数理論理学 (2017/6/22) 命題論理に関する補足事項

■論理的同値性　命題論理の論理式 A と B が**論理的に同値**であるとは, すべての真理値割当てに対して A と B が同じ値をもつことだとする. (つまり A と B の真理値表が同じ結果を与えることだとする.) このことを, 記号で

$$A \equiv B$$

と書こう.

例:　(i) $(X_1 \wedge X_2) \vee ((\neg X_1) \wedge (\neg X_2))$ と $(X_1 \to X_2) \wedge (X_2 \to X_1)$ は論理的に同値である.

$(X_1$	$\wedge$	$X_2)$	$\vee$	$((\neg$	$X_1)$	$\wedge$	$(\neg$	$X_2))$
0	0	0	**1**	1	0	1	1	0
0	0	1	**0**	1	0	0	0	1
1	0	0	**0**	0	1	0	1	0
1	1	1	**1**	0	1	0	0	1

$(X_1$	$\to$	$X_2)$	$\wedge$	$(X_2$	$\to$	$X_1)$
0	1	0	**1**	0	1	0
0	1	1	**0**	1	0	0
1	0	0	**0**	0	1	1
1	0	1	**1**	1	1	1

トートロジーはすべて互いに論理的に同値である. 以下, あるトートロジーを任意に固定してそれを $\top$ と呼び, $\neg\top$ を $\bot$ と呼ぶことにする. ($\top$ は “トートロジー” と読み, $\bot$ は “矛盾” と読む)

論理的同値についてはいろいろな公式が成立する. あげはじめるとキリがないが, たとえば,

$$\begin{array}{rrr}
A \wedge B \equiv B \wedge A, & A \vee B \equiv B \vee A, & (\text{交換法則}) \\
A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C), & A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C, & (\text{結合法則}) \\
A \wedge A \equiv A, & A \vee A \equiv A, & (\text{冪等法則}) \\
A \wedge (A \vee B) \equiv A, & A \vee (A \wedge B) \equiv A, & (\text{吸収法則}) \\
A \wedge \top \equiv A, & A \vee \bot \equiv A, & (\text{単位元}) \\
A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C), & A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C), & (\text{分配法則}) \\
A \wedge (\neg A) \equiv \bot, & A \vee (\neg A) \equiv \top, & (\text{矛盾律/排中律}) \\
\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B), & \neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B), & (\text{de Morgan の法則})
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
A \equiv \top \to A, & \neg A \equiv A \to \bot, \\
A \to B \equiv (\neg B) \to (\neg A), & (A \wedge B) \to C \equiv (A \to C) \wedge (B \to C), \\
A \vee B \equiv (\neg A) \to B, & A \to B \equiv (\neg A) \vee B, \\
A \to (B \to C) \equiv (A \wedge B) \to C, & \neg(\neg A) \equiv A, \\
\cdots & \cdots
\end{array}$$

結合法則 $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ のおかげで, 構文ではなく真理値を考えているかぎり, $A \wedge (B \wedge C)$ と $(A \wedge B) \wedge C$ を区別する必要がない. このような場合は, 両者を同一視して, 単に

$$A \wedge B \wedge C$$

と書くことにしよう. 構文上どちらかハッキリさせる必要がある場合, $A \wedge B \wedge C$ とは $(A \wedge B) \wedge C$ のことを意味するものと決めておけばよい. $A \vee (B \vee C)$ と $(A \vee B) \vee C$ についても同様. ただし結合法則をみたさない $\to$ については, 混乱を避けるために, このような略記をしないことにする.

■**真理関数とその表現**　真理値の集合 $\{0,1\}$ の n 個の直積集合 $\{0,1\}^n$ から $\{0,1\}$ への関数のことを n 入力の**真理関数**という. $\{0,1\}^n$ が 2^n 個の要素からなるので, n 入力の真理関数は全部で 2^{2^n} 個ある.

命題変数 $X_1,\ldots,X_n$ からなる命題論理の論理式 $A(X_1,\ldots,X_n)$ は自然に n 入力の真理関数を表現している. たとえば $A(X_1,X_2)$ として $(\neg X_1)\wedge(\neg X_2)$ を考えれば, それは次のような真理関数を定める.

入力		出力
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

つまり, 命題論理の論理式の真理値表から, 真理関数が定まる. $(\neg X_1)\wedge(\neg X_2)$ と論理的に同値な $\neg(X_1\vee X_2)$ も同じ真理関数を表現していることに注意しよう.

逆に, どんな n 入力の真理関数に対しても, それを表現する n 変数 $X_1,\ldots,X_n$ からなる命題論理の論理式が存在する.

■**選言標準形**　「A かつ B」$(A\wedge B)$ を A と B の**連言**といい, 「A または B」$(A\vee B)$ を A と B の**選言**という.

命題変数 $X_1,\ X_2,\ \ldots$ あるいはその否定 $\neg X_1,\ \neg X_2,\ \ldots$ の有限個の連言を **and 節** という. たとえば $X_1\wedge X_2$ や $X_1\wedge(\neg X_2)\wedge X_3$ は and 節である. 有限個の and 節の選言を**選言標準形** (disjunctive normal form, DNF) という. たとえば

$$(X_1\wedge X_2)\vee((\neg X_1)\wedge(\neg X_2))$$

は選言標準形である.

どんな真理関数も, 選言標準形で表現できる.