ紹介する。同様の方法で $n+1$ 個の点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),...,(x_{n+1},y_{n+1})$ を通る n 次以下の関数 (多項式) の 一般形を示すこともできる。

証明　多項式の係数と関数の値の duality を利用する。

$$f(x) = g_1(x)y_1 + g_2(x)y_2 + g_3(x)y_3 \tag{2.16}$$

とおく。

$$f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2, f(x_3) = y_3$$

を満たすように式を作りたいので、 $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ は次の条件を満たす必要がある：

$$g_1(x_1) = 1, g_2(x_1) = 0, g_3(x_1) = 0,$$

$$g_1(x_2) = 0, g_2(x_2) = 1, g_3(x_2) = 0,$$

$$g_1(x_3) = 0, g_2(x_2) = 0, g_3(x_3) = 1.$$

まず、 $g_1(x)$ について考える。 $g_1(x_2) = g_1(x_3) = 0$ より、因数定理から

$$g_1(x) = a_1(x - x_2)(x - x_3)$$

と表せる。（ただし、 a_1 は定数）

$g_1(x_1) = 1$ より、上式から $1 = a_1(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)$ である。

$$a_1 = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

が求まる。よって、

$$g_1(x) = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}(x - x_2)(x - x_3)$$

がわかった。同様の方法で、

$$g_2(x) = (x - x_1)(x - x_3)\frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$g_3(x) = (x - x_1)(x - x_2)\frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

が求まるため、（2.16）に代入して、

$$f(x) = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}(x - x_2)(x - x_3)y_1 + (x - x_1)(x - x_3)\frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}y_2$$

$$+ (x - x_1)(x - x_2)\frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}y_3$$

が導かれた。また、それぞれの項は x の 2 次式なので、 $f(x)$ も 2 次式である。q.e.d.

21-leb-lec の

[II] 1.5 積分論-2　の練習問題

[1] 関数 f を $[0,\infty)$ 上の非負値ルベーグ可積分関数とし，$[0,\infty)$ 内のルベーグ可測集合 A に対して

$$m(A) = \int_A f(x)\mu(dx)$$

とおく。この時，次の各問に答えよ．

(1) m は $[0,\infty)$ 上の測度となることを示せ．

(2) $F(x) = m([0,x])$ とするとき F は $[0,\infty)$ 上の連続関数であることを示せ．

(3) (2) で定義された関数 F は一様連続でもあることを示せ．

[2] $x \in \mathbf{R}$ に集中した R 上のディラック測度を δ_x で表す．$A \subset \mathbf{R}$ に対して $\delta_x(A) = 1$ $(x \in A)$, $= 0$ $(x \notin A)$．2 つの測度 μ, ν に対して μ が ν に関し絶対連続であるとき $\mu << \nu$ と表す.

(1) 全ての $x \in \mathbf{R}$ に対して $\delta_x << \nu$ となるような $\mathbf{R}$ 上の σ-有限ボレル測度 ν は存在しないことを示せ．

(2) (1) で ν の条件「σ-有限」を落とした場合はどうか．

[3] 有限閉区間 $[a,b]$ でルベーグ積分可能な関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，$[a,b]$ でルベーグ積分可能な正値関数 f が存在して

$$|f_n(x)| \leq f(x), \quad x \in [a,b], \ n = 1, 2, ...$$

$x \in [a,b]$ に対して $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ とおく。$[a,b]$ 上の関数 F が存在して，各 $x \in [a,b]$ に対して $n \to \infty$ のとき $F_n(x)$ は $F(x)$ に収束するとする．以下を示せ．

(1) F_n は F に $[a,b]$ で一様に収束する．

(2) F は $[a,b]$ で絶対連続である．

[4] 実数上の非負値可測関数 f は任意の有限区間 $[a,b]$ 上でルベーグ積分可能ならば

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt = \lim_{x\to\infty} x\int_x^\infty \frac{f(t)}{t^2}dt$$

が成り立つことを証明せよ．ただし，両辺のうち少なくとも一方は存在するものとする．

memo