ブロック・イデアルのソース加群とコホモロジー環

愛媛大学理学部　佐々木 洋城 (Sasaki, Hiroki)
Faculty of Science,
Ehime University

1 はじめに

ここでは, Brauer 対応で対応するブロック・イデアルのコホモロジー環の包含関係について考察する. 以下では

- G を有限群
- k は標数 $p > 0$ の代数的閉体で, p は $|G|$ を割り切る
- B を群環 kG の block ideal
- D を B の defect 群

とする.

本報告は, 昨年の第 49 回代数学シンポジウムでの報告の続きである. 報告集 [11] も参照されたい. なお, この報告には記述が不完全なところがあった. 本報告の最後に訂正を付記する.

2 Brauer 圏とコホモロジー環

定義 2.1 (D, e_D) を Sylow B-subpair とする. subpairs $(Q, e_Q), (R, e_R) \subseteq (D, e_D)$ に対して,

$$T_G((Q, e_Q), (R, e_R)) = \{ x \in G \mid {}^x(Q, e_Q) \subseteq (R, e_R) \}$$

とおく. $x \in T_G((Q, e_Q), (R, e_R))$ に対して, ${}^xQ \leqslant R$ であるから, 写像

$$c_x : Q \to R; a \mapsto {}^xa = xax^{-1}$$

が定義される. そこで, (D, e_D) に含まれる B-subpairs (Q, e_Q) を対象とし, 対象 (Q, e_Q) から対象 (R, e_R) への射は c_x, $x \in T_G((Q, e_Q), (R, e_R))$, であるとして, 圏 $\mathscr{F}_{(D,e_D)}(G, B)$ を定義する. このを B の ((D, e_D) における)Brauer 圏とよぶ.

定義 2.2 (D, e_D) を Sylow B-subpair とする. B のコホモロジー環 $H^*(G, B)$ を

$$H^*(G, B) = \{ \zeta \in H^*(D, k) \mid \mathrm{res}_{Q^{x^{-1}}}\zeta = \mathrm{res}_Q \zeta \quad \forall Q \leqslant D,\ \forall x \in T_G((Q, e_Q), (D, e_D)) \}$$

と定義する. これは, Brauer 圏 $\mathscr{F}_{(D,e_D)}(G, B)$ の不変量である.

Brauer 対応で対応する blocks のコホモロジー環にある関係を調べたい.

最近の R. Kessar, M. Linckelmann, and G. R. Robinson [6] の Proposition 2.3 によれば, 例えば

定理 2.1 G, B, D をいままでと同様とし, G の部分群 H は $N_G(D)$ を含み, さらに, D のある部分群 Q を正規化し, $QC_G(Q)$ を含むと仮定する. kH の block ideal C は D を defect 群としてもち, $C^G = B$ であると仮定する. このとき, (D, e_D) を Sylow B-subpair とすれば, (D, e_D) は Sylow C-subpair であるが, $\mathscr{F}_{(D,e_D)}(H, C) \subseteq \mathscr{F}_{(D,e_D)}(G, B)$ が成立ち, 特に

$$H^*(G, B) \subseteq H^*(H, C).$$

3 ブロックの source module

Alperin, Linckelmann, and Rouquier [1] に従って, ブロックの source module を説明する.

G と G^{op} との直積 $G\times G^{\mathrm{op}}$ を群環 kG に次のように作用させる:

$$(x, y)\alpha = x\alpha y \quad \alpha \in kG, x, y \in G.$$

この作用により $G\times G^{\mathrm{op}}$ は G に transitive に作用し, 1 の固定部分群は

$$\Delta G = \{\, (x, x^{-1}) \mid x \in G \,\}$$

である. 従って, $k[G\times G^{\mathrm{op}}]$- 加群としての同型

$$kG \xrightarrow{\sim} k_{\Delta G}^{G\times G^{\mathrm{op}}}; x \mapsto (x, 1) \otimes 1$$

がある.

定義 3.1 B は $k[G\times G^{\mathrm{op}}]$- 加群として, $\Delta D = \{\, (a, a^{-1}) \mid a \in D \,\}$ を vertex にもつ. $G\times D^{\mathrm{op}} \geqslant \Delta D$ であるから, 直既約 $k[G\times D^{\mathrm{op}}]$- 加群 X で

$$X \,\Big|\, B_{|G\times D^{\mathrm{op}}}, \quad \Delta D = \mathrm{vtx}\, X$$

であるものが存在する. この X を B の source module とよぶ.

source module は source idempotent と同等の概念である. すなわち, ある source idempotent $i \in B^D$ によって

$$X = kGi$$

と表される.

source module X の Brauer construction

$$X(D) = X^D \Big/ \sum_{Q<D} \mathrm{Tr}_Q^D X^Q \simeq kC_G(D)\,\mathrm{Br}_D^G(i)$$

は直既約左 $kC_G(D)$- 加群である. ゆえに $kC_G(D)$ の block idempotent e_D で

$$e_D X(D) = X(D)$$

をみたすものがある. (D, e_D) は Sylow B-subpair である.

source module $X = kGi$ が定める Sylow B-subpair (D, e_D) に関して定義されるコホモロジー環 $H^*(G, B)$ を, source idempotent $i \in B^D$ の "point" γ (すなわち, γ は i の $U(B^D)$-共役類) を用いて, $H^*(G, B, D_\gamma)$ とか, $H^*(G, B; X)$ と書く. しかし, 考えている source module $X = kGi$ が明らかなときは, 単に $H^*(G, B)$ と書く.

B の source module X は, (B, kD)- 両側加群であるから, Hochshild コホモロジー環の transfer 写像

$$t_X : HH^*(kD) \to HH^*(B)$$

を引き起こすが, これは, さらに, normalized transfer 写像 T_X を引き起こし, X に対して定められた Sylow B-subpair (D, e_D) から定められるコホモロジー環 $H^*(G, B; X)$ は次のように, $HH^*(B)$ の X-stable subalgebra $HH^*_X(B)$ に埋め込まれる：

$$H^*(G, B; X) \overset{\delta_D}{\rightarrowtail} HH^*_{X^*}(kD) \overset{T_X}{\xrightarrow{\sim}} HH^*_X(B).$$

ゆえに, 先の定理 2.1の状況では, ある (B, C)- 両側加群から引き起こされる $HH^*_X(B)$ から $HH^*_Y(C)$ への transfer 写像によって, 次の図式を可換にできるか, ということを調べたい：

$$\begin{tikzcd} H^*(G, B) \arrow[r] \arrow[d, hook] & HH^*_X(B) \arrow[d, dashed] \\ H^*(H, C) \arrow[r] & HH^*_Y(C) \end{tikzcd} .$$

一昨年のこの短期共同研究と昨年の代数学シンポジウムでは, その加群の候補として, tensor 積 $B \otimes_{kH} C$ を考えた.

ここでは, Alperin, Linckelmann, and Rouquier [1] による加群を考察する.

4 相対射影元と Brauer 対応

4.1 相対射影元

ここでは, R を可換環とし, A, B, C を対称 R- 多元環とする.

X を (A, B)- 両側加群とする. ${}_AX$, X_B は有限生成射影的であると仮定する. 関手

$$\begin{aligned} {}_XS &: {}_B\mathrm{mod}_C \to {}_A\mathrm{mod}_C; M \mapsto X \otimes_B M, \\ {}_XT &: {}_A\mathrm{mod}_C \to {}_B\mathrm{mod}_C; L \mapsto X^* \otimes_A L \end{aligned}$$

は biadjoint pair である. すなわち, 任意の ${}_BM_C$, ${}_AL_C$ に対して, 自然変換

$$\begin{aligned} \varphi_{L,M} &: {}_A(X \otimes_B M, L)_C \xrightarrow{\sim} {}_B(M, X^* \otimes_A L)_C \\ \psi_{M,L} &: {}_B(X^* \otimes_A L, M)_C \xrightarrow{\sim} {}_A(L, X \otimes_B M)_C \end{aligned}$$

がある. この自然変換は A, B の対称化形式に依存して定められる.

特に, $\eta_X : B \to X^*\otimes_A X$, $\varepsilon_{X^*} : X^*\otimes_A X \to B$ を次によって定義する:

$$\begin{aligned}\varphi_{X,B} : {}_A(X, X)_B &\xrightarrow{\sim} {}_B(B, X^*\otimes_A X)_B\\ \mathrm{Id}_X &\mapsto \eta_X,\\ \psi_{B,X} : {}_B(X^*\otimes_A X, B)_B &\xrightarrow{\sim} {}_A(X, X)_B\\ \varepsilon_{X^*} &\mapsto \mathrm{Id}_X .\end{aligned}$$

この構成法を (B, A)- 両側加群 X^* に適用して, η_{X^*}, ε_X が定義される:

$$\begin{aligned}\varphi_{X^*,A} : {}_B(X^*, X^*)_A &\xrightarrow{\sim} {}_A(A, X\otimes_B X^*)_A\\ \mathrm{Id}_{X^*} &\mapsto \eta_{X^*},\\ \psi_{A,X^*} : {}_A(X\otimes_B X^*, A)_A &\xrightarrow{\sim} {}_B(X^*, X^*)_A\\ \varepsilon_X &\mapsto \mathrm{Id}_{X^*} .\end{aligned}$$

$\pi_X = \varepsilon_X\circ\eta_{X^*}(1_A) \in Z(A)$ を X が定める相対射影元とよび, $\pi_{X^*} = \varepsilon_{X^*}\circ\eta_X(1_B) \in Z(B)$ を X^* が定める相対射影元とよぶ. 写像 $\varepsilon_X\circ\eta_{X^*} : A \to A$ は π_X による積である:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\pi_X\cdot"] \arrow[dr, "\eta_{X^*}"'] & & A \\ & X\otimes_B X^* \arrow[ur, "\varepsilon_X"'] & \end{tikzcd}, \quad \begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\pi_{X^*}\cdot"] \arrow[dr, "\eta_X"'] & & B \\ & X^*\otimes_A X \arrow[ur, "\varepsilon_{X^*}"'] & \end{tikzcd} .$$

注意 4.1 上の η, ε という記号の用い方は, Broué の講義録 [4] に従った. Linckelmann [7] では逆に使われている.

(A, B)- 両側加群 X に付随して trace 写像が定義される. それは, (A, C)- 両側加群 L, L' に対して, 次のように定義される：

$${}^X\mathrm{Tr} : {}_B(X^*\otimes_A L, X^*\otimes_A L')_C \to {}_A(L, L')_C; \alpha \mapsto \varepsilon_X\circ(\mathrm{Id}_X \otimes \alpha)\circ\eta_{X^*}.$$

$$\begin{tikzcd} X^*\otimes_A L \arrow[d, "\alpha"'] \\ X^*\otimes_A L' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L \arrow[d, "\eta_{X^*}\otimes \mathrm{Id}_L"'] \arrow[ddd, bend left=60, "{}^X\mathrm{Tr}\,\alpha"] \\ X\otimes_B X^*\otimes_A L \arrow[d, "\mathrm{Id}_X\otimes \alpha"'] \\ X\otimes_B X^*\otimes_A L' \arrow[d, "\varepsilon_X\otimes \mathrm{Id}_{L'}"'] \\ L' \end{tikzcd}$$

trace 写像の定義により

$${}^X\mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_{X^*}) = \varepsilon_X\circ\eta_{X^*} : A \to A$$

である. この写像を $\widehat{\pi}_X$ と書く. 準同型 $\widehat{\pi}_X$ は ${}_XS$- 射影的である. そこで,

$$\widehat{\pi}_X(1) = \pi_X \in Z(A)$$

を相対 X- 射影元とよぶわけである.

また, Linckelmann [7] による transfer 写像は

$$t_X : {}_B(B, B)_B \to {}_A(A, A)_A ; \beta \mapsto \varepsilon_X \circ (\beta \otimes \mathrm{Id}_{X \otimes_B X^*}) \circ \eta_{X^*} = {}^X\mathrm{Tr}(\beta \otimes \mathrm{Id}_X)$$

と定義されるから, ${}_B(B, B)_B$ を $Z(B)$ と同一視し, ${}_A(A, A)_A$ を $Z(A)$ と同一視すれば, 相対 X- 射影元 π_X は X が定める transfer 写像による像である:

$$t_X^0 : Z(B) \to Z(A); 1 \mapsto \pi_X .$$

trace 写像や transfer 写像は自然に Ext 群や Hochshild コホモロジー環の写像を引き起こす. これらも, trace 写像や transfer 写像とよばれ, 同じ記号で表される.

4.2 Brauer 対応

$H \leqslant G$ とし, kH の block ideal $C = kHf$ の G への Brauer 対応が定義されているとし, $B = C^G$ とおく. ω_B, ω_C をそれぞれ, ブロック B, C が定める $Z(kG)$, $Z(kH)$ の 1 次の線形表現とする. $M = B \otimes_{kH} C$ とおく. transfer 写像 $t_H^{kG} : Z(kG) \to Z(kH)$ は $\sum_{x \in G} \alpha_x x \mapsto \sum_{y \in H} \alpha_y y$ と写すから, 条件 $C^G = B$ は結局, 次の図式の右側の可換な三角形を導く:

$$\begin{tikzcd}
Z(B) \arrow[r, hook] \arrow[d, "t_{M^*}"'] & Z(kG) \arrow[d, "t_H^{kG}"'] \arrow[dr, "\omega_B"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"' near start] & \\
Z(C) & Z(kH) \arrow[l, "\cdot f"'] \arrow[r, "\omega_C"'] & k \\
Z(C) \arrow[u, equal] \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd} .$$

この図式から, $\pi_{M^*} \in Z(C)$ が可逆であることがわかる.

もし, さらに, C の defect 群が $B = C^G$ の defect 群でもあるとき, $\pi_M \in Z(B)$ も可逆である (Broué [3, Corollary 2.2.3]).

5 Brauer correspondence

以後, 特に断らない限り

- H を G の部分群で

$$DC_G(D) \leqslant H$$

であるものと仮定する.

- C を kH の block ideal とし,

$$C^G = B, \quad D \text{ は } C \text{ の defect 群である}$$

と仮定する.

5.1 Brauer 対応と source module

Y を C の source module とする. $N_{G\times D^{\mathrm{op}}}(\Delta D) = \Delta D\big(C_G(D)\times 1\big) \leqslant H\times D^{\mathrm{op}}$ であるから, 直既約 $k[H\times D^{\mathrm{op}}]$- 加群 Y の $G\times D^{\mathrm{op}}$ への Green correspondent が定義される. これを X とおく.

命題 5.1 X は $B = C^G$ の source module である.

Sylow C-subpair は Sylow B-subpair でもあるが, Y が定める Sylow C-subpair は X が定める Sylow B-subpair である. それは次の補題に基づく.

補題 5.2 $kC_G(D)$- 加群として

$$X(D) \simeq Y(D)$$

が成り立つ.

5.2 (B, C)- 両側加群 L

block ideal C を $k[H\times H^{\mathrm{op}}]$- 加群とみると, 直既約であって, ΔD は, その vertex である. $k[H\times H^{\mathrm{op}}]$- 加群 C の $G\times H^{\mathrm{op}}$ への Green correspondent を L とおく. このとき

補題 5.3 (i) $L \mid B_{|G\times H^{\mathrm{op}}}$.
(ii) $M = B\otimes_{kH} C$ とおくと, $M \simeq L \oplus O\,(\mathscr{X}(G\times H^{\mathrm{op}}, \Delta D, H\times H^{\mathrm{op}}))$.

この補題と相対射影性の理論を用いて, 鍵となる次の事実が示される.

定理 5.4 L が定める相対射影元 $\pi_L \in Z(B)$ および L^* が定める相対射影元 $\pi_{L^*} \in Z(C)$ は可逆である.

加群 L は次のように Y と X を結び付ける.

定理 5.5 Y を C の source module とし, B の source module X を Y の $G\times D^{\mathrm{op}}$ への Green correspondent ととる. このとき

(i)
$$L^*\otimes_B X \equiv Y \mod \mathscr{Y}(G\times D^{\mathrm{op}}, \Delta D, H\times D^{\mathrm{op}}).$$
(ii)
$$L\otimes_{kH} Y \simeq X\oplus Z$$
と直和分解され, Z の直既約直和因子は $\mathscr{X}(G\times D^{\mathrm{op}}, \Delta D, H\times D^{\mathrm{op}})$- 射影的で, trivial source をもつ.
(iii) $L \mid X^{G\times H^{\mathrm{op}}}$.
(iv) $D \lhd H$ ならば, $L\otimes_{kH} Y \simeq X$.

注意 5.1 この事実は, Alperin, Linckelmann, and Rouquier [1, Theorem 5] とその証明で述べられていること整理しなおしたものであると言ってよい.

次は L が splendid な加群であることを示す.

命題 5.6 $L \mid X\otimes_{kD} Y^*$ が成り立つ.

加群 L が引き起こす Hochschild コホモロジー環の transfer 写像が期待される性質をもつためには, L, X, Y の tensor 積が定める相対射影元がすべて可逆であってほしいのだが, 実際

命題 5.7 (i) $\pi_{L\otimes_C Y}, \pi_{Y^*\otimes_C L^*}$ は可逆である.
(ii) $\pi_{X^*\otimes_B L\otimes_C Y}, \pi_{X^*\otimes_B L}$ は可逆である.
(iii) $\pi_{Y^*\otimes_C L^*\otimes_B X}, \pi_{L^*\otimes_B X}$ は可逆である.

今までは, block C の source module Y を初めに定めて, それに対して Green 対応によって, block B の source module X を定めた. 定理 5.5 (ii) により, $X \mid L_{|G\times D^{\mathrm{op}}}$ である. 逆に, 初めに block B の source module X を定めるときは, $L \mid B_{|G\times D^{\mathrm{op}}}$ であるから, B の source module X を $X \mid L_{|G\times D^{\mathrm{op}}}$ ととることができることに注意して

命題 5.8 X を上のようにとると, X の $G\times H^{\mathrm{op}}$ への Green correspondent Y は C の source module である.

6 コホモロジー環

B, D, H, C はいままでと同様とする. C の source module Y をとり, B の source module X を Y の $G\times D^{\mathrm{op}}$ への Green correspondent ととる. Sylow C-subpair (D, e_D) を $e_D Y(D) \neq 0$ ととる. 補題 5.2 により, (D, e_D) は Sylow B-subpair でもあり, さらに, $e_D X(D) \neq 0$ であった. 従って, この Sylow subpair で定められるコホモロジー環は次のように埋め込まれる：

$$H^*(G,B) \overset{\delta_D}{\rightarrowtail} HH^*_{X^*}(kD), \quad H^*(H,C) \overset{\delta_D}{\rightarrowtail} HH^*_{Y^*}(kD).$$

定理 5.4, 命題 5.7 により, 関係するすべての相対射影元は可逆である. この事実と Hochshild コホモロジー環における stable subalgebras についての解析から, 可換図式

$$\begin{tikzcd}
H^*(G,B) \arrow[r, tail, "\delta_D"] & HH^*_{X^*}(kD) \arrow[r, shift left, two heads, tail, "R_X"] & HH^*_X(B) \arrow[l, shift left, two heads, tail, "R_{X^*}"] & \\
& HH^*_{X^*\otimes_B L\otimes_C Y}(kD) \arrow[u, hook] \arrow[r, shift left, two heads, tail, "R_X"] \arrow[d, equal] & HH^*_{L\otimes_C Y}(B) \arrow[u, hook] \arrow[l, shift left, two heads, tail, "R_{X^*}"] \arrow[r, hook] \arrow[d, shift left, two heads, tail, "R_{L^*}"] & HH^*_L(B) \arrow[d, shift left, two heads, tail, "R_{L^*}"] \\
& HH^*_{Y^*\otimes_C L^*\otimes_B X}(kD) \arrow[r, shift left, two heads, tail, "R_Y"] \arrow[d, hook] & HH^*_{L^*}(C)\cap HH^*_Y(C) \arrow[l, shift left, two heads, tail, "R_{Y^*}"] \arrow[u, shift left, two heads, tail, "R_L"] \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & HH^*_{L^*}(C) \arrow[u, shift left, two heads, tail, "R_L"] \\
H^*(H,C) \arrow[r, tail, "\delta_D"'] & HH^*_{Y^*}(kD) \arrow[r, shift left, two heads, tail, "R_Y"] & HH^*_Y(C) \arrow[l, shift left, two heads, tail, "R_{Y^*}"] &
\end{tikzcd}$$

を得る. この図式と命題 5.6, および Linckelmann [7, Theorem 5.7] を用いて

定理 6.1 B, D, H をいままでと同様とし, さらに, H は D のある部分群 Q を正規化し, $QC_G(Q)$ を含むと仮定する. (D, e_D) を Sylow B-subpair とし, $(Q, e_Q) \leqslant (D, e_D)$ とする. kH の block ideal C を $QC_G(Q)$ の block e_Q を被覆するただ一つの block とする. このとき,

(i) $C^G = B$ であり, D は C の defect 群である. 従って, (D, e_D) は Sylow C-subpair である.

(ii) C の source module Y を $e_D Y(D) = Y(D)$ のようにとる. B の source module X を Y の $G \times D^{\mathrm{op}}$ への Green correspondent ととる. さらに, C の $G \times H^{\mathrm{op}}$ への Green correspondent を L とおくと, 次の可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
H^*(G, B) \arrow[r, tail, "\delta_D"] \arrow[d, hook] & HH^*_{X^* \otimes_B L \otimes_C Y}(kD) \arrow[r, tail, two heads, shift left, "R_X"] \arrow[d, hook] & HH^*_{L \otimes_C Y}(B) \arrow[l, tail, two heads, shift left, "R_{X^*}"] \arrow[d, tail, "R_{L^*}"] \\
H^*(H, C) \arrow[r, tail, "\delta_D"'] & HH^*_{Y^*}(kD) \arrow[r, tail, two heads, shift left, "R_Y"] & HH^*_Y(C) \arrow[l, tail, two heads, shift left, "R_{Y^*}"]
\end{tikzcd} .$$

参考文献

[1] J. L. Alperin, M. Linckelmann, and R. Rouquier, Source algebras and source modules, J. Algebra **239** (2001), no. 1, 262–271.

[2] D. J. Benson and M. Linckelmann, Vertex and source determine the block variety of an indecomposable module, J. Pure Appl. Algebra **197** (2005), 11–17.

[3] M. Broué, Remarks on blocks and subgroups, J. Algebra (1978), 228–232.

[4] ———, On representations of symmetric algebras: an introduction, Notes by M. Stricker, Mathematik Department ETH Zürich, 1991.

[5] H. Kawai and H. Sasaki, Cohomology algebras of blocks of finite groups and Brauer correspondence, submitted to Algebras and Representation Theory.

[6] R. Kessar, M. Linckelmann, and G. R. Robinson, Local control in fusion systems of p-blocks of finite groups, J. Algebra **257** (2002), no. 2, 393–413.

[7] M. Linckelmann, Transfer in Hochschild cohomology of blocks of finite groups, Algebr. Represent. Theory **2** (1999), 107–135.

[8] ———, Varieties in block theory, J. Algebra **215** (1999), 460–480.

[9] ———, On splendid derived and stable equivalences between blocks of finite groups., J. Algebra (2001), 819–843.

[10] H. Nagao and Y. Tsushima, Representations of finite groups, Academic Press, New York, London, 1989.

[11] 佐々木 洋城, 有限群のブロック・イデアルのコホモロジー環と Brauer 対応, 第 49 回代数学シンポジウム報告集, 2005, pp. 203–217.

佐々木 [11] の訂正

(i) 203 ページ 下から 2 行目 ${}^a x$ とあるのはもちろん ${}^x a$ の誤り.

(ii) 207 ページ 上から 5 行目の最後の 1 字から始まる文「このような i は単数群 $U(B^D)$ による共役を除いて一意的であって, source 冪等元とよばれている.」の「単 数群 $U(B^D)$ による共役を除いて一意的であって,」を削除する. 正確には $\mathrm{Br}_D(i) = \mathrm{Br}_D(i') \neq 0$ である冪等元 i, $i' \in B^D$ は B^D のある可逆元によって共役である.

(iii) 『第 4 節 Hochshild コホモロジー環の transfer 写像と stable elements』において, (A, B)-両側加群 X が片側加群とみて有限生成であることの仮定を付け加える. また, X が定める trace 写像の記号は本報告では [11] のものと違う. どちらがより適切であるかはよくわからない.