Modular representation theory and stable decomposition of classifying spaces

富山国際大学・地域学部　亀子　正喜（Masaki Kameko）

Faculty of Regional Science, Toyama University of International Studies

1　はじめに

Theorem 1.1 (Mislin) H が G の部分群であるとき、次は同値.

(1) $\mathrm{res}^G_H : H^*(G,\mathbb{F}_p) \to H^*(H,\mathbb{F}_p)$ は同型

(2) H は G の *p-fusion* を *control* する。

この定理の証明において Mislin は有限群の分類空間の間の写像全体のなす空間の弱ホモトピーに関するトポロジーの Miller の定理（しばしば Sullivan 予想と呼ばれるもの）を用いています。

Alperin はこの Mislin の定理をトポロジーの結果も用いずに証明せよという問題を提起しました。これについては今回のこの有限群のコホモロジーの研究集会における飛田明彦氏の報告を参照していただきたいと思います。

Symonds はこの Alprein の問題に関連して Mislin の定理の証明を考えました。Symonds の論文 [9] では Sullivan 予想を用いてはいないのですが、それでもトポロジーの別の定理、それはしばしば Segal 予想と呼ばれているもの、を用いています。この Segal 予想と呼ばれているものは分類空間の安定コホモトピー群という一般コホモロジーについての命題なのですが、群論への応用という点ではLewis-May-Mclure による分類空間のスペクトラムの間の射のホモトピー類についての結果の方がわかりやすいかとも思われます。

Symonds は [9] の Theorem 4.1 の証明の中で

$$b(P,P)\otimes\mathbb{F}_p \xrightarrow{\beta} \{BP_+,BP_+\}\otimes\mathbb{F}_p \xrightarrow{\gamma} \mathrm{End}(H^*(P.\mathbb{F}_p))^{opp}$$

は nilpotent kernel をもつという Harris-Kuhn [6] の結果を引用しています。ここで P は有限 p-群です。 Harris-Kuhn は可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}_p[\mathrm{End}(P)] \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathrm{End}(H^*(P, \mathbb{F}_p)) \\
b(P,P) \otimes \mathbb{F}_p \arrow[r, "\beta"] & \{BP_+, BP_+\} \otimes \mathbb{F}_p \arrow[u, "\gamma"']
\end{tikzcd}$$

において $\gamma \circ \beta \circ \alpha$ が nilpotent kernel をもつことを示すために

(1) β は同型

(2) γ は nilpotent kernel をもつ

を示しています。ここで $H_*(P, \mathbb{F}_p) = H_*(BP_+; \mathbb{F}_p)$ であり

$$\mathrm{End}(H_*(P)) = \mathrm{End}(H^*(P, \mathbb{F}_p))^{opp}$$

です。そして Harris-Kuhn は (1) は Segal 予想から帰結される Lewis-May-Mclure の結果であると書いています。この部分を理解するために必要な言葉、有限群の分類空間、スペクトラム、そしてそのついでに一般コホモロジーについて簡単に説明していきます。

2 分類空間

有限群 G に対して位相空間 BG を

$$EG = \lim_{\to} E^{(n)}G$$

の商空間 EG/G として定義します。ここで

$$E^{(n)}G = G * \cdots * G \quad (n \text{ 個の } G \text{ のジョイン})$$

でジョインは $X \times I \times Y$ を以下のようにつぶしたものです。（ここで I は区間 $[0,1]$ です。）

$$X * Y = X \times I \times Y / \sim, \quad (x, 0, y) \sim (x', 0, y), (x, 1, y) \sim (x, 1, y')$$

です。群 G が X, Y に自由に作用していれば

$$g(x,t,y) = (gx,t,gy)$$

で定義される群 G の自由な作用が $X*Y$ にも入ります。さらに X, Y がそれぞれ m, n-連結であるとすると $X*Y$ は $(m+n-1)$-連結になるので

$$\pi_i(E^{(n)}G) = 0$$

が $i \leq n$ について成り立ちます。したがってそのホモトピー群に関して

$$\pi_i(EG) = 0$$

がすべての i について成り立ちます。このことからファイバー系列

$$G \to EG \to BG$$

のホモトピー完全列を考えると次の命題を得ます。

Proposition 2.1

$$\pi_i(BG) = \begin{cases} G & (i=1) \\ 0 & (i \neq 1) \end{cases}$$

このような定義を採用すると分類空間とは群とその間の準同型のカテゴリーから位相空間とその間の連続写像のホモトピー類へカテゴリーへの共変関手であることが一目瞭然です。分類空間の定義自体いろいろありますが、群のコホモロジーとの関連ではこの定義が一番わかりやすいのではないかと思います。またこの Proposition 1.1 は分類空間 BG の基本群をとれば元の群 G を得ることができるといっているのですから、分類空間をとることによって失われるような G についての情報はないことを示しています。しかしながら分類空間の間の連続写像のホモトピー類全体のなかで群の準同型から誘導されるものはごく一部分かもしれません。ところが、後で出てくる分類空間のスペクトラムの間の射のホモトピー類全体を考えるとその大部分（？）は群の準同型から誘導されるものとトランスファーとよばれるものの合成になっているという結果が Segal 予想からの帰結として得られます。

さてこの分類空間という名前の由来ですが、これはパラコンパクトハウスドルフ空間 X 上の主 G-束 ξ の同型類を分類するところからきています。

Theorem 2.2 パラコンパクトハウスドルフ空間 X 上の主 G-束 ξ と X から分類空間 BG への連続写像のホモトピー類の間には *1:1* の対応がある。

上のようにして得られる分類空間はさらに CW 複体とよばれるホモトピーを考える上で比較的取り扱いやすい位相空間になります。また、群の準同型から得られる連続写像は胞体写像にもなります。以下、位相空間は CW 複体とします。

この分類空間 BG に対してさらに別の関手を用いて代数的なものを対応させることができます。上の基本群もその一つです。それ以外にも反変関手としては特異コホモロジー、 K 理論、コボルディズム理論、安定コホモトピーなどいろいろなものがあります。これらは一般コホモロジーとよばれ、ある程度統一的に取り扱うことができます。

3　一般コホモロジー

まず、コホモロジーとは何だったのかを思い出してみましょう。群 G とこの群 G が作用する加群 R があるとき、R の G-加群としてのレゾリューションをとり、それに Hom 関手を適用してできるコチェイン複体のコホモロジーをとったものでした。群 G の R への作用が自明の場合はこれは分類空間の特異コチェイン複体のコホモロジーと一致します。一見、構成方法はかなり違うように見えますが、結局は同じものになります。位相空間に対してもそのコホモロジーの定義の仕方はいく通りもあります。これらのコホモロジーに共通する性質を抜き出して、公理論的にコホモロジーを考えたものとして Eilenberg-Steenrod の公理系と呼ばれるものがあります。

Theorem 3.1 R をアーベル群とする。基点付き CW 複体とその間の基点を保つ連続写像のカテゴリーからアーベル群とその間の準同型のカテゴリーへの反変関手 $\{\tilde{h}^i(-)|i \in \mathbb{Z}\}$ で次の公理を満たすものは存在すれば一意である。これを R 係数の簡約コホモロジーという。

(1) A を X の部分複体とするとき $\tilde{h}^i(X/A) \to \tilde{h}^i(X) \to \tilde{h}^i(A)$ は完全

(2) $\tilde{h}^{i+1}(\Sigma X) = \tilde{h}^i(X)$

(3) $f \simeq g$ ならば $f^* = g^*$

(4) （次元公理）$i \neq 0$ に対して $\tilde{h}^i(S^0) = 0$ かつ $i = 0$ に対して $\tilde{h}^i(S^0) = R$

(5) （加法性公理）$\tilde{h}^i(\vee_\alpha X_\alpha) = \prod_\alpha \tilde{h}^i(X_\alpha)$

もちろん上の条件を満たすような反変関手が実際に存在するのかは自明ではありません。実際に関手を作ってみてそれが上の条件をすべて満たすことを確認しなければなりません。ところが、実際に CW 複体のコホモロジーの計算となると、上の公理から出発して計算できる場合がたくさんあります。その意味では、コホモロジーの定義の仕方はそれほど重要ではありません。（特異コチェイン複体を作ってもいきなり無限次元ベクトル空間が出てきてしまいますから定義に基づいて計算なんてできません。４年前のこの有限群のコホモロジーの研究集会での柳田伸顕氏の motivic cohomology に関しての発言「定義を知らなくても計算はできる」は名言だと思っています。これは一般コホモロジーについても当てはまります。）

上の (4) 次元公理を取り払ったものが一般コホモロジーと呼ばれているものです。次元公理がなくなりますので、一般には一意性も証明できなくなりますが、一般コホモロジーの間の自然変換で S^0 上で同型を誘導するようなものがあれば一意になります。この一般コホモロジーを統一的に取り扱うためと基点付き CW 複体の懸垂によって変わらない性質をとらえるためにスペクトラムとその間の安定写像のホモトピー類というものが考えられるようになりました。

4　スペクトラム

一般コホモロジーを統一的にとらえるため、そして 基点付き CW 複体の懸垂 Σ によって変わらない性質、たとえば、その一般コホモロジーをとらえるために CW 複体 X ではなくそのスペクトラム （$\{\Sigma^n X\}_{n\geq 0}$ の形のものを考える方がよいということがわかってきました。しかしスペクトラムのカテゴリーがどうあるべきかというのは結構ややこしくて、May 一派は 1990 年代に入ってから新しい定義、構成を提案したりしています。[7] 参照。スペクトラムや一般コホモロジーに関する文献として [1], [2], [8] をあげておきます。

有限群の分類空間に関連する部分については旧来の CW スペクトラムのカテゴリーで間に合います。CW スペクトラムは CW 複体の列 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$

と胞体写像 $\sigma_n : \Sigma E_n \to E_{n+1}$ で構成されます。この間の射にホモトピー類を考えることができます。ここでは $\{X, Y\}$ でスペクトラムの間の射のホモトピー類を表します。また CW 複体 X に対して同じ文字 X で $X_n = \Sigma^n X$ $(n \geq 0)$, $X_n = *$ $(n < 0)$ からなるスペクトラムを表します。また基点なし CW 複体 X に対し X_+ で disjoint な基点を付け加えた 基点つき CW 複体を表します。たとえば X, Y が有限複体の場合には

$$[X, Y] \to [\Sigma X, \Sigma Y] \to [\Sigma^2 X, \Sigma^2 Y] \to \cdots$$

の極限が $\{X, Y\}$ になります。ここで、

(1) $[X, Y]$ は集合

(2) $[\Sigma X, \Sigma Y]$ は群

(3) $[\Sigma^n X, \Sigma^n Y]$ $(n \geq 2)$ はアーベル群

になります。そして一般コホモロジーの誘導準同型はみなこの $\{X, Y\}$ を経由しているということです。この意味で $\{X, Y\}$ の方が $\mathrm{Hom}(\tilde{h}^*(Y), \tilde{h}^*(X))$ により近いといえます。

またスペクトラムのカテゴリーでは p-進完備化ができます。

Proposition 4.1 スペクトラム X に対してスペクトラムの射

$$\eta : X \to X^\wedge$$

があり

(1) $\pi_i(X^\wedge)$ は *p-torsion* 以外の *torsion* を持たず、

(2) $\eta^* : H^*(X^\wedge; \mathbb{F}_p) \to H^*(X; \mathbb{F}_p)$ は同型。

ふつうのホモトピーと同じようにかきましたがこれはスペクトラムのホモトピー群は $\pi_i(X) = \{S^i, X\}$ で定義します。ここで S^i は i 次元球面のスペクトラムです。

普通の CW 複体のカテゴリーと CW スペクトラムのカテゴリーの違いはというと

(1) Σ^{-1} が常に存在する

(2) $\{X, Y\}$ はアーベル群

でなにかと取り扱いが便利になることを期待させます。
一般コホモロジーとスペクトラムの間の関係は以下の Brown の表現定理で明確になります。

Theorem 4.2 (Brown) 前述の条件を満たす一般コホモロジー $\tilde{h}^*(-)$ にたいしてあるスペクトラム E があって

$$\tilde{h}^i(X) = \{\Sigma^i X, E\}.$$

逆に $\{\Sigma^i X, E\}$ は一般コホモロジーである。

Example 4.3 $K(\mathbb{Z}, n)$ を Eilenberg-MacLane 空間とする。すなわち、$i = n$ ならば

$$\pi_i(K(\mathbb{Z}, n)) = \mathbb{Z}$$

で $i \neq n$ ならば

$$\pi_i(K(\mathbb{Z}, n)) = 0.$$

このとき $\Sigma K(\mathbb{Z}, n) \to K(\mathbb{Z}, n+1)$ をホモトピー同値 $K(\mathbb{Z}, n) \to \Omega K(\mathbb{Z}, n+1)$ のアジョイントとすると $H\mathbb{Z}_n = K(\mathbb{Z}, n)$ $(n \geq 1)$, $H\mathbb{Z}_n = *$ $(n \leq 0)$ とおくと

$$H^i(X; \mathbb{Z}) = \{\Sigma^i X_+, H\mathbb{Z})$$

である。

5 Segal 予想とその帰結

有限群 G の分類空間 BG の一般コホモロジーは群 G のいろいろな性質をとらえると期待されます。実際、複素表現環 $R(\mathbb{C}G)$ の生成元である表現 $G \to U(n)$ に対してそれが誘導する分類空間の間の写像 $BG \to BU = BU(\infty)$ を対応させます。これは $R(\mathbb{C}G) \to \tilde{K}^0(BG_+)$ を誘導するのですが Atiyah-Segal の定理としてあるイデアルで完備化すると

$$R(\mathbb{C}G)^\wedge \to \tilde{K}^0(BG_+)$$

は同型であることがいえます。
この類似を安定コホモトピーについて考えたものが Segal 予想とよばれるものです。複素表現環の代わりにバーンサイド環を考えます。バーンサイド環 $b(G)$ は有限 G-集合の同型類で生成される自由加群です。さ

らに Segal 予想から導かれる Lewis -May-Mclure の結果についていうために $b(G',G)$ を考えます。$b(G)$ は G の部分群 H に対応する G/H の形の有限集合から生成されます。H と H' が共役であれば G/H と G/H' は G-集合として同型になりますから $b(G)$ の基底が G の部分群に 1:1 に対応するわけではありません。そして $b(G',G)$ は G' の部分群 H' と H' から G への準同型に対応する元で生成されます。このバーンサイド環 $b(G)=b(G,\{1\})$ から $\pi_S^0(BG_+)$ への準同型は部分群 H に対応するトランスファーと呼ばれるスペクトラムの間の射 $BG_+ \to BH_+$ と $H \to \{1\}$ から誘導される $BH_+ \to S^0 = B\{1\}_+$ の合成として得られます。後者は CW 複体の間の写像として存在しますが前者はスペクトラムの間の射としてしか存在しません。同様に $b(G',G)$ から $\{BG'_+ .BG_+\}$ への準同型は $BG_+ \to BH_+$ と $BH'_+ \to BG_+$ の合成です。

このトランスファーについても各種の構成方法があります。Benson の本 [4] や Becker-Gottlieb [3] の論文を参考文献としてあげておきます。またトランスファーと呼ばれているものの中にはスペクトラムの射として実現できないものもあります。

Theorem 5.1 あるイデアルにより完備化すると

$$b(G)^\wedge \to \pi_S^0(BG_+)$$

は同型で、さらに $i<0$ に対して $\pi_S^i(BG_+)=0.$

Theorem 5.2 あるイデアルにより完備化すると

$$b(G',G)^\wedge \to \{BG'_+, BG_+\}$$

は同型。

この定理は分類空間のスペクトラムの間の射のホモトピー類がトランスファーと群の準同型から誘導されるものだけで近似できるといっています。

一般に空間の間の写像のホモトピー類を決定するのは難しいとされています。たとえば一般の $n>0$ に対して $\{S^n, S^0\}$ を計算するという問題（球面の安定ホモトピー群の決定）はとても解決できそうにない未解決問題の一つです。

P, P' が p-群のときには上の完備化は p-進完備化と compatible で

$$b(P',P)\otimes \mathbb{F}_p \longrightarrow \{BP'_+, BP_+\}\otimes \mathbb{F}_p$$

が同型になります。これが Harris-Kuhn が引用している Segal 予想からでてくる Lewis-May-Mclure の結果です。これはトポロジストにとってはありがたい定理です。上の右辺の $\{BP'_+, BP\}$ は一見どうなるのかわからない代物ですが左辺の $b(P', P)$ は少なくとも有限次元のベクトル空間であることはすぐにわかります。

6　ベキ等元と分類空間の分解

最後にベキ等元と分類空間のスペクトラムとしての分解の話をして、γ が nilpotent kernel をもたないという結果の解説をして締めくくります。

$e^2 = e$ となる $\{X, X\}$ のベキ等元 e を考えます。このとき $1 - e$ も $\{X, X\}$ に存在し、

$$\{X, X\} = e_*\{X, X\} \oplus (1 - e)_*\{X, X\}$$

というアーベル群の直和分解があります。ここで

$$\tilde{h}^i(Y) = e_*\{\Sigma^i Y, X\}$$

とおくと $\tilde{h}^*(-)$ は一般コホモロジーになり Brown の表現定理から

$$\{Y, eX\} = e_*\{Y, X\}$$

となるスペクトラム eX が存在することがわかります。さらにスペクトラムのレベルで

$$X = eX \vee (1 - e)X$$

とかくことができます。eX の構成方法としては空間のレベルで mapping telescope をとるという方法もあります。この方法であればコホモロジーも容易に計算できて

$$H^*(eX) = e^* H^*(X)$$

であることがわかります。

もしもベキ等元 $e \in \{BP^\wedge_+, BP^\wedge_+\} \otimes \mathbb{F}_p$ の $\{BP^\wedge_+, BP^\wedge_+\}$ へのリフト e' が存在すればこれにより $BP^\wedge_+$ を $e'BP^\wedge_+ \vee (1 - e')BP^\wedge_+$ のようにスペクトラムのレベルで分解することができます。これにより modular representation theory と stable splitting の話を結びつけることができます。これが Harris-Kuhn の仕事のテーマです。このことについてもう少し深く

触れようと思って講演の題目を決めたのですが力不足のため目標を達成できませんでした。有限群の分類空間のスペクトラムの分解については Benson の解説 [5] があります。

最後に β が nilpotent kernel を持たないことを確認しておきましょう。ここでは簡単のため、Harris-Kuhn は使っていない p-進完備化 $BP_+^\wedge$ を考えます。

ここで必要となるトポロジーの定理としてはスペクトラムに関する Whitehead の定理です。

Theorem 6.1 すべての $i \in \mathbb{Z}$ に対して $\pi_i(X) = 0$ ならば $X \simeq *$.

コホモロジーの言葉に置き換えるとこの Whitehead の定理は（Serre の mod $\mathcal{C}$ 理論から）次のようになります。

Proposition 6.2 $H^*(X^\wedge; \mathbb{F}_p) = 0$ ならば $X^\wedge \sim *$.

代数的な Lemma として次の 2 つのものを用意します。

Lemma 6.3 R_0 を有限次元の $\mathbb{F}_p$ 上の代数とします。このとき $f \in R_0$ が *nilpotent* でなければ f^γ がベキ等元となるような γ が存在する。

証明: R_0 は有限集合なので $f^{\alpha+\beta} = f^\beta$ となる α, β が存在する。$\gamma = k\alpha \geq \beta$ となるように k と γ をとる。このとき、

$$f^{2\gamma} = f^{k\alpha+\beta+(\gamma-\beta)} = f^{(k-1)\alpha+\beta+(\gamma-\beta)} = \cdots = f^{\beta+(\gamma-\beta)} = f^\gamma$$

が成り立つ。(証明終)

Lemma 6.4 $R_n = R/F^{n+1}R$ とおく。

$$R = \lim_{\leftarrow} R/F^{n+1}R$$

ならば $e_0 \in R_0$ で $e_0^2 = e_0$ は R へリフトする。つまり $e_n \in R_n$ で

(1) $\pi_n(e_n) = e_{n-1}$,

(2) $e_n^2 = e_n$

となる e_n $(n \geq 1)$ が存在する。

証明: n についての帰納法で示す。$a \in R_n$ で $\pi_n(a) = e_{n-1}$ となるものを選ぶ。これに対し、$e_n = a + (1-2a)(a^2 - a)$ とする。このとき、

$$e_n^2 - e_n = 0$$

が成り立つことが $(a^2 - a)^2 \in F^{2n}R$ であることから直接計算で確かめられる。(証明終)

γ が nilpotent kernel を持たないことの証明: さて、γ が nilpotent kernel を持たないとしてみます。f が nilpotent でなく $\gamma(f) = 0$ であるとします。$\{BP^\wedge_+, BP^\wedge_+\}$ は $BP^\wedge_+$ が p-進完備なので p 進フィルトレーションに関して完備になります。上の f^γ は R_0 でのベキ等元でこれは $\{BP^\wedge_+, BP^\wedge_+\}$ へリフトします。これを e とおくと $e^* : H^*(BP^\wedge_+; \mathbb{F}_p) \to H^*(BP^\wedge_+; \mathbb{F}_p) = 0$ なので $H^*(eBP^\wedge_+; \mathbb{F}_p) = 0$ となり $eBP^\wedge_+ \simeq *$ となり $e \simeq *$ となり f がベキ零となりはじめの仮定と矛盾します。(証明終)

参考文献

[1] 荒木　捷朗, 一般コホモロジー. 紀伊國屋書店 (1975).

[2] , J. F. Adams, Stable Homotopy and Generalized Homology, Chicago Univ. Press (1995)

[3] Becker and Gottlieb, *The transfer maps and fibre bundles.* Topology 14 (1975), 1–12.

[4] D. Benson, Repersentations and cohomology II, Cambridge Univ. Press (1991)

[5] D. Benson, *Stably splitting BG*, Bull. Amer. math. Soc. **33** (1996), 189–198.

[6] J. Harris and N. Kuhn, *Stable decompositions of classifying spaces of finite abelian p-groups.* Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **103** (1988), 427–449.

[7] Elmendorff, Kriz, Mandell and may, Modern foundations for stable homotopy theory. in Handbook of aglebraic Topology (edited by I.M.James), Elsevier Science B.V. (1995)

[8] R. Switzer, Algebraic Topology–Homology and Homotopy, Springer (1975).

[9] P. Symonds, *Mackey functors and control of fusion*. Bull. London Math. Soc. **36** (2004), 623–632.