

講義ノート (演習問題)

Yasushi Ishikawa 2019

講義ノートに対応した演習問題です。適宜、学生 n 人 ($n \geq 1$) に問題を指示しますので、
当てられた人は解いてきてください。

[Redacted content]

第1章 基礎概念

1.1 Jordan 測度 Lebesgue 測度

- 解いた問題を石川に見せてください
- 解いた問題の合計数で評価します。

Problem 0

以下を示せ。

- (1) $a, b \in \mathbb{R}$ とする. このとき $(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \Rightarrow a \leq b$ が成り立つ.
- (2) $\alpha \in \mathbb{R}, A \subset \mathbb{R}$ とする. このとき $(\forall x \in A, x < \alpha) \Rightarrow \sup A \leq \alpha$ が成り立つ.

Problem 1.1.1 (*) 以下の集合を求めよ.

$$(1) \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1 \right], \quad (2) \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, 1 \right)$$

Problem 1.1.2 (*) $A \subset B \subset \mathbb{R}$ ならば $\sup A \leq \sup B$ が成り立つことを示せ.

Problem 1.1.3 A, B, C を集合とする. 集合 A, B の対称差 $A \Delta B$ を $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ と定義する. 次を示せ.

- (1) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$
- (2) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

Problem 1.1.4 (*) 定義から $m^*(A) \leq C(A)$ ($A \subset \mathbb{R}^n$) を示せ.

1.2 Lebesgue 測度の性質

Problem 1.2.1 (*) m^* , m_* はルベーグ外測度, 内測度とする. 以下を示せ.

(1) 単調性: $A_1 \subset A_2 \Rightarrow m^*(A_1) \leq m^*(A_2)$.

(2) $0 \leq m_*(A) \leq m^*(A)$ ($A \subset \mathbb{R}^n$).

Problem 1.2.2 (***) 以下を示せ¹.

(1)

$$A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

(2) $A_j \in \mathcal{M}$ は集合の増加列, すなわち $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ とする. このとき以下を示せ.

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n).$$

(3) $A_j \in \mathcal{M}$ は集合の減少列, すなわち $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ とし, さらに $m(A_1) < +\infty$ と仮定する. このとき以下を示せ.

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n).$$

Problem 1.2.3 (Ω, \mathcal{M}, m) を確率空間とし, $(A_j)_{j=1,2,\dots}$, $A_j \in \mathcal{M}$ を $m(A_j) = 1$, $j = 1, 2, \dots$ となる集合列とする. $m(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j) = 1$ となることを示せ.

Problem 1.2.4 (Ω, \mathcal{M}, m) を測度空間とし, $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ とする. 次を示せ.

(1) $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$

(2) $m(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$

(3) $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) < +\infty$ ならば

$$m(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$$

¹本問は, σ 加法族の性質と測度の性質 (1.3.5 定理 1, 1.3.6 命題 1) から示すことができる. Lebesgue 測度の定義に戻る必要はない.

1.3 Lebesgue 可測集合

Problem 1.3.1 (1) $\Omega = \{\text{りんご}, \text{みかん}, \text{すいか}\}$ の加法族をすべて求めよ。

(2) $\Omega = [0, 1]$ とする。次の集合から生成された σ -加法族を、各々求めよ。

(i) $(0, \frac{1}{2})$

(ii) $[0, \frac{1}{4}), (\frac{3}{4}, 1]$

(iii) $[0, \frac{3}{4}), (\frac{1}{4}, 1]$

Problem 1.3.2 次を証明せよ。

$$\mathcal{E} = \{(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]; -\infty \leq a_i \leq b_i \leq +\infty, i = 1, 2\}$$

とおく。

(a) 次を示せ：

(i) $\emptyset \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$

(ii) $A \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^2), B \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$ ならば $A \cap B \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$

(iii) $A \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$ ならば、ある $n \geq 1$ と $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$ があって、
 $A^c = \sum_{j=1}^n A_j$.

ただし、 $B = \sum_{j=1}^n B_j$ とは、

$$B = \cup_{j=1}^n B_j \text{ かつ } B_i \cap B_j = \emptyset (i \neq j)$$

という意味である。

(b)

$$\mathcal{A} = \{A = \sum_{j=1}^n A_j; A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^2)\}$$

とおく。次を示せ：

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A}$ ならば $A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $A, B \in \mathcal{A}$ ならば $A \cap B \in \mathcal{A}$

(ヒント)(b)の証明には、次の表現を使ってよい。

$$A = \sum_{j=1}^{m_1} A_j, B = \sum_{j=1}^{m_2} B_j \text{ のとき } A \cap B = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} (A_i \cap B_j)$$

Problem 1.3.3 集合 X とその上の σ -加法族 \mathcal{A}_X の組 (X, \mathcal{A}_X) を可測空間という。 $(X, \mathcal{A}_X), (Y, \mathcal{A}_Y)$ を 2 つの可測空間とし、 $\varphi : X \rightarrow Y$ を写像とする。

- (1) $\{\varphi^{-1}(B); B \in \mathcal{A}_Y\}$ は X の σ -加法族であることを示せ。
- (2) $\{B \subset Y; \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{A}_X\}$ は Y の σ -加法族であることを示せ。

Problem 1.3.4 Ω を任意の集合とし、 Ω の部分集合の族で σ -加法族になっているものを \mathcal{A}, \mathcal{B} とする。

- (1) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ は σ -加法族であることを示せ。
- (2) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ のとき、 $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ が σ -加法族にならない例を作れ。

Problem 1.3.5 ()** 開集合, 閉集合がボレル集合であることを示そう。開区間全体の集合 \mathcal{I} , 閉区間全体の集合を $\bar{\mathcal{I}}$, 半开区間全体の集合を $\tilde{\mathcal{I}}$ とおく。すなわち,

$$\mathcal{I} := \{I \subset \mathbb{R}^n : \text{open interval}\},$$

$$\bar{\mathcal{I}} := \{\bar{I} \subset \mathbb{R}^n : \text{closed interval}\},$$

また

$$\tilde{\mathcal{I}} := \{\tilde{I} \subset \mathbb{R}^n : \exists \{a_j\}_{j=1}^n, \exists \{b_j\}_{j=1}^n \text{ s.t. } \tilde{I} = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j)\}$$

とする。次の問に答えよ。

- (1) 講義でボレル集合 \mathcal{B}_n を $\tilde{\mathcal{I}}$ を含む最小の σ 加法族と定義した。集合族 \mathcal{A} を含む最小の σ 加法族を $\sigma[\mathcal{A}]$ と書くことにすると、 $\mathcal{B}_n := \sigma[\tilde{\mathcal{I}}]$ ということ。さて、 $\mathcal{B}_n = \sigma[\mathcal{I}]$ を示せ。
- (2) $A \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とする。このとき、ある开区間の列 I_j があって、 $A = \cup_{j=1}^{\infty} I_j$ とかけることを示せ。
- (3) (1), (2) を用いて開集合, 閉集合が Borel 集合であることを示せ。

Problem 1.3.6 ()** カントール集合。

1. 可算集合は測度 0 であることを示せ (つまり測度正の可測集合は非可算集合である)。

2. 非可算な可測集合だからといって、測度が正とは限らない。その例を考える。 C_0 を閉区間 $[0, 1]$ とする。 C_0 を三等分して中央の开区間 $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ を取り除き、 $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ とする。さらに C_1 の二つの閉区間をそれぞれ三等分して中央の开区間をそれぞれ取り除いた集合を C_2 とおく。これを繰り返すことで、単調減少集合列 $C_0 \supset C_1 \supset \cdots \supset C_n \supset C_{n+1} \supset \cdots$ が構成できる。 $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$ をカントール集合という。カントール集合 C に対して以下を示せ。

- (a) C はルベーグ可測集合であることを示せ（ボレル可測であることを示せば良い）。
- (b) $m(C) = 0$ を示せ。
- (c) C は非可算集合である²。よって C は非可算だが測度 0 の集合の例になっている。

²非可算集合であることの証明は、例えば伊藤清三、ルベーグ積分入門、裳華房、p.41-43 参照

1.4 測度の例

\mathcal{A} を σ 加法族 (可算加法族) とする. $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ が

1. (Nonnegativity) $\mu(\emptyset) = 0$ and $0 \leq \mu(A) \leq +\infty$ for all $A \in \mathcal{A}$.
2. (Countable additivity) $A_j \in \mathcal{A}$: disjoint $\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

を満たす時, μ は \mathcal{A} 上の測度という.

Problem 1.4.1 (*) X を空でない集合とする. 2^X 上定義された個数測度 (counting measure):

$\#(A) := A$ の元の個数, if A : 有限集合; $= +\infty$ if A : 無限集合,

は, 上の条件 1,2 を満たすことを示せ (従って測度である).

Problem 1.4.2 (*) 確率測度の単純な例: 一回だけさいころを投げることの数学モデル. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とする (さいころの出る目の集合).

このとき 2^X は起こりうる事象すべてと理解できる. 例えば, $\{2, 3\} \in 2^X$ は「さいころを一回投げる時, 2 または 3 の目が出る事象」と理解することにする. さて, $A \in 2^X$ にたいして $P(A) := \frac{\#(A)}{\#(X)} = \frac{\#(A)}{6}$ と定め, これを「事象 A が起こる確率」と呼ぶことにする.

このとき P が測度の条件 1,2 を満たすことを示せ. なお, この測度のように, 全空間の測度 $P(X) = 1$ となる測度を確率測度と呼ぶ.

Problem 1.4.3 (*) X を非可算な集合とする. 以下のように 2^X 上で定義された ν は, 上の条件 1,2 を満たすことを示せ (従って測度である).

$\nu(A) := 0$, if A : たかだか可算; $= +\infty$ if A : 非可算.

Problem 1.4.4 (**) 次のように定める.

$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ or } A^c \text{ is countable}\},$

$\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty];$

$\mu = 0$ if A : たかだか可算;

$= 1$ if A^c : たかだか可算,

このとき, \mathcal{A} は \mathbb{R} 上の σ -加法族をなし, μ は \mathcal{A} 上の測度となることを示せ.

Problem 1.4.5 (ボンフェローニ (Bonferroni) の不等式) 次を示せ。

$$m(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n m(A_i) - \sum_{i<j} m(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} m(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots \\ \dots + (-1)^{n+1} m(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

1.5 Lebesgue 積分, 単調収束定理, Lebesgue の収束定理

Problem 1.5.1 $\Omega = (0, \infty)$ とする。 $f(x) = 21_{[1,3]} + 41_{[4,5]} + 31_{[6,9]}$ のグラフを書け。そのルベーグ測度 dx に関する積分値を求めよ。

Problem 1.5.2 $X = \mathbb{R}$ 上の非負可測関数 f に対して、各 n ごとに

$$A_{n,j} = \{x \in X; \frac{j-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{j}{2^n}\}, j = 1, 2, \dots, n2^n \\ B_n = \{x \in X; f(x) \geq n\}$$

とおき、単関数

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n2^n} 1_{A_{n,j}}(x) \frac{j-1}{2^n} + n 1_{B_n}(x)$$

をつくる。

- (1) $f(x) = x^2$ に対し、 $f_2(x), f_3(x)$ を図示せよ。
 - (2) $f(x) = |\sin x|$ に対し、 $f_2(x), f_3(x)$ を図示せよ。
 - (3) $f(x) = |\sin(x^2 + 8)|$ に対し、 $f_2(x), f_3(x)$ を図示せよ。
 - (4) $f(x) = e^x$ に対し、 $f_2(x), f_3(x)$ を図示せよ。
- 図示における定義域は適当な範囲を設定せよ。

Problem 1.5.3 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

をみたし、かつ連続であることがわかっている。このとき実は

$$f(x) = f(1)x$$

であることを示せ。

Problem 1.5.4 次の関数は与えられた定義域でルベグ積分可能かどうかを調べよ。

(1) $u(x) = \frac{1}{x}, x \in [1, \infty)$

(2) $u(x) = \frac{1}{x^2}, x \in [1, \infty)$

(3) $u(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \in (0, 1]$

(4) $u(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, 1]$

Problem 1.5.5 (*) $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ ($1 \leq x \leq 100$) とし、関数列 $\{f_n\}$ を考える。

1. 各 x に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ を示せ.
2. $|f_n(x)| \leq 4e^{-2}$ ($n \geq 1, 1 \leq x \leq 100$) を示せ. もっと荒く, $\exists M > 0$. $|f_n(x)| \leq M$ ($n \geq 1, 1 \leq x \leq 100$) を示すのもよい.
3. $\int_1^{100} f_n(x) dx = 0$ を示せ. 使った定理を明記すること.

Problem 1.5.6 (*) $f_n(x) = x^n$ ($0 \leq x \leq 1$) とし、関数列 $\{f_n\}$ を考える。

1. f_n の各点収束極限を求めよ. 結論のみでよい.
2. f_n は $[0, 1]$ で一様収束するか? 結論のみ答えよ.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ を求めよ. 使った定理を明記すること.

用語: \mathbb{R}^n 上のルベグ可測関数 f に対して, $m(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}) = 0$ が成り立つとき「 f は \mathbb{R}^n でほとんどいたるところ 0 である」とか「 $f = 0$ a.e. in \mathbb{R}^n (almost everywhere)」という. 言い換えると, 命題が成り立たない点の集合が測度 0 であるとき, ほとんどいたるところ成立する, という.

Problem 1.5.7 (***) 関数 f は \mathbb{R} 上ルベグ可測とする. このとき次を示せ.

1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\varepsilon m(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| m(dx)$ が成り立つ.
2. $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| m(dx) = 0$ ならば $f = 0$ a.e. in \mathbb{R} .
3. f が可積分ならば $|f| < +\infty$ a.e. in \mathbb{R} .

Problem 1.5.8 (***) \mathbb{R} 上の可測関数列 $\{f_n\}$ について以下に答えよ.

1. 無条件に

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| m(dx) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| m(dx)$$

が成り立つことを示せ．単調収束定理を用いてよい．

2. 可測関数列 $\{f_n\}$ が $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| m(dx) < \infty$ を満たす時, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) < \infty$ がほとんどいたるところ成り立ち, さらに

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) m(dx) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) m(dx)$$

が成り立つことを示せ．*Prob.1.5.7* と *Prob.1.5.8.1*, ルベークの収束定理を用いてよい．

用語 : 可積分関数 f に対して

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)| m(dx)$$

と定める．

関数列 $\{f_n\}$ と f が $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0$ を満たす時, f_n は f に $L^1(\Omega)$ 収束するという．

Problem 1.5.9 (***) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ は $(0, \infty)$ 上で広義 *Riemann* 積分可能であるが, *Lebesgue* の意味で積分できないことを示したい．

1. 部分積分を用いて, $s, t \rightarrow \infty$ とするとき $\left| \int_s^t \frac{\sin x}{x} dx \right| \rightarrow 0$ を示せ．
2. 1. を用いて $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{\sin x}{x}$ が収束することを示せ³．
3. 自然数 n について,

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx > \frac{1}{(n+1)\pi} \int_0^\pi \sin t dt$$

を示せ．

4. 3. を用いて $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty$ を示せ．

³値は $\frac{\pi}{2}$ になる．

1.6 Lebesgue の収束定理, フビニの定理

Problem 1.6.1 (*) $[-1, 1] \times [0, 1]$ 上の関数

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (x, y) \neq (0, 0); = 0 \quad (x, y) = (0, 0)$$

について以下を示せ .

1. $\int_{[-1, 1]^2} |f(x, y)| dx dy = +\infty$ を示せ . 使った定理を明記すること .
2. $\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dx \right) dy = 0$.
3. 一方, 任意の x に対して $\int_0^1 f(x, y) dy = \frac{1}{2} - \frac{2x}{x^2 + 1}$ である . 右辺を $g(x)$ とおくと, g はプラスパートもマイナスパートも $[-1, 1]$ 上の積分が $+\infty$ に発散するので, $[-1, 1]$ 上で $\int_{-1}^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ は定義されない . よって $g(x)$ は Lebesgue の意味で積分不可能である . つまり, 逐次積分ができない例になっている (x から先に積分すると 0 だが, y から先に積分すると次に x で積分できない) .

Problem 1.6.2 (***) 任意の $t > 0$ に対して

$$\int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \arctan t$$

を示せ . $x > 0$ なら $\frac{e^{-xt}}{x} = \int_t^\infty e^{-xy} dy$ は用いて良い . 使った定理を明記すること .

Problem 1.6.3 (***) 任意の $t > 0$ に対して

$$\int_0^\infty e^{-tx} \frac{1 - \cos x}{x} dx = \log \sqrt{1 + (1/t)^2}$$

を示せ . 使った定理を明記すること .

Problem 1.6.4 次の等式を示せ。

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = 1$$

$$(2) \quad \int_1^{\infty} e^{-x} \log x dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_1^k \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \log x dx$$

$$(3) \quad \int_0^1 e^{-x} \log x dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \log x dx$$

Problem 1.6.5 (**)
 $s > 0$ とする . ガンマ関数

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

の n 階導関数は

$$\Gamma^{(n)}(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} (\log x)^n dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

である .

ヒント : 積分の中に微分が入ればよいので , 講義プリントの $p.37$, 積分記号下の微分 (ルベーグの収束定理の系) を用いよ .