数理論理学 (2017/6/29) 公理に関する補足事項

公理系の具体例

数学的な内容を表現する論理外の公理については, 授業で深入りするわけにはいかない. ここで具体例をいくつか紹介する.

■群の公理系　これは「代数学 I」で学んだ群の定義を群の言語 $\{e,\ \cdot\ , (\ )^{-1}\}$ で書いたもの.

$$\forall x \forall y \forall z \big(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \big)$$
$$\forall x \big((x \cdot e = x) \land (e \cdot x = x) \big)$$
$$\forall x \big((x \cdot x^{-1}) = e \land (x^{-1} \cdot x = e) \big)$$

ここで第 2 式は通常の (形式化されない) 数学では

$$x \cdot e = e \cdot x = x$$

と書くが, 形式化された言語における論理式の先日の定義に従うかぎり, これでは論理式になっていない. なので, ここでは二つの等式 $x \cdot e = x$ と $e \cdot x = x$ に分けてある. 第 3 式も同様.

■単位元をもつ可換環の公理系　これは「代数学 II」で現在進行中の話ではないかと思う.

a. 足し算について可換な群であること:

$$\forall x \forall y \forall z \big(x + (y + z) = (x + y) + z \big)$$
$$\forall x \forall y (x + y = y + x)$$
$$\forall x (x + 0 = x)$$
$$\forall x (x + (-x) = 0)$$

b. 掛け算について可換な半群 (モノイド) であること:

$$\forall x \forall y \forall z \big(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \big)$$
$$\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$$
$$\forall x (x \cdot 1 = x)$$

c. 掛け算が足し算に分配すること:

$$\forall x \forall y \forall z \big(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \big)$$

d. 零環を排除するための公理: (この論理式を環の公理系に含めない場合もある.)

$$\neg(0 = 1)$$

■順序の公理系　これは 2 変数の述語記号 1 個からなる言語 $\{\leq\}$ における次の公理系

$$\forall x \big(x \leq x \big)$$
$$\forall x \forall y \big((x \leq y \land y \leq x) \to x = y \big)$$
$$\forall x \forall y \forall z \big((x \leq y \land y \leq z) \to x \leq z \big)$$

要するに「集合と位相 I」で学んだ反射律・反対称律・推移律を形式言語で書いたもの.

量化記号 $\exists$ の公理について

ざっと言って, 存在量化 $\exists$ の扱いは 3 とおり考えられる.

(1) すべての $\exists$ を $\neg\forall\neg$ に置き換えて $\forall$ だけで済ませる
(2) $\exists$ と $\neg\forall\neg$ の同値性を公理で書く
(3) きちんと $\exists$ に関して $\forall$ と同様の公理を入れる

それぞれについて簡単に述べる.

(1) すべての $\exists$ を $\neg\forall\neg$ に置き換えて $\forall$ だけで済ませる

テキストはこの流儀を採用している. $\exists x\varphi$ と書いてある (ように見える) ところには, 本当は $\neg\forall x(\neg\varphi)$ と書いてあるのだ, と規約して, 正式な構文から $\exists$ を完全追放する. この流儀において $\exists$ は, カッコの省略と同様, 読みやすくするための省略記法, いわゆる syntax sugar にすぎない. 量化記号の公理は $\forall$ に関するものだけでよい.

(2) $\exists$ と $\neg\forall\neg$ の同値性を公理で書く

すべての論理式 φ について, $\exists x\varphi$ と $\neg\forall x(\neg\varphi)$ が同値であることを主張する論理式

$$\Big(\big(\neg\forall x(\neg\varphi)\big) \to (\exists x\varphi)\Big) \wedge \Big((\exists x\varphi) \to \big(\neg\forall x(\neg\varphi)\big)\Big)$$

を論理の公理として追加する.

(3) きちんと $\exists$ に関して $\forall$ と同様の公理を入れる

すべての論理式 φ について次の 2 種類の論理式を, 論理の公理として追加する:

(i) $\forall x(\varphi \to \psi) \to \big((\exists x\varphi) \to \psi\big)$, ただし, 変数 x は ψ に自由変数として出現しないものとする.
(ii) $\varphi(t) \to \exists x\varphi(x)$, ただし, t は φ の自由変数 x への代入条件をみたす項だとする.