弱コンパクト基数

藤田 博司

起稿:2009 年 1 月 30 日
脱稿:2009 年 2 月 14 日*

概要

弱コンパクト基数について勉強したことのまとめです. 新しいオリジナルな結果はありません.

はじめに

本当は『玄妙基数と精妙基数』というノートを先に書きかけたのですが, その準備段階であるはずの弱コンパクト基数の概説が, 書き始めると面白くて, 調子に乗ってずいぶん長くなってきました. そこで, ひとまずその部分を独立させ, 弱コンパクト基数についてまとめた文書を作ってしまおうと考えたわけです.

このノートでは, 弱コンパクト基数を特徴づけるいくつかの性質と, それに関連する集合論のいろいろな結果を概観します. 主な結果はつぎのようにまとめることができます.

定理 0.1 不可算基数 κ について次の条件 (i)–(vi) は同値:

(i) κ は強到達不能基数であり, どんな κ-木も長さ κ の鎖をふくむ (第 1 節);
(ii) 分割の性質 $\kappa \to (\kappa)^2_2$ が成立する (第 2 節);
(iii) 任意の自然数 $m \geq 1$ と基数 $\lambda < \kappa$ について分割の性質 $\kappa \to (\kappa)^m_\lambda$ が成立する (第 2 節);
(iv) 無限言語 $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ が弱コンパクト性をもつ (第 3 節);
(v) 任意の集合 $A \subset V_\kappa$ に対して, 構造 $(V_\kappa, \in, A)$ は整礎的な初等終端拡大をもつ (第 3 節);
(vi) κ は Π^1_1-記述不可能である (第 4 節). ◀

さしあたって弱コンパクト基数の定義としては上記定理 0.1 の条件 (i) を採用します.

定義 0.2 基数 κ が強到達不能で, どんな κ-木も長さ κ の鎖をふくむとき, κ を **弱コンパクト基数** (weakly compact cardinal) とよぶ. ◀

1 アロンシャイン木

まず, 木について復習しましょう.

定義 1.1 集合 T 上の二項関係 $<_T$ が無反射的半順序づけ (無反射的で推移的) であって, 任意の要素 $t \in T$ について $\{s \in T \mid s <_T t\}$ が $<_T$ によって整列順序づけされているとき, $<_T$ は T 上の **木順序づけ** (tree-ordering) であるといい, 構造 $(T, <_T)$ を **木** (tree) という. ◀

* 最終組版日 2009 年 2 月 14 日 (`time: 805`)

よくあるように, 正式には “木 $(T,<_T)$” というべきところを, 文脈によって “木 T” といって済ませてしまうことがあります.

定義 1.2 木 $(T,<_T)$ において, 要素 $t\in T$ の前にくる要素全体の集合 $\{s\in T \mid s<_T t\}$ の $<_T$ のもとでの順序型を, T における t の **階数** (rank) といい $\mathrm{rk}(t,T)$ であらわす.[*1] 順序数 α に対して, 集合 $\mathrm{Lev}_\alpha(T)=\{\,t\in T \mid \mathrm{rk}(t,T)=\alpha\,\}$ とおき, これを木 T の α**-レベル** (α-level) という. $T_\alpha=\bigcup_{\xi<\alpha}\mathrm{Lev}_\xi(T)$ とおき, $T_\alpha=T$ となる最小の順序数 α のことを T の **高さ** (height) といい $\mathrm{ht}(T)$ であらわす. ◀

定義 1.3 木 $(T,<_T)$ の **鎖** (chain) とは $<_T$ によって全順序づけされるような T の部分集合のことをいう. どの二要素のあいだにも $<_T$ で順序がついていないような T の部分集合のことを $(T,<_T)$ の **反鎖** (antichain) とよぶ. ◀

たとえば $t\in T$ の前にくる要素の全体 $\{\,s\in T \mid s<_T t\,\}$ は鎖の例であり, $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ は反鎖の例になっています. 木順序づけの定義により, T の鎖は $<_T$ によって整列順序づけされています.

定義 1.4 κ を基数とする. κ**-木** (κ-tree) とは, 木 $(T,<_T)$ で, 条件 $\mathrm{ht}(T)=\kappa$ と $\forall\alpha<\kappa\big(|T_\alpha|<\kappa\big)$ をみたすもののことをいう. ◀

長さ κ の鎖の数で特徴づけされる κ-木の二つのクラスが, とりわけ重要です.

定義 1.5 κ を基数とする. 長さ κ の鎖が 1 本もない κ-木 のことを κ**-アロンシャイン木** (κ-Aronszajn tree) という. ◀

定義 1.6 κ を基数とする. 長さ κ の鎖が κ^+ 本以上存在するような κ-木 のことを κ**-クレパ木** (κ-Kurepa tree) という. ◀

歴史上の理由により, $\aleph_1$-アロンシャイン木や $\aleph_1$-クレパ木のことを, 単に アロンシャイン木とか クレパ木とか呼んでいます. **ケーニヒの無限補題** (König's Infinity Lemma) ($\to$ 5.A) により, $\aleph_0$-アロンシャイン木は存在しません. また, 0 と 1 の有限列全体のなす完全二進木 ${}^{<\omega}\{0,1\}$ を考えればわかるとおり, $\aleph_0$-クレパ木は存在します. じゃあ κ が不可算基数の場合はどうなるんだ, という疑問をもてば, その人はすでに現代集合論の世界に足を踏み入れています.

定理 1.7 アロンシャイン木 (つまり $\aleph_1$-アロンシャイン木) は存在する.

[証明] [*2] 有理数の集合で, 通常の順序のもとで整列集合になっていて, しかも上に有界であるものの全体を W と書く. $\boldsymbol{a}\in W$ のときその順序型を $\|\boldsymbol{a}\|$ と書く. 可算順序数 α に対し $W_\alpha=\big\{\,\boldsymbol{a}\in W \mid \|\boldsymbol{a}\|=\alpha\,\big\}$ と書く. $\alpha<\beta<\omega_1$ かつ $\boldsymbol{b}\in W_\beta$ のとき, $\boldsymbol{b}$ の順序型 α の始切片を $\boldsymbol{b}\restriction\alpha$ と書く. W の要素のあいだに

$$\boldsymbol{a}<_W\boldsymbol{b}\overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow}\boldsymbol{a}\ \text{は}\ \boldsymbol{b}\ \text{の始切片}$$

によって順序づけ $<_W$ を与えると, これが木順序づけであることは明らかであり, $(W,<_W)$ は木となり W_α はその α-レベルとなる. 有理数全体の集合が可算集合であることから, W は不可算な鎖を含みようがない. こうして $(W,<_W)$ は欲しい条件のほとんどをみたすが, $\alpha\geq\omega$ のときには α-レベルは濃度 $2^{\aleph_0}$ をもつから, これは ω_1-木ではない. そこで W の部分集合で $<_W$ のもとで ω_1-木になるようなものを取り出すことにする.

いま $\boldsymbol{a}\in W$ と $r\in\mathbb{Q}$ について, $\forall q\in\boldsymbol{a}\big(q<r\big)$ となっていることを $\boldsymbol{a}<r$ と書き, $\exists s<r\big(\boldsymbol{a}<s\big)$ となっていることを $\boldsymbol{a}\ll r$ と書くことにする. あきらかに $\boldsymbol{a}\ll r\ \leftrightarrow\ \sup\boldsymbol{a}<r$ であるから, 有理数の順序の

[*1] こういうときの常として, $\mathrm{rk}(t,T)$ は木 T が文脈からあきらかなときには $\mathrm{rk}(t)$ と略記されます.
[*2] スペッカー (Ernst Specker)[12] による. イェック本 [5], デブリン本 [2] も同様の証明.

自己稠密性と W の定義により, $\boldsymbol{a} \in W$ なら ある r について $\boldsymbol{a} \ll r$ となり, また $\boldsymbol{a} \ll r$ ならばある r' について $\boldsymbol{a} \ll r' < r$ となる.

これから W_α の部分集合 D_α を α に関する帰納法で構成していく. それに先立って, W そのものの整列順序づけ $\triangleleft$ が与えられていることと, すべての極限順序数 $\alpha \in \mathrm{Lim}(\omega_1)$ に対して $(\alpha)_n \nearrow \alpha$ となるような近似列 $\langle (\alpha)_n \mid n < \omega \rangle$ が選ばれていることを仮定する.

まず $D_0 = W_0$ とする. (ここはそれ以外にやりようはない.) $\alpha = \beta + 1$ のときは, $\boldsymbol{b} \in D_\beta$ と $\boldsymbol{b} < r$ をみたす有理数 r から $\boldsymbol{b} \cup \{r\}$ をつくり, その全体を $D_{\beta+1}$ とすればよい. そして α が極限順序数のときは $\boldsymbol{a} \in D_\alpha$ となるための条件を次のように定める:

(1) $\boldsymbol{a} \in W_\alpha$ であり, すべての $\xi < \alpha$ にたいして $\boldsymbol{a} \restriction \xi \in D_\xi$ である;

(2) つぎのような自然数 n_0 と有理数 r_0 がとれる: $n \geq n_0$ ならば, $\boldsymbol{a} \restriction (\alpha)_n$ は,

$$\boldsymbol{a} \restriction (\alpha)_{n-1} <_W \boldsymbol{a}' \ \wedge \ \boldsymbol{a}' \ll r_0$$

をみたす $\boldsymbol{a}' \in W_{(\alpha)_n}$ のうちで $\triangleleft$-最小のものである.

このように可算順序数 α に対して D_α を構成し, それから $D = \bigcup_{\alpha < \omega_1} D_\alpha$ とする. すると,

$$\alpha < \beta < \omega_1 \ \wedge \ \boldsymbol{b} \in D_\beta \ \rightarrow \ \boldsymbol{b} \restriction \alpha \in D_\alpha$$

となることはあきらか.

各レベル D_α が空でないことを示すために, 次の命題 $(*)$ を可算順序数 α に関する帰納法で証明する:

$(*)$ $\quad \xi < \alpha < \omega_1$, $\boldsymbol{x} \in D_\xi$, $\boldsymbol{x} \ll r$ のとき, $\boldsymbol{a} \in D_\alpha$ を $\boldsymbol{x} <_W \boldsymbol{a} \ll r$ となるようにとれる.

これは $\alpha = 0$ のときは自明だし, α が後続順序数の場合も問題ない. 以下, α が極限順序数の場合を考える. ξ と $\boldsymbol{x}$ と r が与えられたとして, $\xi < (\alpha)_{n_0}$ となる番号 n_0 と $\boldsymbol{x} \ll r' < r$ となる有理数 r' を固定する. このとき帰納法の仮定により $\boldsymbol{x} <_W \boldsymbol{a}' \ll r'$ をみたす $\boldsymbol{a}' \in D_{(\alpha)_{n_0}}$ が存在する. そこで, そのような $\boldsymbol{a}'$ のうち $\triangleleft$-最小なものを $\boldsymbol{a}_{n_0}$ とする. そのあと $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$ に対して順次

$$\boldsymbol{a}_{n-1} <_W \boldsymbol{a}' \ll r' \ \wedge \ \boldsymbol{a}' \in D_{(\alpha)_n}$$

をみたす $\boldsymbol{a}'$ のうち $\triangleleft$-最小のものを $\boldsymbol{a}_n$ とする. そうすると, $\boldsymbol{a} = \bigcup_{n<\omega} \boldsymbol{a}_n$ について $\boldsymbol{a} \in D_\alpha$ となることは D_α の作り方からあきらかだし, $\boldsymbol{a} \ll r$ が成立することも $\sup \boldsymbol{a} \leq r' < r$ だから問題ない. これで $(*)$ の帰納法による証明が完了し, D_α が空でないだけでなく, それに先立つ D_ξ の任意の要素が D_α の要素にまで拡大できることもわかる.

最後に, 各 D_α が可算であることをたしかめよう. あきらかに $|D_0| = 1$ である. $\alpha = \beta + 1$ のときは, D_α の要素は D_β の要素 $\boldsymbol{\beta}$ と有理数 r から $\boldsymbol{b} \cup \{r\}$ という形で得られるから $|D_{\beta+1}| \leq |D_\beta \times \mathbb{Q}| = |D_\alpha| \cdot \aleph_0$ となる. また, α が極限順序数のときは, D_α の要素 $\boldsymbol{a}$ はなんらかの自然数 n_0 と始切片 $\boldsymbol{a} \restriction (\alpha)_{n_0} \in D_{(\alpha)_{n_0}}$ と上界 r_0 によって決定されているはずなので, $|D_\alpha| \leq |\omega| \cdot \sup_{n<\omega} |D_{(\alpha)_n}| \cdot |\mathbb{Q}| = \aleph_0 \cdot \sup_{n<\omega} |D_{(\alpha)_n}|$ である. そこで, α に関する帰納法によって, すべての D_α は可算集合となる. ◀

定義 1.8 κ-アロンシャイン木が存在しない無限基数 κ のことを **木の性質** (tree property) をもつ基数とよぶ. ◀

もしも κ が特異基数で $\beta = \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ となっているなら,

$$\gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_\xi < \cdots \quad (\xi < \beta)$$

かつ $\kappa = \sup_{\xi<\beta}\gamma_\xi$ となるような列 $\langle \gamma_\xi \mid \xi < \beta \rangle$ がとれます．このとき $T = \bigcup_{\xi<\beta}(\{\xi\} \times \gamma_\xi)$ とおき $\langle \xi, \gamma \rangle <_T \langle \eta, \delta \rangle$ を $\xi = \eta$ かつ $\gamma < \delta$ となることだと定めれば, $(T, <_T)$ は κ-アロンシャイン木[*3]となります. したがって, 特異基数は木の性質をもちません.

定理 1.9　スペッカー (Ernst Specker) **の定理**　正則基数 λ が $\lambda = 2^{<\lambda}$ をみたすならば, λ^+-アロンシャイン木は存在する.

[証明]　定理 1.7 のスペッカーによる証明を踏襲する．有理数の順序集合のかわりに, 濃度が λ で自己稠密で任意の区間が λ^+ 未満の任意の順序型をもつ整列集合を含みうるような全順序 $(\mathbb{Q}_\lambda, <)$ をもちいる (たとえば有限列の集合 ${}^{<\omega}\lambda$ を辞書式に順序づけたものが使える.)　極限順序数 $\alpha < \lambda^+$ に対しては, 狭義単調で連続な近似列 $\langle (\alpha)_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\alpha) \rangle$ が選ばれているものとする．極限順序数 α に対する D_α の構成の条件 (2) は, $\mathrm{cf}(\alpha) = \lambda$ のときにだけ, 次の形で要請する:

(2)′ つぎのような $\xi_0 < \lambda$ と $r_0 \in \mathbb{Q}_\lambda$ がとれる: $\xi \geq \xi_0$ ならば, $\boldsymbol{a} \restriction (\alpha)_\xi$ は,

$$\forall \eta < \xi \Big(\boldsymbol{a} \restriction (\alpha)_\eta <_W \boldsymbol{a}' \Big) \ \wedge \ \boldsymbol{a}' \ll r_0$$

をみたす $\boldsymbol{a}' \in W_{(\alpha)_\xi}$ のうちで $\lhd$-最小のものである.

そして α が極限順序数でも, $\mathrm{cf}(\alpha) < \lambda$ のときは, $\boldsymbol{a} \in D_\alpha$ となる条件は (1) だけでよいものとする.

そのうえで, 定理 1.7 の証明と同様にして D_α をすべての $\alpha < \lambda^+$ に対して構成し, $D = \bigcup_{\alpha<\lambda^+} D_\alpha$ とおく．各レベル D_α の濃度が λ 以下であることを確かめるさいに, $\mathrm{cf}(\alpha) < \lambda$ である極限順序数の段階では, $\boldsymbol{a}$ が $\langle \boldsymbol{a} \restriction (\alpha)_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\alpha) \rangle$ から決まると考えて,

$$|D_\alpha| \leq \left| \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)} D_{(\alpha)_\xi} \right| \leq \left(\sup_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)} |D_{(\alpha)_\xi}| \right)^{\mathrm{cf}(\alpha)}$$

と計算する．ここで, 基数 λ に関する仮定 $\lambda^{<\lambda} = \lambda$ が必要になる．この仮定は λ が正則で $2^{<\lambda} = \lambda$ をみたすという定理の条件と同等である. ◀

定理 1.7 や定理 1.9 の証明で, W_α の「上に有界」という条件を「最小上界が存在する[*4]」と強めても, 同じ手順で λ^+-アロンシャイン木を構成することができることに注意しましょう．いま, D をそのようにして得られた λ^+-アロンシャイン木とし, 各 $r \in \mathbb{Q}_\lambda$ に対して

$$A_r = \left\{ \boldsymbol{a} \in D \;\middle|\; \sup \boldsymbol{a} = r \right\}$$

とおくと, A_r は $<_W$ に関して反鎖であり, しかも D は λ 個の反鎖 A_r の和としてあらわすことができます. このような λ^+-木のことを 特殊 λ^+-木と呼びます.

定義 1.10　κ より少ない個数の反鎖に分割できるような κ-木のことを **特殊 κ-木** (special κ-tree) という. ◀

どんな鎖も反鎖とは高々ひとつの要素しか共有しないから, 特殊 κ-木は κ-アロンシャイン木です．また, 特殊 κ-木とは相容れないタイプの κ-アロンシャイン木の重要なクラスとして κ-ススリン木があります.

定義 1.11　濃度 κ をもつ木が濃度 κ の鎖も反鎖も含まないとき, これを **κ-ススリン木** (κ-Suslin tree) という．単に “ススリン木” といえばそれは $\aleph_1$-ススリン木のことだとする. ◀

[*3] じつは κ-ススリン木 (→定義 1.11) になっています．キューネン本 [7] 第 II 章演習問題 33.

[*4] これはもちろん, 最小上界が有理数なり順序集合 $\mathbb{Q}_\lambda$ の要素なりとして存在するという意味です．数直線においては上に有界な集合は最小上界をもちますが, ここではそれが有理数であることまで要求しています.

木という順序構造のクラスが盛んに研究されるようになったのは, 位相空間論におけるススリン (M. Ya. Suslin) の問題が ススリン木の存在問題に 帰着されたことによるのです. ところが, ススリン木の存在は集合論と独立です. ススリン木の存在する集合論と存在しない集合論の双方のモデルをジェネリック拡大の方法で得る努力が, ダイアモンド原理 $\diamondsuit$ やマーティンの公理 MA などの発見のきっかけになりました. このあたりの事情はキューネン本 [7] に述べられているとおりです. $\aleph_2$-ススリン木の存在しない集合論のモデルも知られています ([8]) が, GCH と $\aleph_2$-ススリン木の不存在と両立するかどうかは, 現在でもわかっていないようです.

さて, 定理 1.9 のおかげで, 一般連続体仮説 GCH のもとでは, λ が正則基数であるかぎり, いつでも 特殊 λ^+-木が存在することになります. 以下に述べるとおり, GCH を仮定しない場合は, このことは一般には成立しません.

ミッチェル (William Mitchell) が大学院生時代にシルバー (Jack Silver) の指導のもとで得た結果によると, 弱コンパクト基数 κ が存在すれば, あるジェネリック拡大において, $\kappa = \aleph_2$ と $\aleph_2$-アロンシャイン木の不存在が成立します. 逆に, $\aleph_2$-アロンシャイン木の不存在からは, ($\mathbf{V}$ の) $\aleph_2$ が 構成可能的集合のクラス $\mathbf{L}$ において弱コンパクト基数になっていることが導かれます. また, 強マーロ基数 κ が存在すれば, あるジェネリック拡大において, $\kappa = \aleph_2$ と 特殊 $\aleph_2$-木の不存在が成立します. 逆に特殊 $\aleph_2$-木の不存在からは, ($\mathbf{V}$ の) $\aleph_2$ が $\mathbf{L}$ において強マーロ基数になっていることが導かれます. 以上の結果についての詳細は [11] あるいは [5, pp.568–570] をみてください. ここでも 弱コンパクト基数が木の性質をもつ基数の存在に大きくかかわっています.

あとは, λ が特異基数である場合の λ^+-アロンシャイン木の存在問題です. 論文 [10] において, マギドア (Menachem Magidor) とシェラ (Saharon Shelah) が, 無限個の強コンパクト基数の最小上界 λ が特異基数であれば λ^+ が木の性質をもつことを示しました. したがって, λ が正則基数であるという仮定がなければ, たとえ $2^\lambda = \lambda$ であっても λ^+-アロンシャイン木を構成できるとは限らないわけです. 同じ論文でマギドアとシェラは $\aleph_{\omega+1}$ が木の性質をもつような集合論のモデルを与えました. これは, とても強い (ひとつの膨大基数の上に無限個の超コンパクト基数があるというのにほぼ相当する) 巨大基数公理をみたすモデルを基礎モデルにしてジェネリック拡大をとるものです. これらの結果における巨大基数の仮定は, いくぶんか弱めうる可能性はありますが, 完全にとりのぞいたり, $\mathbf{L}$ を基礎モデルにとれるところまで弱めたりはできないようです.

イエンゼン (Ronald B. Jensen) の研究の結果として $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ の場合には, すべての後続型基数 λ^+ について特殊 λ^+-木や λ^+-ススリン木や λ^+-クレパ木が存在することがわかっています. そのうえ, $\mathbf{L}$ においては GCH が成立していますから, $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ のときは, 木の性質をもつ基数は弱コンパクト基数に限られることになります. 詳細についてはデブリン (Keith J. Devlin) の本 [2] の第 IV 章をみてください.

* * *

このあとしばらくは, 木の性質に関連して次節以降で利用する[*5]テクニカルな素材の準備がつづきます.

木 $(T, <_T)$ の **部分木** (subtree) とは, T の部分集合 S のうち 順序づけ $<_T$ に関して下向き (左向き?) に閉じている, すなわち条件

$$s \in S \wedge t \in T \wedge t <_T s \rightarrow t \in S$$

をみたすもののことだとします. T のどんな部分集合も順序づけ $<_T$ のもとで再び木になりますが, 木としてのいろいろの属性を調べるにあたっては, ここでいう部分木に話を限ってしまってもかまわない場合が多いの

[*5] 次節以降で利用というのは, 自分のこれからの研究生活のどこかで利用するって意味も含んでいるかもしれませぬ (^^;;

です．しかも S が T の部分木であれば 任意の要素 $s \in S$ について $\mathrm{rk}(s,S) = \mathrm{rk}(s,T)$ が成立するなどの理由で, 議論を部分木に制限したほうが, いろいろ話が簡単になります.

木 $(T, <_T)$ の要素 x と関係 $<_T$ で比較可能な要素全体の集合を $T(x)$ と書くことにしましょう:

$$T(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ t \in T \;\middle|\; t <_T x \vee t = x \vee x <_T t \right\}.$$

これは T の部分木になっています．あきらかに, $\alpha < \mathrm{ht}(T)$ のとき $T = \bigcup\left\{ T(x) \;\middle|\; x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T) \right\}$ となります．ですから κ が正則基数で T が κ-木である場合, $\mathrm{ht}(T(x)) = \kappa$ をみたす要素 x がどのレベルにも少なくともひとつは存在することになります．そして $t <_T u$ なら $T(t) \supseteq T(u)$ なので, $\mathrm{ht}(T(x)) = \kappa$ をみたす要素 $x \in T$ の集合もまた T の部分木になります．この部分木を T' と書きましょう:

$$T' \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{ t \in T \;\middle|\; \mathrm{ht}(T(x)) = \kappa \right\}.$$

このとき, 上に述べた理由で $\mathrm{ht}(T') = \kappa$ が成立します．さらにもっと強く, どの要素もいくらでも高いレベルまで拡大していけることを意味する次の補題が成立します．(階数 $\mathrm{rk}(x)$ が T と T' のどちらで考えても同じであることが, ここでさっそく役立っています.)

補題 1.12 κ を正則基数とし $(T, <_T)$ を κ-木とする．部分木 T' を上に定義されたものとするとき,

$$\forall x \in T' \, \forall \alpha < \kappa \left(\alpha > \mathrm{rk}(x) \;\rightarrow\; T'(x) \cap \mathrm{Lev}_\alpha(T') \neq \emptyset \right)$$

となる．とくに, 任意の $x \in T'$ について $\mathrm{ht}(T'(x)) = \kappa$ である.

[証明] T' の要素 x と順序数 α が与えられて $\mathrm{rk}(x) < \alpha < \kappa$ をみたしているものとしよう．T は κ-木で, $\mathrm{Lev}_\alpha(T(x)) = T(x) \cap \mathrm{Lev}_\alpha(T)$ なので, $|\mathrm{Lev}_\alpha(T(x))| < \kappa$ である．また, $T(x) = \bigcup\left\{ T(y) \;\middle|\; y \in \mathrm{Lev}_\alpha(T(x)) \right\}$ である．これらの木の高さについて

$$\kappa = \mathrm{ht}(T(x)) = \sup\left\{ \mathrm{ht}(T(y)) \;\middle|\; y \in \mathrm{Lev}_\alpha\big(T(x)\big) \right\}$$

が成り立つから, κ の正則性により $\mathrm{Lev}_\alpha(T(x))$ の少なくともひとつの要素 y が $\mathrm{ht}(T(y)) = \kappa$ をみたす．この要素 y は T' に属する x の拡大だから $y \in T'(x) \cap \mathrm{Lev}_\alpha(T')$ である. ◀

定義 1.13 κ-木 $(T, <_T)$ は, 条件

$$|\mathrm{Lev}_0(T)| = 1 \;\wedge\; \forall x \in T \left(\mathrm{ht}(T(x)) = \kappa \right)$$

をみたすとき **うまく刈り込まれた κ-木** (well-pruned κ-tree) とよばれる. ◀

補題 1.12 により, T' から任意の $x_0 \in \mathrm{Lev}_0(T')$ を取り出せば, $T'(x_0)$ は $(T, <_T)$ のうまく刈り込まれた κ-部分木となります．したがって,

補題 1.14 κ を正則基数とし $(T, <_T)$ を κ-木とする．このとき T はうまく刈り込まれた κ-部分木を含む. ◀

あとで述べる定理 1.7 や定理 1.9 の別証明でやって見せるように, 木の構成に際しては, 順序数の列を要素とする木を作ると作業しやすいです．ここで, こうした構成に関連する記号を定義します.

定義 1.15 α を順序数, X を集合とする．定義域が α 未満の順序数で値域が X の部分集合であるような関数全体の集合を ${}^{<\alpha}X$ と書く．s と t を, それぞれ順序数を定義域とする関数とするとき,

$$s \prec t \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{dom}(s) < \mathrm{dom}(t) \wedge s = t \restriction \mathrm{dom}(s)$$

によって順序づけ $\prec$ を定義する.[*6] ◀

[*6] 同じ記号 $\prec$ が, あとで (第 3 節で) まったく違う意味で利用されます．まあ, 混乱の心配はないでしょう.

とくに 集合 X が基数 κ であるときには, ${}^{<\alpha}\kappa$ を高さ α の **完全 κ-進木** (perfect κ-ary tree with height α) といいます. そして, ${}^{<\alpha}\kappa$ の部分木のことを **κ-進木** (κ-ary tree) といいます. とくに, 完全 2 進木 ${}^{<\alpha}2$ とその部分木 (2 進木) が, あとあと重要になってきます.

さて, コレコレシカジカの属性を有する木が「あるかないか」を問題だったとしましょう. それが「ある」ことを示すには, 2 進木でも $\aleph_1$-進木でも, その属性を有する木を構成してやればそれでよいのですが, 「ない」ことを示すのには, 順序数の列をもとにした木を相手にするだけですむかどうかは, 一般にはわかりません. ただし幸いなことに, アロンシャイン木やクレパ木にかんしては, 2 進木だけに話を制限しても大丈夫です. 次にこのことを示しましょう.

補題 1.16 κ を正則基数とし $(T, <_T)$ をうまく刈り込まれた κ-木とする. このとき次の条件 (i)–(iii) をみたす写像 $h : T \to {}^{<\kappa}2$ が存在する:

(i) $\forall x, y \in T \bigl(x <_T y \;\leftrightarrow\; h(x) \prec h(y) \bigr)$;

(ii) $\forall x, y \in T \bigl(\mathrm{rk}(x, T) < \mathrm{rk}(y, T) \;\leftrightarrow\; \mathrm{dom}(h(x)) < \mathrm{dom}(h(y)) \bigr)$;

(iii) 像 $h``T$ は順序づけ $\prec$ のもとで $(T, <_T)$ と同型である[*7].

[証明] T の二つの要素 x と y が $\{ z \in T \mid z <_T x \} = \{ z \in T \mid z <_T y \}$ をみたすときに $x \simeq y$ と書くことにすると, $\simeq$ は T 上の同値関係である. すべての $\simeq$-同値類がなす集合を $\mathcal{C}$ としよう. $\mathrm{rk}(x) = \alpha$ のとき x の属する $\simeq$-同値類は $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ の部分集合である. すなわち, 各同値類はいずれかのレベルに含まれる. α-レベルに含まれる同値類の全体を $\mathcal{C}_\alpha$ としよう.

各同値類 $C \in \mathcal{C}$ に対して, 全単射 $u_C : C \to |C|$ を選ぶ. そして $C \in \mathcal{C}_\alpha$ 全体にわたる $|C|$ の最小上界を δ_α としよう. つねに $\delta_\alpha \geq 1$ である. 要素 $x \in T$ の同値類を C とし 階数を $\alpha = \mathrm{rk}(x)$ とするとき, $\sigma_x \in {}^{\delta_\alpha}2$ を

$$\sigma_x(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi < u_C(x) \text{ のとき}) \\ 0 & (\xi \geq u_C(x) \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する. どの δ_α も 0 でないから, どの σ_x も空な列ではない. こうしてすべての $x \in T$ に対して 2 進列 σ_x が得られたら, 写像 $h : T \to {}^{<\kappa}2$ を階数に関して再帰的に

$$h(x) = \Bigl(\bigcup_{z <_T x} h(z) \Bigr)^\frown \sigma_x$$

によって定義しよう. すると (i) はあきらかに成立する. $\lambda_\alpha = \sum_{\xi \leq \alpha} \delta_\xi$ とすれば, $\alpha < \kappa$ にかんする帰納法により, $\mathrm{rk}(x) = \alpha$ のとき $\mathrm{dom}(h(x)) = \lambda_\alpha$ となること, それに $\alpha < \beta < \kappa$ ならば $\lambda_\alpha < \lambda_\beta < \kappa$ であることががわかる. これで (ii) がわかる. (iii) は (i) からあきらかである. ◀

この補題のようにして, κ-木 T を ${}^{<\kappa}2$ に埋め込んだとします. 像 $h``T$ を含む最小の部分木を S としましょう. このとき

$$S = \Bigl\{ t \in {}^{<\kappa}2 \Bigm| \exists x \in T \bigl(t \prec h(x) \bigr) \Bigr\}$$

かつ

$$\mathrm{Lev}_{\lambda_\alpha}(S) = h``\mathrm{Lev}_\alpha(T)$$

が成立します. 一般に $\alpha < \lambda_\alpha$ なので, $\mathrm{ht}(S) = \sup \lambda_\alpha = \kappa$ かつ

$$|\mathrm{Lev}_\alpha(S)| \leq |\mathrm{Lev}_{\lambda_\alpha}(S)| = |\mathrm{Lev}_\alpha(T)| < \kappa$$

[*7] ただし $h``T$ は ${}^{<\kappa}2$ の部分木になるとは限りません.

となって, κ の正則性により S も κ-木になります.

どの $s \in S$ もある $x \in T$ について $s \prec h(x)$ をみたすので, S の任意の極大鎖 Y に対して $h^{-1}``Y$ は $T$ の極大鎖になります. 逆に, $T$ の任意の極大鎖 $X$ に対して $h``X$ は S において上に有界でない鎖なので, 木順序づけの条件により一意的な S の極大鎖に拡張できます. こうして T の極大鎖と S の極大鎖のあいだに一対一の対応がつきます. 以上のことをまとめると

補題 1.17 κ を正則基数とし $(T, <_T)$ をうまく刈り込まれた κ-木とする. このとき 2 進 κ-木 $(S, \prec)$ と単射 $h : T \to S$ と 狭義に増加する順序数列 $\langle \lambda_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \in {}^\kappa\kappa$ がとれて

(1) $\forall x, y \in T \bigl(x <_T y \ \leftrightarrow \ h(x) \prec h(y) \bigr)$;
(2) $\forall \alpha < \kappa \bigl(h``\mathrm{Lev}_\alpha(T) = \mathrm{Lev}_{\lambda_\alpha}(S) \bigr)$;
(3) $\forall s \in S \, \exists t \in T \bigl(s \prec h(t) \bigr)$;

が成立する. この埋め込み写像 h は S の極大鎖全体の集合から T の極大鎖全体の集合への一対一対応を引き起こす. ◀

あきらかに, T が κ-アロンシャイン木であることと S が κ-アロンシャイン木であることとは同値です. κ-クレパ木についても同様です.[*8] 特殊 κ-木や κ-ススリン木であることはどうでしょうか. これには T の反鎖と S の反鎖の対応, とくに極大反鎖の対応を考える必要があります.

補題 1.18 κ を正則基数とし $(T, <_T)$ をうまく刈り込まれた κ 木とする. $S \subset {}^{<\kappa}2$ と $h : T \to S$ を補題 1.17 のとおりとする. $A \subset T$ を T の反鎖とすれば $h``A$ は $S$ の反鎖であり, しかも, $A$ が極大反鎖なら $h``A$ も極大反鎖である.

[証明] h は順序にかんする埋め込み写像だから, あきらかに $h``A$ は反鎖である. A が T の極大反鎖だったとしよう. 与えられた $s \in S$ に対して $t \in T$ を $s \prec h(t)$ となるようにとる. A の極大性により, この t と比較可能な A の要素 a がある. もしも $t = a$ か $t <_T a$ なら $s \prec h(a)$ となって s と $h(a)$ は比較可能. もしも $a <_T t$ だったら $h(a) \prec h(t)$ かつ $s \prec h(t)$. だが $\prec$ が木順序づけであることにより, このとき $h(a)$ と s は比較可能である. 任意の要素 $s \in S$ が $h``A$ の要素 $h(a)$ と比較可能であるということは $h``A$ が極大反鎖であることを意味する. ◀

こうして T の極大反鎖 A から S の極大反鎖 $h``A$ を得ることができます. 両者の濃度が等しいことはあきらかです. では次に, S の極大反鎖から T の極大反鎖を構成します. $D \subset S$ を $\prec$ にかんする極大反鎖とします. $d \in D$ に対して $h^*(d) = \{ x \in T \mid d \preceq h(x) \}$ とおきます. $h^*(d)$ における極大反鎖 $A_d \subset h^*(d)$ をとりだし, $A = \bigcup_{d \in D} A(d)$ としましょう.

補題 1.19 D と h^* と $\langle A_d \mid d \in D \rangle$ と A を上記のようなものとするとき, A は T における極大反鎖である.

[証明] いま $d_0, d_1 \in D$, $d_0 \neq d_1$ なら $h^*(d_0)$ の要素と $h^*(d_1)$ の要素は互いに比較できない. したがって A は T において反鎖になっている. $x \in T$ が任意に与えられたとしよう. $h(x)$ と比較可能な $d \in D$ をとる. $d \preceq h(x)$ なら定義により $x \in h^*(d)$ だから, x はどれかの $a \in A_d$ と比較可能である. もしも $h(x) \prec d$ なら, 任意の $a \in A_d$ について $h(x) \prec d \preceq h(a)$ より $h(x) \prec h(a)$ したがって $x <_T a$ となる. T の任意の要素は A のある要素と比較可能で, A は極大反鎖である. ◀

補題 1.20 κ を正則基数とする. κ-ススリン木が存在すれば 2 進 κ-ススリン木が存在する.

[証明] κ-ススリン木 $(T, <_T)$ が存在したとする. 補題 1.14 により T はうまく刈り込まれた κ-木であると仮

[*8] 以上の議論と補題 1.20 がキューネン本 [7] 第 II 章演習問題 34 への答えになっています.

定しても一般性は損なわれない．2 進木 S と T の S への埋め込み h を補題 1.17 のようにとる．すると, T が不可算な鎖をもたないので S も不可算な鎖をもたない．$D \subset S$ を極大反鎖とすると, 補題 1.19 のように T の極大反鎖 A が得られる．T が κ-ススリン木なので $|A| < \kappa$ である．任意の $a \in A$ はある $d \in D$ に対して $d \prec h(a)$ をみたすが, D が反鎖で $\prec$ が木順序づけなので, そのような d は各 a ごとに一意的に決まる．また, A の作り方から, 各 $d \in D$ に対してある $a \in A$ が $d \prec h(a)$ をみたすので, a に $d \prec h(a)$ をみたす $d \in D$ を対応させる写像は全射である．ゆえに $|D| \leq |A| < \kappa$ となり, S の反鎖の濃度も κ 未満とわかる．こうして S は κ-ススリン木である．◀

逆に補題 1.17 の条件をみたす S が κ-ススリン木なら T も κ-ススリン木となることは, 補題 1.19 によりあきらかです.

最後に特殊 κ-木の場合ですが, 少なくとも次のことは容易にわかります.

補題 1.21　κ を正則基数とし $(T, <_T)$ をうまく刈り込まれた κ 木とする．$S \subset {}^{<\kappa}2$ と $h : T \to S$ を補題 1.17 のとおりとする．このとき $(S, \prec)$ が特殊 κ-木ならば $(T, <_T)$ も特殊 κ-木である．◀

この補題の逆はどうでしょうか．任意の特殊 κ-木が 2 進特殊 κ-木に埋め込めるのでしょうか?

$* * *$

以下, このセクションの最後までは完全に「オマケ」です．アロンシャイン木の存在を示した定理 1.7 と定理 1.9 の, キューネンによる別証明を紹介します．定理 1.9 をこの方法で証明することは, キューネン本 [7] 第 II 章の演習問題になっています.

[定理 1.7 の別証明][*9]　$S = \left\{ s \in {}^{<\omega_1}\omega \;\middle|\; s \text{ は 1-1 関数} \right\}$ とおく．$(S, \prec)$ が順序型 ω_1 の鎖を含まない高さ ω_1 の木であることはあきらか．しかし, $\alpha \geq \omega$ のときには $(S, \prec)$ の α-レベルは濃度 $2^{\aleph_0}$ をもつから, これは ω_1-木ではない．そこで S の部分 ω_1-木を取り出すことにする.

集合 S の要素 s と t が, 同じ定義域をもち, しかも $s(\xi) \neq t(\xi)$ となる ξ が高々有限個であるときに, $s \sim t$ と書くことにする．列 $\left\langle s_\alpha \;\middle|\; \alpha < \omega_1 \right\rangle$ を, s_α の定義域が α で, かつ,

$$(*) \qquad \alpha < \beta \;\to\; s_\alpha \sim s_\beta \restriction \alpha$$

となるように選べることを示す．これができれば, あとは

$$T = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \left\{ s \in {}^{\alpha}\omega \;\middle|\; s \in S \;\wedge\; s \sim s_\alpha \right\}$$

とおけば $(T, \prec)$ が ω_1-アロンシャイン木になることは容易に確かめられる.

以下, 列 $\left\langle s_\alpha \;\middle|\; \alpha < \omega_1 \right\rangle$ を帰納法で選んでいく．ω_1 個の s_α をうまく選べるように, 各段階で s_α の値域の (ω に対する) 補集合が無限集合になっていることを保証しながら進みたい．最初の段階では $s_0 = \emptyset$ とする．s_α が選ばれたら, $s_{\alpha+1}$ を, s_α の拡張で 1-1 関数になっているもののうちから選ぶ．s_α の値域の補集合が無限なら, $s_{\alpha+1}$ の値域の補集合も要素が一個減るだけだから, やはり無限である.

つぎに, 可算極限順序数 δ 未満の順序数 α について s_α が $(*)$ をみたすように, かつ, 各 s_α の値域の補集合が無限集合になるように, 選ばれていたとしよう．順序数列 $\langle (\delta)_n \mid n < \omega \rangle$ を $(\delta)_n \nearrow \delta$ となるように選ぶ. n にかんする帰納法で, $t_n \in {}^{(\delta)_n}\omega \cap S$ を

$$t_n \sim s_{(\delta)_n} \;\wedge\; t_n \prec t_{n+1}$$

[*9] キューネン本 [7] 第 II 章定理 5.9 の証明

となるようにとろう．これは $\langle s_\alpha \mid \alpha < \delta \rangle$ が $(*)$ をみたすように選ばれているという帰納法の仮定から可能になる．$t = \bigcup_{n<\omega} t_n$ とおき, $\xi \in \delta \setminus \{ (\delta)_n \mid n < \omega \}$ のときは $s_\delta(\xi) = t(\xi)$ とする．これで $\alpha < \delta$ なら $s_\alpha \sim s_\delta \restriction \alpha$ となってくれるが, s_δ の値域の補集合が無限集合になることを保証するために, すこし工夫をして $s_\delta((\delta)_n) = t((\delta)_{2n})$ とする. ◀

定理 1.9 を証明するために, この論法を少し拡張して λ^+-木の構成に利用したいわけですが, そのさいに次の補題が役立ちます.

補題 1.22 λ を正則基数, δ を $\lambda \leq \delta < \lambda^+$ をみたす順序数とする．$f : \delta \to \lambda$ は 1-1 関数で, 条件

$$\forall \alpha < \delta \Big(f``\alpha \in \mathrm{NS}_\lambda \Big)$$

をみたしているものとする．このとき, 次の条件 (a)–(c) をみたす $g : \delta \to \lambda$ がとれる:

(a) g は 1-1 関数;
(b) すべての $\alpha < \delta$ について $\big| \{ \xi < \alpha \mid g(\xi) \neq f(\xi) \} \big| < \lambda$;
(c) $\mathrm{range}(g) \in \mathrm{NS}_\lambda$.

[証明] $\delta = \lambda$ のときは, $f(\xi)$ が後続順序数なら $g(\xi) = f(\xi)$ とし, $f(\xi)$ が極限順序数のときは $g(\xi) = f(\xi)+\omega$ とすれば, $\mathrm{range}(g)$ が λ の club 部分集合 $\mathrm{Lim}(\mathrm{Lim}(\lambda))$ の要素を含まなくなるので OK. δ が後続順序数 $\alpha + 1$ のとき, 仮定より $f``\alpha)$ が非定常集合で, $\mathrm{range}(f) = (f``\alpha) \cup \{f(\alpha)\}$ なのでこれも非定常集合．したがって, たんに $g = f$ とすればよい．δ が λ より大きく λ^+ 未満の極限順序数のとき, 狭義増加かつ連続な δ の近似列 $\langle (\delta)_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\delta) \rangle$ をとる．仮定より $f``(\delta)_\xi$ はすべての $\xi < \mathrm{cf}(\delta)$ について非定常集合である．だからもしも $\mathrm{cf}(\delta) < \lambda$ だったら $\mathrm{range}(f)$ も非定常集合である．このときもたんに $g = f$ とすればよい．$\mathrm{cf}(\delta) = \lambda$ のときは, $f``(\delta)_\xi$ の対角和：

$$Y = \mathop{\triangledown}_{\xi<\lambda} f``(\delta)_\xi = \Big\{ \gamma < \lambda \;\Big|\; \exists \xi < \gamma \big( \gamma \in f``(\delta)_\xi \big) \Big\}$$

を考える．Y も非定常集合である．$Y \subset \mathrm{range}(f)$ である．$X = f^{-1}``Y$ とおこう．すると, f が 1-1 関数で, $\langle (\delta)_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ が狭義単調かつ連続であることから

$$\begin{aligned} \alpha \notin X \ &\leftrightarrow \forall \xi < f(\alpha) \big(f(\alpha) \notin f``(\delta)_\xi \big) \\ &\leftrightarrow \forall \xi < f(\alpha) \big(\alpha \geq (\delta)_\xi \big) \big) \\ &\leftrightarrow \alpha \geq (\delta)_{f(\alpha)} \end{aligned}$$

となる．いま, $\alpha \in (\delta)_\xi \setminus X$ とすれば $(\delta)_{f(\alpha)} \leq \alpha < (\delta)_\xi$ したがって $f(\alpha) < \xi$ となるから, ふたたび f が 1-1 関数であることにより $\big| (\delta)_\xi \setminus X \big| \leq |\xi| < \lambda$ となる．そこで, Y と交わらないが濃度 λ をもつ $Z \in \mathrm{NS}_\lambda$ を用意して, $\alpha \in X$ のときは $g(\alpha) = f(\alpha)$ とし, $\lambda \setminus X$ を Z の中へ一対一にうつすように g を構成すればよい. ◀

[定理 1.9 の別証明][*10] λ^+ 未満の順序数から λ の中への 1-1 関数全体の集合を S とする．$(S, \prec)$ が順序型 λ^+ の鎖をもたない高さ λ^+ の木であることは明らか．先に示した定理 1.7 の証明と同様に, この S から λ^+-部分木を選び出したい．今回は $\mathrm{dom}(s) = \mathrm{dom}(t)$ かつ $\big|\{ \xi < \mathrm{dom}(s) \mid s(\xi) \neq t(\xi) \}\big| < \lambda$ となるときに $s \sim t$ と書くことにして, $\big\langle s_\delta \;\big|\; \delta < \lambda^+ \big\rangle$ を

$$(*) \qquad \alpha < \beta \ \to \ s_\alpha \sim s_\beta \restriction \alpha$$

[*10] キューネン本 [7] 第 II 章演習問題 37．キューネン本を邦訳したさい, この問題のヒントの「非定常集合である」を「定常集合である」と誤訳してしまいました．おわびして訂正します m(_ _)m

となるように取り出そう．そして $T = \{\, s \in S \mid \exists \delta < \lambda^+ (s \sim s_\delta) \,\}$ とおけば, $\lambda^{<\lambda} = \lambda$ という基数の条件から T が λ^+-木になることは容易に確かめられる．

順序数 $\delta < \lambda^+$ にかんする帰納法で s_δ を選んでいく．そこで帰納法の仮定として

(a) $\alpha < \beta < \delta \ \to\ s_\alpha \sim s_\beta \restriction \alpha$;
(b) $\forall \alpha < \delta \,(\, \mathrm{range}(s_\alpha) \in \mathrm{NS}_\lambda \,)$

をみたす $\langle\, s_\alpha \mid \alpha < \delta \,\rangle$ がすでに選ばれたとして s_δ を選ぶことを考える．ここでも, $\delta \le \lambda$ のときと $\delta = \alpha + 1$ のときは問題がないので, 以下では δ は λ より大きな極限順序数だとし, 狭義増加かつ連続な近似列 $\langle\, (\delta)_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\delta) \,\rangle$ を固定する．

順序数 $\xi < \mathrm{cf}(\delta)$ にかんする帰納法で, 1-1 関数 $t_\xi : (\delta)_\xi \to \lambda$ を

$$\forall \xi < \mathrm{cf}(\delta) \Big(\, t_\xi \sim s_{(\delta)_\xi} \,\Big);$$
$$\forall \xi, \eta < \mathrm{cf}(\delta) \Big(\, \xi < \eta \ \to\ t_\xi \prec t_\eta \,\Big);$$
$$\forall \xi < \mathrm{cf}(\delta) \Big(\, \mathrm{range}(t_\xi) \in \mathrm{NS}_\lambda \,\Big)$$

という 3 条件をみたすように選ぶことができる: 自明でないのは $t_{\xi+1}$ を選ぶところだけだ．これは次のようにすればよい．$s_{(\delta)_{\xi+1}}$ が 1-1 関数であることから, $t_\xi(\alpha) \in s_{(\delta)_{\xi+1}}``\big[(\delta)_\xi, (\delta)_{\xi+1}\big)$ となる $\alpha < (\delta)_\xi$ について $t_\xi(\alpha) \neq s_{(\delta)_{\xi+1}}(\alpha)$ となるはずで, 帰納法の仮定

$$t_\xi \sim s_{(\delta)_\xi} \sim s_{(\delta)_{\xi+1}} \restriction (\delta)_\xi$$

より, そのような α の個数は λ 未満である．そして, $t_\xi(\alpha) \in s_{(\delta)_{\xi+1}}``\big[(\delta)_\xi, (\delta)_{\xi+1}\big)$ となる α の個数と $s_{(\delta)_{\xi+1}}(\beta) \in \mathrm{range}(t_\xi)$ となる β の個数は一致するはずだから, 個数 λ 未満のそのような β のところでだけ値の衝突を避け, それ以外のところでは $s_{(\delta)_{\xi+1}}$ と同じ値をとるように $t_{\xi+1}(\beta)$ を作ればよい．このようにして帰納的に作った t_ξ の値域 $\mathrm{range}(t_\xi)$ は $\mathrm{range}(s_{(\delta)_\xi})$ と比較して λ 個未満の要素の出入りがあるだけだから, これも非定常集合になっている．

そこで $t = \bigcup_{\xi < \mathrm{cf}(\delta)} t_\xi$ としよう．この t に補題 1.22 を適用して,

$$\forall \alpha < \delta \Big(\, s_\delta \restriction \alpha \sim t \restriction \alpha \,\Big) \ \wedge\ \mathrm{range}(s_\delta) \in \mathrm{NS}_\lambda$$

をみたすような 1-1 関数 s_δ を見出せる．◀

これらの別証明に関連してキューネン本 [7] 第 II 章の演習問題 39 と 40 も片付けてしまいましょう．演習問題 39 では, 上のように $\alpha < \omega_1$ から ω への 1-1 関数によって構成された ω_1-木 T が決してススリン木にならないことの証明を求められています．ヒントにあるとおり, $A_n = \{\, s \in T \mid \exists \alpha \,(\, \mathrm{dom}(s) = \alpha + 1 \wedge s(\alpha) = n \,)\}$ とおきましょう．$s \in A_n$ ならば, s は 1-1 関数で, その最後の値が自然数 n なのだから, 順序づけ $\prec$ にかんして s に先立つ要素は値 n をとらないことになります．とくに, A_n には s に先立つ要素はひとつもありません．ところが s は A_n の任意の要素ですから, けっきょく A_n は反鎖だということになります．

上の議論で用いられた集合 A_n の和 $A = \bigcup_{n<\omega} A_n$ を考えましょう．これは, T の要素のうち階数が後続順序数になっているもの全体からなります．したがって, $\prec$ にかんして下向きに閉じていないので T の部分木ではありませんが, T が ω_1-木であるかぎり, 半順序 $(A, \prec)$ も ω_1-木になっています．このとき $(A, \prec)$ が特殊 ω_1-木であることはあきらかです．

これは, 演習問題 40 後半で求められている「特殊アロンシャイン木の存在証明」になっています. ヒントにあるように T と f を同時に構成するという方法でやろうというのであれば, 定理 1.9 の証明のあとで述べたような形で, 定理 1.7 の証明をすこし手直しすればよいのです. いっぽう, 演習問題 40 の前半は, 次の命題を証明せよというものです.

定理 1.23 ω_1-木 T が特殊 ω_1-木であるためには, 有理数値の写像 $f : T \to \mathbb{Q}$ で

$$x <_T y \ \to \ f(x) < f(y)$$

をみたすものが存在することが必要, かつ十分である.

[証明] (必要性) T が特殊 ω_1-木であることから, 写像 $\nu : T \to \omega$ を, 各 $n \in \omega$ について逆像 $\nu^{-1}``\{n\}$ が $<_T$ にかんして反鎖になるようにとることができる. また, T が ω_1-木であることから, T の順序型 ω_1 をもつよう整列順序づけ $<^*$ を,

$$x <_T y \ \to \ x <^* y$$

となるように定めることができる. (T_α の要素が並んでいる後ろへ $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ の要素を整列順序づけして並ばせればよい.) この順序づけ $<^*$ にかんして再帰的に f を定める. 帰納法の仮定として, y^*x のとき

$$\sup_{z <_T y} f(z) < f(y) < \sup_{z <_T y} f(z) + 2^{-(\nu(y)+1)}$$

となっているとしよう. このとき, 集合 $\{\, f(y) \mid y <_T x \,\}$ は上に有界となる. なぜなら, 順序づけ $<_T$ の意味で x に先立つ y に対応する自然数 $\nu(y)$ として二回以上同じものが重複してあらわれることが決してなく, そのため (x に先立つ階数ゼロの要素を x_0 とすれば)

$$\sup_{y <_T x} f(y) \le f(x_0) + \sum_{x_0 <_T y <_T x} 2^{-(\nu(y)+1)} < f(x_0) + 1$$

が成立するから. したがって, 実数 $\sup_{y <_T x} f(y)$ が確定するので $f(x)$ を

$$\sup_{y <_T x} f(y) < f(x) < \sup_{y <_T x} f(y) + 2^{-(\nu(x)+1)}$$

をみたす有理数として定めることができ, 帰納のステップが完了する.

(十分性) $f : T \to \mathbb{Q}$ を順序を保つ写像としよう. 各有理数の逆像 $f^{-1}``\{q\}$ は反鎖であり, $T = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} f^{-1}``\{q\}$ である. $\mathbb{Q}$ は可算集合だから, T は可算個の反鎖の和になっている. ◀

2 ラムゼイの定理と分割の性質

ここでは, まず木の性質を無限集合の分割をめぐる性質に関連づけ, つぎにラムゼイ (Frank Ramsey) の定理の拡張といえる性質が弱コンパクト基数のひとつの特徴づけを与えることを確認します.

定理 2.1 κ は強極限基数で木の性質をもつものとする, このとき, κ の要素の無順序対に対して定義された任意の関数 $f : [\kappa]^2 \to \lambda$ (ただし $\lambda < \kappa$) に対し, κ の濃度 κ をもつ部分集合 H が存在して, f が $[H]^2$ 上で一定の値をとる.

[証明] κ 上の二項関係 $<_T$ を次のように (再帰的に) 定義しよう. $\alpha <_T \beta$ とは, まず $\alpha < \beta$ であり, さらに

$$\forall \xi < \alpha \big(\, \xi <_T \alpha \ \to \ f(\{\xi, \alpha\}) = f(\{\xi, \beta\}) \,\big)$$

となることだとする. $<_T$ が κ の木順序づけであることは容易にわかる.

木 $(\kappa, <_T)$ が κ-木であることを示す. それには, κ は正則なので, 各レベルが濃度 κ 未満であることをいえばよく, とくに δ-レベルの濃度が κ 未満であることを仮定して $(\delta{+}1)$-レベルの濃度が κ 未満であることをいえば十分である. α が δ-レベルの要素だとする. β と γ を, α と比較可能な $(\delta{+}1)$-レベルの要素とし, 順序数として $\beta < \gamma$ だったとする. このとき, β と γ は $<T$-比較不能であるはずだから, $<_T$ の定義により, ある $\xi < \beta$ について, $\xi <_T \beta$ かつ $f(\{\xi, \beta\}) \neq f(\{\xi, \gamma\})$ となる. ところが $\xi <_T \beta$ となるのは $\xi <_T \alpha$ か $\xi = \alpha$ のどちらかの場合しかない. $\xi <_T \alpha$ のときは $f(\{xi, \beta\}) = f(\{\xi, \alpha\}) = f(\{\xi, \gamma\})$ のはずだから, 結局 $f(\{\alpha, \beta\}) = f(\{\alpha, \gamma\})$ でなければならないことになる. f の値は高々 λ とおりしかないので, $<_T$ の意味での α の直後の要素も, 高々 λ 個しか存在しない. したがって, δ-レベルの濃度が κ 未満であれば $(\delta{+}1)$-レベルの濃度も κ 未満である.

こうして $(\kappa, <_T)$ が κ-木であることがわかった. κ は木の性質をもつので, 濃度 κ の鎖 C が存在する. 鎖 C から三つの要素 $\alpha, \beta\ \gamma$ をとろう. $\alpha <_T \beta <_T \gamma$ だったとすると, $<_T$ の定義により $f(\{\alpha, \beta\}) = f(\{\alpha, \gamma\})$ である. つまり, C の要素のペア $\{\alpha, \beta\}$ に対する f の値は α と β の小さいほうだけで決まってしまう. そこで, 任意の $\beta \in C$ (ただし $\alpha <_T \beta$) に対する $f(\{\alpha, \beta\})$ の値を $g(\alpha)$ とすることで関数 $g : C \to \lambda$ が定まる. κ の正則性から, κ 個の C の要素に g で割り当てられる $\nu < \lambda$ があるので, このときの逆像 $g^{-1}``\{\nu\}$ を H とすれば, H の濃度は κ で, H の要素のペアに対する f の値はつねに ν となる. ◀

この定理 2.1 で述べられた基数 κ の性質は, 記号では

$$\kappa \to (\kappa)^2_\lambda$$

と記されます. グラフ理論の言葉でこの式を解釈すれば, κ 個の頂点からなる完全グラフのすべての辺を λ 色で塗り分けたとき, κ 個の頂点をもつ単色の完全グラフが必ず含まれている, ということになります.

つぎに, もう少し一般の場合を含めて, 矢印記法の定義を述べましょう.

定義 2.2 κ, λ, n を基数 とし α を順序数とするとき, $\kappa \to (\alpha)^n_\lambda$ とは次の命題のことである: 任意の関数 $f : [\kappa]^n \to \lambda$ に対し, κ の順序型 α をもつ部分集合 H が存在して, f が $[H]^n$ 上で一定の値をとる. ◀

この奇妙な記法 $\kappa \to (\alpha)^n_\lambda$ は, 矢印の左側の κ を大きくすることと, 右側の α や n や λ を小さくすることによって, この関係が保たれるという, ある種の不等号のような記号として選ばれたそうです. この記号によれば, **ラムゼイの定理** (Ramsey's Theorem) は

$$\forall n < \omega\, \forall n < \omega \Big(\omega \to (\omega)^n_m \Big)$$

と表現できます.

さて, 定理 2.1 は次のように強化できます.

定理 2.3 κ が強極限基数で木の性質をもてば, 任意の正整数 n と基数 $\lambda < \kappa$ について $\kappa \to (\kappa)^n_\lambda$ が成立する.

[証明] n に関する帰納法であり, その大筋は 2.1 の証明とほぼ同様である. 例として $n = 3$ の場合の概略を述べよう. $f : [\kappa]^3 \to \lambda$ が与えられたとして, $<_T$ を順序数 β に関して再帰的に

$$\alpha <_T \beta \overset{\text{def}}{\longleftrightarrow} \alpha < \beta \wedge \forall \gamma_0, \gamma_1 < \alpha \Big(\gamma_0 <_T \gamma_1 <_T \alpha \ \to\ f(\{\gamma_0, \gamma_1, \alpha\}) = f(\{\gamma_0, \gamma_1, \beta\}) \Big)$$

によって定義する. $(\kappa, <_T)$ が κ-木となることを確かめる. すると, κ が木の性質をもつことにより濃度 κ の鎖 C の存在がわかる. 最後に f が $[H]^3$ 上で一定値をとるような集合 $H \subset C$ をとりだすために, $[C]^3$ 上で

の値 $f(\{\gamma_0, \gamma_1, \alpha\})$ (ただし $\gamma_0 <_T \gamma_1 <_T \alpha$) が α によらず $\{\gamma_0, \gamma_1\}$ で決まることに注意して, 帰納法の仮定 $\kappa \to (\kappa)^2_\lambda$ を用いる. ◀

次はその逆です.

定理 2.4 $\kappa \to (\kappa)^2_2$ のとき, κ は強到達不能基数である. ◀

この定理の証明には, 一般カントール空間 ${}^\lambda 2$ 上の辞書式順序が利用されます. 基数 λ から $2 = \{0, 1\}$ への関数の全体のなす集合 ${}^\lambda 2$ を考えます. 二つの関数 $f, g : \lambda \to 2$ について

$$f <_{\mathrm{lex}} g \overset{\mathrm{def}}{\longleftrightarrow} \exists \alpha < \lambda \Big(f \restriction \alpha = g \restriction \alpha \ \wedge \ f(\alpha) < g(\alpha) \Big)$$

と定義します. つまり $f(\alpha) \neq g(\alpha)$ となる最初の α のところで順序を比較するので, これは辞書に単語を並べるときの順序づけに一致します. ですからこの順序を **辞書式順序づけ** (lexicographic ordering) といいます. λ が無限基数のとき, $({}^\lambda 2, <_{\mathrm{lex}})$ は整列順序ではない全順序になっています.

いま, λ^+ 未満の順序数によって添え字づけされた単調不減少列

$$f_0 \leq_{\mathrm{lex}} f_1 \leq_{\mathrm{lex}} \cdots \leq_{\mathrm{lex}} f_i \leq_{\mathrm{lex}} \cdots \quad (i < \lambda^+)$$

が与えられたとして, 添え字の列 $\langle i_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle \in {}^\lambda \lambda^+$ と 関数 $f : \lambda \to 2$ を, 以下のように帰納的に定めていきます.

まず, $f_i(0) = 1$, $f_j(0) = 0$ なら辞書式順序づけの定義によってただちに $f_i >_{\mathrm{lex}} f_j$ となるので, 単調不減少列 $\langle f_i \mid i < \lambda^+ \rangle$ については

$$f_0(0) \leq f_1(0) \leq \cdots \leq f_i(0) \leq \cdots \quad (0 \leq i < \lambda^+)$$

となっています. もしもどこかの $i < \lambda^+$ で $f_i(0) = 1$ となるなら, そうなる最小の i を i_0 とし, $f(0) = 1$ とします. すべての $i < \lambda^+$ で $f_i(0) = 0$ であれば, $i_0 = 0$ とし, $f(0) = 0$ とします. いずれにせよ, i_0 以降ずっと

$$f_{i_0}(0) = f_{i_0+1}(0) = \cdots = f_i(0) = \cdots = f(0) \quad (i_0 \leq i < \lambda^+)$$

となります. そこで, 辞書式順序づけの定義から,

$$f_{i_0}(1) \leq f_{i_0+1}(1) \leq \cdots \leq f_i(1) \leq \cdots \quad (i_0 \leq i < \lambda^+)$$

となっています. もしも i_0 以降のどこかの i で $f_i(1) = 1$ となるなら, そうなる最小の i を i_1 とし, $f(1) = 1$ とします. i_0 以降すべての i で $f_i(1) = 0$ であれば, $i_0 = i_1$ とし, $f(1) = 0$ とします. いずれにせよ, i_1 以降ずっと

$$\begin{aligned} f_{i_1}(0) &= f_{i_1+1}(0) = \cdots = f_i(0) = \cdots = f(0) \\ f_{i_1}(1) &= f_{i_1+1}(1) = \cdots = f_i(1) = \cdots = f(1) \end{aligned}$$

となります. この要領で進み, いま $\alpha < \lambda$ の手前までのすべての $\xi < \alpha$ について, $i_\xi < \lambda^+$ と $f(\xi) < 2$ が定まったとします. $\bar{\imath}_\alpha = \sup_{\xi < \alpha} i_\xi$ とおきましょう. 帰納法の仮定として, ここまでの構成が

$$f_{\bar{\imath}_\alpha} \restriction \alpha = f_{\bar{\imath}_\alpha+1} \restriction \alpha = \cdots = f_i \restriction \alpha = \cdots = f \restriction \alpha \quad (\bar{\imath}_\alpha \leq i < \lambda^+)$$

をみたすようになされていたとします. このとき辞書式順序の定義により

$$f_{\bar{\imath}_\alpha}(\alpha) \leq f_{\bar{\imath}_\alpha+1}(\alpha) \leq \cdots \leq f_i(\alpha) \leq \cdots \quad (\bar{\imath}_\alpha \leq i < \lambda^+)$$

となります. そこで, $\bar{\imath}_\alpha$ 以降どこかの i で $f_i(\alpha) = 1$ となるならそうなる最初の i を i_α とし, $f(\alpha) = 1$ とします. $\bar{\imath}_\alpha$ 以降すべての i で $f_i(\alpha) = 0$ であるなら $i_\alpha = \bar{\imath}_\alpha$ とし $f(\alpha) = 0$ とします. これで帰納法の α 番目のステップは終わりです.

このようにして λ 未満のすべての順序数について $i_\alpha < \lambda^+$ と $f(\alpha)$ が定まったとすると, 添え字 $\bar{\imath}_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} i_\alpha < \lambda^+$ と関数 $f : \lambda \to 2$ が確定します. 作り方から,

$$f_{\bar{\imath}_\lambda} = f_{\bar{\imath}_\lambda+1} = \cdots = f_i = \cdots = f \quad (\bar{\imath}_\lambda \leq i < \lambda^+)$$

となっています.

以上の考察によれば, $<_{\mathrm{lex}}$ によって整列された ${}^\lambda 2$ の部分集合の順序型は λ^+ 未満でなければなりません. 同様に, $<_{\mathrm{lex}}$ の逆順序によって整列された, 順序型 λ^+ 以上の部分集合も存在しません. すなわち次のことが証明されました.

補題 2.5 集合 $W \subset {}^\lambda 2$ が辞書式順序づけ $<_{\mathrm{lex}}$ またはその逆順序のもとで整列集合になっているとしたら, $|W| \leq \lambda$ である. ◀

これがわかれば, あとのステップは簡単です.

補題 2.6 関係 $2^\lambda \to (\lambda^+)^2_2$ はいかなる無限基数 λ についても成立しない.

[証明] 集合 ${}^\lambda 2$ の整列順序づけ $<_W$ を固定して考える. 無順序対 $\{f, g\}$ 上で $<_{\mathrm{lex}}$ と $<_W$ の順序づけが一致すれば $F(\{f, g\}) = 0$ とし, $<_{\mathrm{lex}}$ と $<_W$ が食い違っていたら $F(\{f, g\}) = 1$ と決めて, 関数 $F : [{}^\lambda 2] \to 2$ を定義しよう. $H \subset {}^\lambda 2$ とする. もしも $[H]^2$ 上で F が一定値 0 をとるなら, H は $<_{\mathrm{lex}}$ のもとで整列集合になっていることになるし, 一定値 1 をとるなら, H は $<_{\mathrm{lex}}$ の逆順序のもとで整列集合になっていることになる. いずれにせよ 補題 2.5 によって $|H| \leq \lambda$ である. ◀

いま, $\lambda < \kappa \leq 2^\lambda$ となったとします. $2^\lambda \to (\lambda^+)^2_2$ は成立しないので, この左辺を小さくした $\kappa \to (\lambda^+)^2_2$ も成立せず, そのまた右辺を大きくした $\kappa \to (\kappa)^2_2$ も成立しません. ということは, $\kappa \to (\kappa)^2_2$ をみたす基数 κ については $\lambda < \kappa$ であれば $2^\lambda < \kappa$ である, ということになります. つまり次のことがいえます.

補題 2.7 関係 $\kappa \to (\kappa)^2_2$ をみたす κ 無限基数は強極限基数である. ◀

ですから, 定理 2.4 の証明を完成させるには, あと次のことがいえればいいわけです.

補題 2.8 関係 $\kappa \to (\kappa)^2_2$ をみたす無限基数 κ は正則である.

[証明] κ を $\mathrm{cf}(\kappa)$ 個の部屋 (部分集合) に分割し, どの部屋も広さ (濃度) が κ 未満になるようにできる. メンバー α と β が同じ部屋にいるときは $f(\{\alpha, \beta\}) = 0$ とし, 異なる部屋にいるなら $f(\{\alpha, \beta\}) = 1$ として, 関数 $f : [\kappa]^2 \to 2$ を定めよう. $\kappa \to (\kappa)^2_2$ なので, 濃度 κ の部分集合 $H \subset \kappa$ がとれて, f は $[H]^2$ 上で一定値をとる. ところがどの部屋の広さも κ 未満なので, H の全要素が同じ部屋に入っていることはありえない. ということは, f が $[H]^2$ 上でとる値は 1 のほうで, H の要素はすべて互いに異なる部屋に入っていることになる. 部屋の数は $\mathrm{cf}(\kappa)$ なので $\kappa = |H| \leq \mathrm{cf}(\kappa)$ となる. ◀

こうして $\kappa \to (\kappa)^2_2$ をみたす基数が少なくとも強到達不能基数となることはわかりました. 先に進む前に, 補題 2.6 についてひとつコメントします. 関係 $2^\lambda \to (\lambda^+)^2_2$ は成立しないのですが, この分割の性質を成立させるには, 左辺をもう一段階だけ大きくすればよいことが知られています. つまり

$$(2^\lambda)^+ \to (\lambda^+)^2_\lambda$$

が成立します. これは **エルデシュとラドーの定理** (Erdős–Rado Theorem) の特別な場合です. エルデシュとラドーの定理については [5] の Theorem 9.6 とか [9] の §5.1 などを見てください.

定理 2.9 $\kappa \to (\kappa)^2_2$ のとき, κ は木の性質をもつ. すなわち, κ-アロンシャイン木は存在しない.

[証明] 補題 1.17 により, $({}^{<\kappa}2, \prec)$ の κ-部分木が濃度 κ の鎖を含むことを示せば十分である.

そこで, T を ${}^{<\kappa}2$ の κ-部分木とする. このとき T は濃度 κ をもち, 木順序づけ $\prec$ にかんして下向きに閉じている. 定理 2.4 により κ は強到達不能基数であるから, この二つの条件は $T \subset {}^{<\kappa}2$ が κ-木であるための十分条件でもある.

いま ${}^{<\kappa}2$ 上に次の順序づけ $<_*$ を定義したとしよう.

$$f <_* g \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(g \prec f\big) \vee \exists \xi \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \Big(f \restriction \xi = g \restriction \xi \,\wedge\, f(\xi) < g(\xi) \Big).$$

これは **クリーネ=ブラウアー式順序づけ** (Kleene-Brower ordering) と呼ばれるものの一種で, f が g の拡大であるかあるいは f が g 辞書式順序づけで g の前にくるときに $f <_* g$ とする, という順序づけである. このとき $<_*$ は ${}^{<\kappa}2$ 上の全順序づけになっている.

仮定 $\kappa \to (\kappa)^2_2$ により, T は 順序づけ $<_*$ にかんして順序型 κ の整列集合か, その逆順序 $>_*$ にかんして順序型 κ の (逆) 整列集合を含む. そのような集合は, ふたたび仮定 $\kappa \to (\kappa)^2_2$ により, 木順序づけ $\prec$ にかんして, 濃度 κ の鎖か 濃度 κ の反鎖の少なくとも一方を含む. だから結局, $<_*$ にかんして順序型 κ の整列集合をなすような $\prec$ の反鎖 $W \subset T$ があったとして, あらためて, T から濃度 κ の鎖をとりだせることを示せば十分である. W が 逆順序 $>_*$ に関して順序型 κ である場合も, 議論はまったく同様だ.

そこで, 以下では, T からとりだした列 $\langle f_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$ が

$$f_0 <_* f_1 <_* \cdots <_* f_\xi <_* \cdots \quad (\xi < \kappa)$$

をみたし, かつ $\{ f_\xi \mid \xi < \kappa \}$ が $\prec$ に関する反鎖になっているものとする. $\alpha < \kappa$ としよう. 定義域 $\mathrm{dom}(f)$ が α 未満の順序数であるような $f \in {}^{<\kappa}2$ は (κ が強到達不能なので) κ 個未満である だから, $\xi_\alpha < \kappa$ があって, $\xi_\alpha \le \xi < \kappa$ のとき $\mathrm{dom}(f_\xi) \ge \alpha$ となっている. また, $\prec$ にかんする反鎖が $<_*$ に関して順序づけされている場合, その順序づけは辞書式になされることに注意すれば, ${}^{\alpha}2$ 上の辞書式順序にかんして

$$f_{\xi_\alpha} \restriction \alpha \le_{\mathrm{lex}} f_{\xi_\alpha+1} \restriction \alpha \le_{\mathrm{lex}} \cdots \le_{\mathrm{lex}} f_\xi \restriction \alpha \le_{\mathrm{lex}} \cdots \quad (\xi_\alpha \le \xi < \kappa)$$

となっている. ここで補題 2.5 をもちいれば, ある $\eta_\alpha < \kappa$ について

$$f_{\eta_\alpha} \restriction \alpha = f_{\eta_\alpha+1} \restriction \alpha = \cdots = f_\xi \restriction \alpha = \cdots \quad (\eta_\alpha \le \xi < \kappa)$$

となる. この同じ値を σ_α としよう. すると, $\{ \sigma_\alpha \mid \alpha < \kappa \}$ が 濃度 κ をもつ T の鎖になっている. ◀

こうして, κ が木の性質をもつ強到達不能基数であることと, $\kappa \to (\kappa)^2_2$ と, $\forall n < \omega \forall \lambda < \kappa (\kappa \to (\kappa)^n_\lambda$ とが互いに同値ということになります.

3 無限言語のコンパクト性

無限に長い論理式の形成を認める無限論理について, 古典 1 階述語論理のコンパクト性定理に相当する結果が成立するかどうか, という観点から, 弱コンパクト性を特徴づけます. コンパクト性定理 (と完全性定理) については第 5 節で解説し証明しています.

定義 3.1 κ と λ を無限基数とする. 形式的言語 $\mathcal{L}$ に対する **無限言語** (infinitary language) $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ とは, 次の規則をつけくわえて $\mathcal{L}$ を強化したものである:

(1) λ 個の変数記号をもつ;

(2) S が式の集合で $|S| < \kappa$ であるとき, 連言 $\bigwedge S$ と選言 $\bigvee S$ をつくってよい;

(3) φ が式, $\langle v_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$ が長さ λ 未満の変数の列だとするとき, これらの変数を一斉に量化して $\exists_{\xi<\alpha} v_\xi \varphi$ と $\forall_{\xi<\alpha} v_\xi \varphi$ をつくってよい; ◀

この定義によれば, もともとの $\mathcal{L}$ は結果的に $\mathcal{L}_{\omega,\omega}$ に一致します. 無限言語 $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ の式の解釈のしかたについては通常の $\mathcal{L}$ の解釈と変わりません. したがって, 言語 $\mathcal{L}$ にたいする任意の構造において $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ の式を解釈することができます.

もともとの言語 $\mathcal{L}$ のサイズが κ 以下の場合, あきらかに, 無限言語 $\mathcal{L}_{\kappa,\lambda}$ の式の個数は $\max\{ 2^{<\kappa}, 2^{<\lambda} \}$ 以下です.

定義 3.2 κ を無限基数とするとき, $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ が **弱コンパクト性** (weak compactness) を有するとはつぎのことである: Σ を $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ の文の集合で, $|\Sigma| = \kappa$ をみたし, さらに任意の $S \in [\Sigma]^{<\kappa}$ がモデルをもつものとすれば, Σ 全体のモデルが存在する. $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ の弱コンパクト性についても同様に定義する. ◀

ここでいう弱コンパクト性の「弱」というのは文の集合 Σ のサイズに制限を設けていることを意味しています. もっとも, もとの言語 $\mathcal{L}$ として高々 κ 個の記号しかもたないような言語をとった場合には, そもそも $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ の文が $2^{<\kappa}$ 個しか存在しません. ですから, 集合論の言語のような有限または可算の言語によって記述される構造を扱い, $2^{<\kappa} = \kappa$ をみたす基数について考えている限りは, 弱コンパクト性はちっとも「弱」ではないことになります. しかしながら, $\mathcal{L}$ としてもっと大きな (κ より多くの関係記号や関数記号を含む) 言語も許すとすれば, Σ の大きさにもアプリオリな制限はないことになります. そのような場合には $|\Sigma| = \kappa$ という条件が本質的な制限として効き目をあらわしてくることになり, 「弱」コンパクト性に対する「強」コンパクト性が意味をもってくるようになります. しかしながら, 無限言語の強コンパクト性と, それに対応してあらわれる強コンパクト基数 については, このノートの守備範囲を大きく超えているので, これ以上詳しくは扱いません.

次の二つの定理が, 弱コンパクト基数の名前の由来になっています.

定理 3.3 κ を不可算基数とし, 任意の形式言語 $\mathcal{L}$ に対する無限言語 $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ が弱コンパクト性をもつと仮定する. このとき, κ は木の性質をもつ. すなわち, 任意の κ-木は長さ κ の鎖を含む. とくに, κ が強到達不能基数で $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ が弱コンパクト性をもてば, κ は弱コンパクト基数である.

[証明] $(T, <_T)$ を任意の κ-木とする. 一項述語記号 B と, T の各要素 x に対応する定数記号 c_x からなる言語 $\mathcal{L}$ において, 次のような (無限) 文を考えよう.

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha &\equiv \bigvee \Big\{ B(c_x) \;\Big|\; x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T) \Big\}, \\
\psi_{x,y} &\equiv B(c_x) \vee \big(\neg B(c_y)\big) \quad (x, y \in T,\ x <_T y), \\
\theta_{x,y} &\equiv \neg\big(B(c_x) \wedge B(c_y)\big) \quad (x, y \in T,\ x \not<_T x,\ y \not<_T x).
\end{aligned}$$

これらの文すべてを集めた集合を Σ とする, Σ は全体として, $B(c_x)$ が成立するような $x \in T$ 全体の集合が T のすべてのレベルとちょうど一個ずつ要素を共有すること, すなわち述語 B が T の長さ κ の鎖を定めることを主張する. あきらかに $|\Sigma| = \kappa$ である. ここで, S を Σ の部分集合で $|S| < \kappa$ となるものとしよう. 順序数 $\beta < \kappa$ を十分大きく,

$$\begin{aligned}
&\varphi_\alpha \in S \quad \text{ならば} \quad \alpha < \beta, \\
&\psi_{x,y} \in S \quad \text{ならば} \quad \mathrm{rk}(x,T), \mathrm{rk}(y,T) < \beta, \\
&\theta_{x,y} \in S \quad \text{ならば} \quad \mathrm{rk}(x,T), \mathrm{rk}(y,T) < \beta
\end{aligned}$$

となるようにとる．$\mathrm{Lev}_\beta(T)$ の任意の要素 x_β を固定しよう．そして, 言及の範囲として T をとり, 集合 $\{\, x \in T \mid x <_T x_\beta \,\}$ によって述語記号 B を解釈し, 各定数記号 c_x を x 自身によって解釈すれば, S のモデルを得る．したがって, κ 個未満の Σ の文からなる部分集合はモデルをもつ.

そこで, $\mathcal{L}_{\kappa,\omega}$ の弱コンパクト性の仮定により, Σ 全体のモデルとなる構造 $\mathcal{A} = (A, B^*, x^*)_{x \in T}$ が存在する．定数記号の解釈 x^* の全体を T^* とし, $x <_T y$ のとき $x^* <_{T^*} y^*$ として T^* を順序づけすると, T と同型な κ-木が得られる．そして $B^* \cap T^*$ は T^* の長さ κ の鎖をなしている．したがって T も長さ κ の鎖を含む. ◀

定理 3.4 κ が弱コンパクト基数であれば, 任意の形式言語 $\mathcal{L}$ に対する無限言語 $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ が弱コンパクト性を有する．

[証明] ここではヘンキン工法による完全性定理の証明 (→第 5 節) を踏襲する．まず $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ の文の集合 Σ が与えられていて, Σ の κ 個未満の文からなる任意の部分集合がモデルをもつと仮定する．(以後この仮定を Σ の **$<\kappa$-充足性**とよぶ.) この $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ と Σ をヘンキン化して, 立証性を持つ言語 $\mathcal{L}^*_{\kappa,\kappa}$ と文の集合 Σ^* に拡張する．次にヘンキン化された Σ^* が $<\kappa$-充足性をもつことを確認する．ここまではとくに困難はない.

通常のコンパクト性定理の証明にはない配慮を必要とするのは, Σ^* を $<\kappa$-充足性をもつ極大な集合へ拡大するところだ．ここにおいて初めて, κ が弱コンパクト基数であるという仮定が必要となる．まず, $\mathcal{L}^*_{\kappa,\kappa}$ のすべての文を順序型 κ に整列させよう:

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\xi, \ldots \quad (\xi < \kappa).$$

このとき, Σ^* の $<\kappa$-充足性により, κ 未満の任意の順序数 α について, 文の集合 $\Sigma^* \cap \{\, \varphi_\xi \mid \xi < \alpha \,\}$ はモデルをもつ．そこで, ${}^{<\kappa}2$ の部分木 T を次のように定義する: 長さ κ 未満の 2 進列 t が T の要素となるのは, $\Sigma^* \cap \{\, \varphi_\xi \mid \xi \in \mathrm{dom}(t) \,\}$ のモデル $\mathcal{A}$ が存在して, $\mathrm{dom}(t)$ のすべての要素 ξ について

$$t(\xi) = 1 \ \text{ iff } \ \mathcal{A} \models \varphi_\xi$$

が成立するときである．こうして得られる T は κ-木である．なぜなら, κ が強極限基数であることによって ${}^{<\kappa}2$ とその部分木 T の各レベルの濃度は κ 未満であるし, Σ^* の $<\kappa$-充足性によって κ 未満のどの順序数 α に対しても, その階数の T の要素が存在するから．それゆえ κ が木の性質をもつことによって, T は長さ κ の鎖 C を含む．そこで,

$$\tilde{\Sigma} = \Big\{\, \varphi_\xi \ \Big| \ \exists t \in C \,\big(\, \xi \in \mathrm{dom}(t) \wedge t(\xi) = 1 \,\big) \Big\}$$

とおこう．作り方から $\tilde{\Sigma} \supset \Sigma^*$ であり, また $\tilde{\Sigma}$ は $<\kappa$-充足性をもつ．そして, C が長さ κ の鎖であることから, $\mathcal{L}^*_{\kappa,\kappa}$ の任意の文の真偽値は十分長い C の要素によって決定できるため, $\tilde{\Sigma}$ は極大集合である.

証明の残りの部分はコンパクト性定理の証明とまったく同様である. ◀

通常の 1 階述語論理のコンパクト性から超準モデルの理論が得られたように, 無限言語 $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$ の弱コンパクト性からは, 濃度が κ のモデルの初等拡大の存在が導かれます．次にこれをみていきましょう.

まず定義をざっと復習します.

形式言語 $\mathcal{L}$ に対するふたつの数学的構造 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ があったとします．それぞれの言及の範囲が A と B だったとします．写像 $i : A \to B$ は, それが 1-1 関数であって, しかも 言語 $\mathcal{L}$ のすべての関係記号 R, すべての関数記号 f について

$$\langle a_1, \ldots, a_r \rangle \in R^{\mathcal{A}} \ \text{ iff } \ \langle i(a_1), \ldots, i(a_r) \rangle \in R^{\mathcal{B}}$$
$$f^{\mathcal{B}}\big(i(a_1), \ldots, i(a_s)\big) = i\big(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_s)\big)$$

をみたすときに, $\mathcal{A}$ の $\mathcal{B}$ への **埋め込み** (embedding) とよばれます. とくに $A \subset B$ であって, 恒等写像 id_A が埋め込みである場合に, $\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}$ の **部分構造** (substructure) あるいは **部分モデル** (submodel) であるといいます. 以上は, 言語の解釈の対応づけに着目した定義です.

埋め込み $i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が, さらに $\mathcal{A}$ の任意の式 φ と A の任意の要素 $a_1, \ldots, a_r$ について

$$\text{(EE)} \qquad \mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_r) \ \text{ iff } \ \mathcal{B} \models \varphi\big(i(a_1), \ldots, i(a_r)\big)$$

をみたすならば (すべての式の真偽値を保つならば), これを **初等埋め込み** (elementary embedding) と呼びます. $\mathcal{A}$ が $\mathcal{B}$ の部分構造で　恒等写像 id_A が初等埋め込みである場合に,

$$\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$$

と書いて, $\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}$ の **初等部分構造** (elementary substructure) あるいは **初等部分モデル** (elementary submodel) であるといいます. また, このとき $\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ の **初等拡大** (elementary extension) であるといいます.

コンパクト性定理 (→第 5 節 C) からみちびかれる結果として, 無限なモデルは真の初等拡大をもちます. このことが超準解析 (nonstandard analysis) というモデル理論の応用分野の基礎になっているわけです.

ところで, 集合論のモデルの場合, コンパクト性定理から一般論として得られる初等拡大には, 自然数論の標準モデルに含まれない無限大自然数が含まれます. 拡大モデルが標準的な (もとのモデルにあった) 自然数のみを含むようにしたければ, $a \in A$, $b \in B$, $b < a \in \omega^{\mathcal{B}}$ のとき $b \in A$, という条件が成立している必要があります. もっと強く, 標準的な (もとからあった) 集合には標準的でない (新しい) 要素が含まれない, ということを保証したければ,

$$\text{(EX)} \qquad a \in A,\ b \in B,\ \mathcal{B} \models (b \in a) \ \text{ のとき } \ b \in A$$

が成立している必要があります. $\mathcal{B}$ が集合論の言語 $\mathcal{L}(\in)$ あるいはその拡張言語に対応する数学的構造, $\mathcal{A}$ がその部分モデルで, しかも上記の条件 (EX) が成立しているならば, $\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ の **終端拡大** (end-extension) であるといいます. 終端拡大は, 算術的 (arithmetical) な式などの有界な式 (Δ_0-式) の真偽値を保つ特徴があるため, 集合論のモデルを考える際に重要な役割を果たします.

定理 3.5 κ を弱コンパクト基数, A を V_κ の任意の部分集合とする. このとき, 構造 $(V_\kappa, \in, A)$ は整礎的な初等終端拡大をもつ. とくに, 推移的集合 M とその部分集合 A' が存在して, $\kappa \in M$, かつ $(V_\kappa, \in, A) \prec (M, \in, A')$ となる.

[証明] 集合論の言語 $\mathcal{L}(\in)$ に, 集合 A をあらわす一項述語記号 A と, V_κ の各要素 x をあらわす定数記号 c_x, それと, "新しい順序数" をあらわす定数記号 c^* を添加した拡張言語 $\mathcal{L}'$ を考えよう. そして, $\mathcal{L}'_{\kappa,\kappa}$ の文のうち, c^* への言及がなくて "標準モデル" すなわち $(V_\kappa, \in, A, x)_{x \in V_\kappa}$ で成立するすべての文, それに, c^* が順序数であることを主張する文 と κ 未満の各順序数についての文 $c_\alpha < c^*$ を集めて, 文の集合 Σ を作ったとしよう. このとき Σ は次に示すとおり $<\kappa$-充足性をもつ: S が Σ の部分集合で $|S| < \kappa$ であれば S に属する文に出現する定数 c_x の個数も κ 未満である. そこで順序数 $\beta < \kappa$ を, S に出現するすべての c_x に対して $x \in V_\beta$ となるように, じゅうぶん大きくとり, c^* をこの β で解釈し, 各 c_x は x そのもので解釈すれば, V_κ が S のモデルとなる. したがって Σ は $<\kappa$-充足性をもつ.

そこで, κ の弱コンパクト性により, Σ 全体のモデル $\mathcal{M} = (M, \in^*, A^*, x^*)_{x \in V_\kappa}$ が存在する. Σ に $(V_\kappa, \in, A, x)_{x \in V_\kappa}$ で成立するすべての文を含めてあったので, 対応 $x \mapsto x^*$ が初等埋め込みになる. $\mathcal{M}$ の要

素所属関係 $\in^*$ が整礎的であることは, 次の $\mathcal{L}'_{\kappa,\kappa}$ の文:

$$\neg\exists v_0 \exists v_1 \cdots \exists v_n \cdots \bigwedge_{n<\omega}\Big(v_{n+1} \in v_n\Big)$$

が　$(V_\kappa, \in)$ で成立しており, したがって $(M, \in^*)$ でも成立することによってわかる. モストフスキの崩壊定理により, 外延性公理の整礎的モデルは推移的集合の $\in$-構造と同型になる. そこで, M は推移的集合, $\in^*$ はホンモノの $\in$-関係であるとしても一般性は損なわれない. V_κ が推移的集合であることから, このとき, $x^* = x$ が成立し, $(M, \in, A')$ は $(V_\kappa, \in, A)$ の初等拡大モデルとなる. c^* に対応する M の順序数を γ とすると, これは κ 未満のどの順序数よりも大きいので $\gamma \geq \kappa$, したがって $\kappa \in M$ である. また, V_κ が推移的集合であることから, $(M, \in, A')$ は $(V_\kappa, \in, A)$ の終端拡大である. ◀

定理 3.5 から, 基数 κ が弱コンパクト基数であるという事態は構成可能的集合のクラス $\mathbf{L}$ に相対化されることが導かれます.

補題 3.6 κ を弱コンパクト基数とする. $A \subset V_\kappa$ とし, κ 未満のすべての順序数 α について $V_\alpha \cap A \in \mathbf{L}$ となっていると仮定する. このとき, $A \in \mathbf{L}$ である.
[**証明**] 仮定から

$$(V_\kappa, \in, A) \models \forall\alpha\big(V_\alpha \cap A \in \mathbf{L}\big)$$

となっている. 定理 3.5 から, $(V_\kappa, \in, A) \prec (M, \in, A')$ をみたす推移的集合 M と部分集合 $A' \subset M$ で, とくに $\kappa \in M$ となるものが存在する. このとき,

$$(M, \in, A') \models V_\kappa \cap A' \in \mathbf{L}$$

となるが, あきらかに $V_\kappa \cap A' = A$ であるし, また $\mathbf{L}^M = \mathbf{L} \cap M$ であるから, $A \in \mathbf{L}$ となる. ◀

いずれ玄妙基数や弱い意味の玄妙基数が $\mathbf{L}$ に相対化されることを証明するさいにも, この補題を利用します.

定理 3.7 κ を弱コンパクト基数とする. このとき, (κ は弱コンパクト基数である)$^{\mathbf{L}}$.
[**証明**] κ は正則だから (正則)$^{\mathbf{L}}$ であり, 極限基数であるから (極限基数)$^{\mathbf{L}}$ である. したがって κ は (弱到達不能基数)$^{\mathbf{L}}$ であるが, (GCH)$^{\mathbf{L}}$ により, 実は (κ は強到達不能基数である)$^{\mathbf{L}}$. あとは, κ の木の性質が $\mathbf{L}$ においても成立していることを示せばよい. $(T, <_T) \in \mathbf{L}$ とし, ($(T, <_T)$ は κ-木である)$^{\mathbf{L}}$ と仮定しよう. $|T| = \kappa$ であるから, $T \subset V_\kappa$ と仮定しても一般性は損なわれない. 構造 $(T, <_T)$ が木であること, 木としての高さ, 階数関数などはどれも $\mathbf{L}$ に対し絶対的である. 各レベルの濃度は $\mathbf{L}$ において κ 未満であるから, $\mathbf{V}$ においてはなおさら κ 未満である. ゆえに $(T, <_T)$ は本当に κ-木である. κ の木の性質により, T は長さ κ の鎖を含む. C を T の長さ κ の鎖で $<_T$ にかんして下向きに閉じているものとする. このとき, α を κ 未満の任意の順序数とするとき, $C \cap V_\alpha$ は濃度が κ 未満だから $<_T$ にかんして上に有界で, ある要素 $x \in C$ について

$$C \cap V_\alpha = \{\, y \in T \mid y <_T x \,\} \cap V_\alpha$$

となる. ところが $\{\, y \in T \mid y <_T x \,\} \in \mathbf{L}$ であるから $C \cap V_\alpha \in \mathbf{L}$ である. 補題 3.6 によって, C は $\mathbf{L}$ に属することになり, (C は T の長さ κ の鎖)$^{\mathbf{L}}$ となる. ◀

したがって, 可測基数やラムゼイ基数とちがって, 弱コンパクト基数の存在は構成可能性公理 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ と両立することになります.

4 記述不能性

弱コンパクト基数に関連して, 基数の記述可能性と記述不能性について考えます.

記述不能性という考えの動機づけはレヴィの反映原理 (Reflection Principle) にあります. 念のために復習しておくと, 集合論の $\in$-式 $\varphi(\vec{v})$ が任意に与えられたとき, この式に関して条件

$$\forall \vec{x} \in V_\alpha \Big(\varphi(\vec{x}) \;\leftrightarrow\; (V_\alpha, \in) \models \varphi(\vec{x}) \Big)$$

をみたす ($\mathbf{V}$ における φ の真偽を V_α が反映する) 順序数 α 全体のクラスが $\mathbf{ON}$ 上で共終であるというのが, 反映原理です. ここで, 式 $\varphi(\vec{v})$ は <u>任意の</u> 式ですが, <u>すべての</u> 式の $\mathbf{V}$ における真偽を反映する順序数の存在を集合論の枠内でフォーマルに証明することはできない, という点には改めて注意が必要です. ひとつの式 φ を固定するごとに, その式についての反映原理が, 集合論のひとつのフォーマルな定理として, 対応します.

さて, 基数 κ が強到達不能であれば, $V_{\kappa+1}$ は BG 集合論のモデルになっています. したがって, 任意の $A \in V_{\kappa+1}$ と, クラス変数 X を含むがクラス量化子を含まない任意の $\in$-式 (BG 集合論の内包公理と置換公理に使うことが認められる式) $\varphi(\vec{v}, X)$ に対して, BG 集合論の定理としての反映原理が V_κ 上で成立することになり, 構造 $(V_\kappa, \in, A)$ における式 φ の真偽を構造 $(V_\alpha, \in, A \cap V_\alpha)$ が反映するような順序数 $\alpha < \kappa$ が存在することになります. この状況を, “強到達不能基数はクラス量化子を含まない式によって記述可能ではない” と表現します. いっぽう, κ がクラス量化子を含まない式によって記述可能でないというこの状況から, $V_{\kappa+1}$ が BG 集合論のモデルになることが容易に導かれるので, “強到達不能基数の概念は記述不能性によって特徴づけられる” という, 言葉尻だけとらえるとなんだか奇妙なことになっているわけです.

このアイディアを活用するためには “記述可能” とか “記述不能” とかの定義をきちんと述べる必要があります. それにはまず, クラス変数を含む式 (2 階の $\in$-式) の解釈についてはっきりさせておく必要があります.

クラス変数を含む式 φ を考えます. φ の自由変数は集合変数 $v_0, \ldots, v_{k-1}$ とクラス変数 $X_0, \ldots, X_{\ell-1}$ だけだとします. 集合 M の要素 $a_0, \ldots, a_{k-1} \in M$ と部分集合 $A_0, \ldots, A_{\ell-1} \subset M$ を固定して, φ にあらわれる集合自由変数 $v_0, \ldots, v_{k-1}$ に $a_1, \ldots, a_{k-1}$ を代入し, クラス自由変数 $X_0, \ldots, X_{\ell-1}$ に $A_0, \ldots, A_{\ell-1}$ を代入し, 集合束縛変数は M 上を動き, クラス束縛変数は M の冪集合上を動くとすれば, φ の解釈が定まります. この解釈のもとで φ が真であるということを

$$(M, \in, A_0, \ldots, A_{\ell-1}) \models \varphi(x_0, \ldots, x_{k-1}, A_0, \ldots, A_{\ell-1})$$

と書きます. 以下ではこのように, 2 階の式の真偽についてはつねになんらかの集合の上で解釈するものとし, 真のクラスにおける真偽は考えません.

定義 4.1 2 階の $\in$-式 φ の集合自由変数は $v_0, \ldots, v_{k-1}$ だけ, クラス自由変数 $X_0, \ldots, X_{\ell-1}$ だけだとする. 順序数 β, 集合 $x_0, \ldots, x_{k-1} \in V_\beta$ と $A_0, \ldots, A_{\ell-1} \in V_{\beta+1}$ に対し,

$$(V_\beta, \in, A_0, \ldots, A_{\ell-1}) \models \varphi(x_0, \ldots, x_{k-1}, A_0, \ldots, A_{\ell-1})$$

だが, $\max\{\,\mathrm{rk}(x_0), \ldots, \mathrm{rk}(x_{k-1})\,\} < \alpha < \beta$ をみたすどんな順序数 α についても

$$(V_\alpha, \in, A_0 \cap V_\alpha, \ldots, A_{\ell-1} \cap V_\alpha) \not\models \varphi(x_0, \ldots, x_{k-1}, A_0 \cap V_\alpha, \ldots, A_{\ell-1} \cap V_\alpha)$$

となるならば, β は式 φ によって **記述可能** (describable) であるという.

つまり, β が記述可能とは, V_β がパラメータを含むある 2 階の $\in$-式のモデルとなる最小の順序数として特徴づけられる (記述できる) という意味で言っているわけです. つぎに, 記述不能性を定義するために, 2 階の式を分類します.

定義 4.2 クラス変数を含んでもよいがクラス量化子を含まない $\in$-式のことを Σ^1_0-式という. Π^1_0-式も同じ意味だとする. Σ^1_n-式 ψ を $\forall X\psi(X)$ のようにクラスに関する $\forall$ で量化した式を Π^1_{n+1}-式といい, Π^1_n-式 ψ を $\exists X\psi(X)$ のようにクラスに関する $\exists$ で量化した式を Σ^1_{n+1}-式という. ◀

この分類は, すべての 2 階の $\in$-式を網羅してるいるわけではありません. たとえば, クラス自由変数 X を含む $\in$-式 $\theta(x, X)$ があったとして, $\forall x\exists X\theta(x, X)$ という式は, 集合の量化のあとにクラスの量化がきているので, 定義 4.2 で扱われる式と一致しません. それでも, これから問題にしようとしている解釈にかんしては, 次の補題に述べられているように, 定義 4.2 にあらわれる式だけを考えればよいことがわかっています.

補題 4.3 任意の 2 階の式 φ に対して, 番号 n と, 以下に述べる意味で φ と同値な Π^1_n-式あるいは Σ^1_n-式 ψ が存在する: φ と ψ は同じ自由変数をもち, すべての極限順序数 α に対して

$$\forall\vec{A}\in V_{\alpha+1}\forall\vec{x}\in V_\alpha\Big((V_\alpha, \in, \vec{A})\models\big(\varphi(\vec{x}, \vec{A})\ \leftrightarrow\ \psi(\vec{x}, \vec{A})\big)\Big)$$

が成立する. ◀

この補題の証明は言語の構成の詳細に立ち入ることになるので省略しますが, せめて, 先ほど引き合いに出した式 $\forall x\exists Y\theta(x, Y)$ について, その道筋を例示してみます.

まず, 極限順序数 α について $(V_\alpha, \in)\models\forall x\exists Y\theta(x, Y)$ が成立していたとします. これは,

$$\forall x\in V_\alpha\exists A\in V_{\alpha+1}\Big((V_\alpha, \in, A)\models\theta(x, A)\Big)$$

ということですから, ($\mathbf{V}$ における選択公理により) 関数 $F: V_\alpha\to V_{\alpha+1}$ を

$$\forall x\in V_\alpha\Big((V_\alpha, \in, F(x))\models\theta(x, F(x))\Big)$$

となるようにとれます. $Z=\{\,\langle x, y\rangle\mid y\in F(x)\,\}$ とおきましょう. α が極限順序数なので V_α は順序対を作る操作のもとで閉じており, したがって, $Z\subset V_\alpha$ となります. いま, θ にあらわれないクラス変数 X_j を用い, θ にあらわれるクラス変数 Y を一斉に $\{\,y\mid\langle x, y\rangle\in X_j\,\}$ という項に置き換えた $\in$-式を θ' とします. つまり, Y が $v_i\in Y$ という形で現れたらそこを $\langle x, v_i\rangle\in Y$ と書き換え, $X_i=Y$ という形で現れたらそこを $\forall v_m(\langle x, v_m\rangle\in X_j\ \leftrightarrow\ v_m\in X_i)$ (ただし v_m は θ で使われていない集合変数) と書き換えます. このとき $\theta'(x, X_j)$ は $\theta(x, \{\,y\mid\langle x, y\rangle\in X_j\})$ と同じ意味になり, Z の選び方から

$$(V_\alpha, \in, Z)\models\forall x\theta'(x, Z)$$

したがって

$$(V_\alpha, \in)\models\exists X_j\forall x\theta'(x, X_j)$$

が成立します. 逆に $(V_\alpha, \in, Z)\models\forall x\theta'(x, Z)$ であれば, $(V_\alpha, \in, Z)\models\forall x\,\theta\big(x, \{\,y\mid\langle x, y\rangle\in Z\,\}\big)$ で, どの x に対してもある Y が, すなわち $\{\,y\mid\langle x, y\rangle\in Z\,\}$ が, θ をみたしますから, 結局

$$(V_\alpha, \in)\models\Big(\forall x\exists Y\theta(x, Y)\ \leftrightarrow\ \exists X_j\forall x\theta'(x, X_j)\Big)$$

となります.

さきほど θ から θ' への書き換えでは新しい束縛変数 v_m を新たに使用しました. 集合自由変数を変更する必要はありませんでしたが, クラス自由変数 Y が削除され別のクラス自由変数 X_j が導入されました. ただしこの変数 Y と X_j はいずれもあとで量化されることが前提の変数です. 完成した式 $\exists X_j \forall x \psi(x, X_j)$ の自由変数は, もとの $\forall x \exists Y \varphi(x, Y)$ の自由変数と全体として同じです. このように, 補題 4.3 では, φ から ψ へ書き換えるにあたって, 集合束縛変数やクラス束縛変数の出入りがある可能性はあるものの, 自由変数は変更されません.

この例では, 集合の $\forall$ をクラスの $\exists$ の内側に取り込みましたが, それ以外の場合でも, ここで意図している V_α 上の解釈の同値性を保ちながら, 集合の量化をクラスの量化の内側へ取り込むことは可能です. こうして, 当面の目的に関する限り, 定義 4.2 で扱われているタイプの $\in$-式を考えればじゅうぶんなのです.

定義 4.4 n を自然数とする. いかなる Π^1_n-式 φ によっても記述可能でないような順序数は, Π^1_n**-記述不能** (Π^1_n-indescribable) であるという. ◀

先ほど指摘したとおり, 強到達不能基数は Π^1_0-記述不能であり, またその逆が成立します. しかし, 最小の強到達不能基数や最小の強マーロ基数は, 定義を素直に書き下した式を用いて Π^1_1-記述可能です. このことから, Π^1_1-記述不能な順序数が強マーロ基数であることが導かれます.

補題 4.5 κ を Π^1_1-記述不能な順序数とする. φ を Π^1_1-式とし, $\vec{A} \in V_{\kappa+1}$ について

$$(V_\kappa, \in, \vec{A}) \models \varphi(\vec{A})$$

が成立しているとする. このとき, 集合

$$S = \left\{ \alpha < \kappa \;\middle|\; (V_\alpha, \in, \vec{A} \cap V_\alpha) \models \varphi(\vec{A} \cap V_\alpha) \right\}$$

は κ において定常である.

[証明] クラス自由変数 X についての式

$$\theta_0(X) \;\equiv\; \forall \xi \Big(\xi \cap X = \emptyset \;\vee\; \sup(\xi \cap X) \in X \Big) \;\wedge\; \forall \xi \exists \eta \Big(\eta > \xi \wedge \eta \in X \Big)$$

を考える. これは Π^1_0-式であり, 任意の極限順序数 α について

$$\forall X \subset \alpha \Big(X \in \mathrm{Club}_\alpha \;\leftrightarrow\; (V_\alpha, \in, X) \models \theta_0(X) \Big)$$

が成立する. そこで, κ の任意の club 部分集合 C に対して

$$(V_\kappa, \in, \vec{A}, C) \models \varphi(\vec{A}) \wedge \theta_0(C)$$

であるから, Π^1_1-記述不可能性によって, ある $\alpha < \kappa$ について

$$(V_\alpha, \in, \vec{A} \cap V_\alpha, C \cap \alpha) \models \varphi(\vec{A} \cap V_\alpha) \wedge \theta_0(C \cap \alpha)$$

となる. このとき $C \cap \alpha \in \mathrm{Club}_\alpha$ であるから $\alpha = \sup(C \cap \alpha)$ となり, $\alpha \in C$ がいえて $C \cap S \neq \emptyset$ となる. C は κ の任意の club 部分集合だったから, S は κ において定常である. ◀

定理 4.6 Π^1_1-記述不能な順序数は強マーロ基数である.

[証明] 次の式 θ_1 は Π^1_1-式である:

$$\theta_1 \equiv \forall F \forall \alpha \Big((F : \alpha \to \mathbf{ON}) \;\to\; \exists \beta \forall \gamma < \alpha F(\gamma) < \beta \Big).$$

あきらかに, 極限順序数 α が正則であることと $(V_\alpha, \in) \models \theta_1$ が同値である. したがって κ が Π^1_1-記述不能であれば $(V_\kappa, \in) \models \theta_1$ であり, 補題 4.5 により, 集合 $\{\, \alpha < \kappa \mid V_\alpha \models \theta_1 \,\}$ は κ において定常である. これは κ 未満の正則順序数の集合が κ において定常であること, すなわち, κ が弱マーロ基数であることを意味する. ところが κ は強到達不能基数でもあるから, 強マーロ基数である. ◀

同様の論法で, Π^1_1-記述不能な順序数の下の強マーロ基数が定常集合をなすことなどがわかります. したがって, 最小の Π^1_1-記述不能な順序数は最小の強マーロ基数と比較しても, はるかに大きいわけです.

定理 4.7 Π^1_1-記述不能な順序数は弱コンパクト基数である.

[証明] Π^1_1-記述不能な順序数は Π^1_0-記述不能, したがって強到達不能基数になっている. そこで, あとは Π^1_1-記述不能基数が木の性質をもつことを確かめればよい.

定理 4.6 の証明で考えた式 θ_1 とクラス自由変数 X について "X は **ON** の木順序づけであり, どのレベルも空ではなく, また各レベルはある順序数の部分集合である" と主張する式との連言を $\theta_2(X)$ としよう. このとき, 任意の無限基数 β と任意の二項関係 $R \subset \beta \times \beta$ について

$$(\beta, R) \text{ は } \beta\text{-木である} \ \leftrightarrow\ (V_\beta, \in, R) \models \theta_2(R)$$

となる. $\theta_2(X)$ は Π^1_1-式である. つぎに, $\theta_2(X)$ と "任意のクラス Y について, もしそれが順序づけ X にかんする鎖であるならば Y はある順序数の部分集合である" と主張する式との連言を $\theta_3(X)$ としよう. $\theta_3(X)$ も Π^1_1-式であり,

$$(\beta, R) \text{ は } \beta\text{-アロンシャイン木である} \ \leftrightarrow\ (V_\beta, \in, R) \models \theta_3(R)$$

が成立する. このようにアロンシャイン木は Π^1_1-式で特徴づけされる.

さて, κ が Π^1_1-記述不能基数であるとする. κ-アロンシャイン木が存在するという仮定から矛盾がでることを示せばよい. そのため, κ 上に順序関係 $<_T$ が存在して $(V_\kappa, \in, <_T) \models \theta_3(<_T)$ となっていたとする. κ-木の条件 (各水準のサイズが κ 未満) と κ の正則性から, 一般性を損なうことなく, $\alpha <_T \beta \implies \alpha < \beta$ となっていると仮定できる.

ここで, $\alpha = \{\xi < \kappa \mid \mathrm{rk}(\xi) < \alpha\}$ をみたす $\alpha < \kappa$ 全体の集合を C としよう. C は κ の club 部分集合であり, $\alpha \in C$ のとき $<_T \cap (\alpha \times \alpha)$ は α の木順序づけになる. 補題 4.5 により, ある $\alpha \in C$ について,

$$(V_\alpha, \in, <_T \cap (\alpha \times \alpha)) \models \theta_3\big(<_T \cap (\alpha \times \alpha)\big)$$

が成立する. このとき $\big(\alpha, <_T \cap (\alpha \times \alpha)\big)$ は α-アロンシャイン木である.

いっぽう, κ-木 $(\kappa, <_T)$ には階数 α の要素があるはずで, そのひとつを β とすれば $\{\xi < \beta \mid \xi <_T \beta\}$ は $\big(\alpha, <_T \cap (\alpha \times \alpha)\big)$ に含まれる長さ α の鎖になっている. これは $\big(\alpha, <_T \cap (\alpha \times \alpha)\big)$ が α-アロンシャイン木であるという前の段落の結論と矛盾している. ◀

定理 4.8 弱コンパクト基数は Π^1_1-記述不能である.

[証明] σ を任意の Π^1_1 文とする. すなわち, クラス自由変数 X をもちクラス量化を含まない式 $\varphi(X)$ について $\sigma \equiv \forall X \varphi(X)$ となっているとする. いま $A \subset V_\kappa$ について

$$(V_\kappa, \in, A) \models \sigma$$

だったと仮定しよう. 定理 3.5 により, 推移的集合 M と部分集合 $A' \subset M$ を, $\kappa \in M$ かつ $(V_\kappa, \in, A) \prec$

$(M, \in, A')$ となるようにとる．すると，

$$\begin{aligned} & (V_\kappa, \in, A) \models \sigma \\ \text{iff} \quad & \forall X \subset V_\kappa \ (V_\kappa, \in, A, X) \models \varphi(X) \\ \text{iff} \quad & (M, \in, A') \models \Big(\ \forall X \subset V_\kappa \ (V_\kappa, \in, A' \cap V_\kappa, X) \models \varphi(X) \ \Big) \end{aligned}$$

となるので，

$$(M, \in, A') \models \exists\alpha\Big(\ \forall X \subset V_\alpha \ (V_\alpha, \in, A' \cap V_\alpha, X) \models \varphi(X) \ \Big)$$

が成立する．あとは $(V_\kappa, \in, A) \prec (M, \in, A')$ であることにより

$$\begin{aligned} & (V_\kappa, \in, A) \models \exists\alpha\Big(\ \forall X \subset V_\alpha \ (V_\alpha, \in, A \cap V_\alpha, X) \models \varphi(X) \ \Big) \\ \text{iff} \quad & \exists\alpha < \kappa\Big(\ \forall X \subset V_\alpha \ (V_\alpha, \in, A \cap V_\alpha, X) \models \varphi(X) \ \Big) \\ \text{iff} \quad & \exists\alpha < \kappa\Big(\ (V_\alpha, \in, A \cap V_\alpha) \models \sigma \ \Big). \blacktriangleleft \end{aligned}$$

したがって弱コンパクト性はまた Π^1_1-記述不能性として特徴づけされるわけです．いっぽう木の性質や分割の性質 $\kappa \to (\kappa)^2_2$ などは Π^1_2-式として書き下すことができるので，最小の弱コンパクト基数は Π^1_2-記述可能であり，任意の Π^1_2-記述不能基数の下には弱コンパクト基数が定常集合をなしていることになります．

5 補足

弱コンパクト基数を特徴づけるいろいろの性質は，数理論理学の重要な基本定理を不可算基数へ拡張するものになっています．ここでは，これらの基本定理を復習します．

5.A ケーニヒの無限補題

第 1 節で定義した用語にしたがえば，$\aleph_0$-木とは，高さ ω の木で，各レベルが有限集合になっているようなもののことです．ケーニヒの無限補題は，$\aleph_0$-木は無限鎖をもつという主張です．これは $\aleph_0$-アロンシャイン木が存在しない，あるいは基数 $\aleph_0$ が木の性質をもつというように，言い換えることができます．このケーニヒの無限補題の証明と，関連する命題の証明を紹介します．

補題 1.12 や補題 1.14 の証明でやったように，木 T の要素 x に対して，x と比較可能な T の要素の全体を $T(x)$ としましょう．T が $\aleph_0$-木ならば，どの自然数 n についても $\mathrm{Lev}_n(T) \neq q\emptyset$ なので，T は無限集合です．ところが，$\mathrm{Lev}_0(T)$ は有限集合で，T は階数ゼロの有限個の要素によって

$$T = \bigcup \big\{ \ T(x) \ \big| \ x \in \mathrm{Lev}_0(T) \ \big\}$$

と有限個の部分木に分けられます．そこで，少なくともひとつ，$T(x)$ が無限集合になるような $x \in \mathrm{Lev}_0(T)$ があるはずです．そのような要素のひとつを x_0 としましょう．$T(x_0)$ は T の部分木で，無限集合なので，$\aleph_0$-木です．そして

$$T(x_0) = \bigcup \big\{ \ T(x) \ \big| \ x \in \mathrm{Lev}_1(T(x_0)) \ \big\}$$

となりますが，$\mathrm{Lev}_1(T(x_0))$ は有限集合なので，少なくともひとつ，$T(x)$ が無限集合になるような $x \in \mathrm{Lev}_1(T(x_0))$ があるはずです．そのような要素のひとつを x_1 としましょう．以下同様に，階数 n の要素 x_n が得られ $T(x_n)$ が無限集合だったとすると，

$$T(x_n) = \bigcup \big\{ \ T(x) \ \big| \ x \in \mathrm{Lev}_{n+1}(T(x_n)) \ \big\}$$

となり, $\mathrm{Lev}_{n+1}(T(x_n))$ は有限集合, $T(x_n)$ は無限集合であることから, $x_{n+1} \in \mathrm{Lev}_{n+1}(T(x_n))$ を $T(x_{n+1})$ が無限集合になるようにとれます. このように順次 x_n を選んでいくと, 集合

$$\{\, x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots \,\}$$

は T の無限鎖になります. これでケーニヒの無限補題が証明されました.

定理 5.1 (ケーニヒの無限補題) $\aleph_0$-木は無限な鎖を含む. ◀

ケーニヒの無限補題のこの証明法は, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の有界閉集合のコンパクト性を主張するハイネとボレルの定理 (Heine-Borel Theorem) の証明法と同様の論法になっています. このことを明らかにするために, ケーニヒの無限補題を露骨に用いてハイネとボレルの定理を証明してみます.

ハイネとボレルの定理 d-次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の単位閉立方体はコンパクトである.

[証明] 背理法による. $\mathbb{R}^d$ の単位閉立方体 I の開被覆 $\mathcal{U} = \{\, U_a \mid a \in A \,\}$ が有限部分被覆をもたなかったと仮定する.

I の各辺を二等分すると, 一辺の長さが 1/2 の小立方体が 2^d 個できる. それらのひとつひとつについて再び各辺を二等分すると, 一辺の長さが 1/4 の小立方体が, $2^d \times 2^d = 2^{2d}$ 個できる. 以下同様に, 小立方体をその辺を 2 等分することで分割するプロセスを続けると, 第 n 段階では各辺の長さが $1/2^n$ の小立方体が 2^{nd} 個できる. それらをすべての n にわたって集めた集合を T とする. T は包含関係の逆順序によって $\aleph_0$-木である. そこでいま T に属する小立方体のうち, 有限個の U_a $(a \in A)$ で被覆できないものだけを選び出し, その全体を T' としよう. T' は T の部分木である.

仮定により, T の階数ゼロの要素 I は T' に属する. いま小立方体 J が T' の階数 n の要素だったとすると, J は T の階数 $n+1$ の要素 2^d 個に分割される. もしもこれら $n+1$ この小立方体がどれも T' に入らないとしたら, それぞれは有限個の U_a によって覆われることになるが, 有限個の小立方体のそれぞれを有限個の U_a で覆ってしまえば, それら小立方体の和である J が有限個の U_a によって覆われることになり, J が T' に属するという想定とあいいれない. したがって, J を分割する階数 $n+1$ の要素のうち少なくともひとつは有限個の U_a で覆うことはできず, T' に属することになる. こうして T' の $(n+1)$-レベルも空ではないことがわかる. つまり, T' は $\aleph_0$-木である.

ケーニヒの無限補題により, T' は無限な鎖を含む. それを

$$I = J_0 \supset J_1 \supset \cdots \supset J_n \supset \cdots \quad (n < \omega)$$

としよう. 各 J_n は階数 n の要素だとしても一般性を損なわない. J_n から点 $\boldsymbol{x}_n$ をとれば, $n < n' < \omega$ のとき, 距離 $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_{n'}\|$ は J_n の対角線の長さ $\sqrt{d}/2^n$ を越えないから, 点列 $\{\, \boldsymbol{x}_n \,\}$ はコーシー列であり, I の点 $\boldsymbol{x}^*$ に収束する. $\mathcal{U}$ の全体は I を被覆するのだから, どれかの U_a に $\boldsymbol{x}^*$ が属することになるが, このとき U_a は $\boldsymbol{x}^*$ のある半径 $\varepsilon > 0$ の近傍を含む. そこで 点 $\boldsymbol{x}_n$ が $\boldsymbol{x}^*$ に十分 ($\varepsilon/2$ よりも) 近くなり, また小区間 J_n の対角線の長さが $\varepsilon/2$ より短くなるように, 大きな番号 n をとれば, $J_n \subset U_a$ となるはずだ. これは J_n が $\mathcal{U}$ の有限個のメンバーによって覆えないという前提とあいいれない. ◀

さて, $\aleph_0$-木の無限鎖の存在を示したケーニヒの無限補題の論法が, $\aleph_1$-木の不可算鎖の存在証明には使えなかったのはなぜでしょうか? $\aleph_0$-木と $\aleph_1$-木の大きな違いは, 極限順序数に対するレベルがあるかないかという点にあります. $\aleph_1$-木の場合には, 有限の階数 n の要素 x_n の上昇鎖を, 対応する $T(x_n)$ がつねに $\aleph_1$-木であるという条件をみたしながら選んでいったとしても, 階数 ω の要素を選ぶために $\bigcap_{n<\omega} T(x_n)$ をみたときに, これが $\aleph_1$-木になる保証がない, というわけです.

ですから, もしも κ-木 T から鎖

$$x_0 <_T x_1 <_T \cdots <_T x_\xi <_T \cdots$$

を選ぶさいに, $\alpha < \kappa$ であるかぎり $\bigcap_{\xi<\alpha} T(x_\xi)$ もやはり κ-木であることが保証されるように, 具合よく選べたとしたら, その木 T は長さ κ の鎖をもつわけです. そんな都合のいい話は, もちろんそういつもあるわけではありません. しかしながら, 重要な特殊ケースとして, 次のことがわかります.

定理 5.2 可測基数は木の性質をもつ. したがって可測基数は弱コンパクト基数である.

[証明] κ を可測基数とし, $(T, <_T)$ を κ-木としよう. κ-完備な非単項超フィルター U を T 上にとる. κ 未満の順序数 α に対して $T = \bigcup \{\, T(x) \mid x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T) \,\}$ が成立している. ここで x と x' があい異なる階数 α の要素のときは $|T(x) \cap T(x')| < \kappa$ であり, また $|\mathrm{Lev}_\alpha(T)| < \kappa$ である. したがって, $T(x) \in U$ となる $x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$ が, 各 α ごとにただひとつ存在する. その要素を x_α とすると, $\{\, x_\alpha \mid \alpha < \kappa \,\}$ は T の長さ κ の鎖である. ◀

連続値可測基数 (atomlessly measurable cardinal) についても同様の論法で木の性質を証明できますが, その場合はもう少し手が込んできます.

補題 5.3 κ と λ を不可算な正則基数とし, $\lambda < \kappa$ だったとする. $(T, <_T)$ は κ-木で, κ 未満の各 α についてつねに $|\mathrm{Lev}_\alpha(T)| < \lambda$ となっているものだとする. このとき, T は長さ κ の鎖を含む.

[証明] 補題 1.14 により, 一般性を損なわずに T はうまく刈り込まれた κ-木であると仮定できる. $\alpha < \kappa$ かつ $\mathrm{cf}(\alpha) = \lambda$ だったとしよう. $x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$ の下に T の分岐点が共終に存在すれば, それぞれから異なる階数 α の要素が育っているので, $|\mathrm{Lev}_\alpha(T)| \geq \lambda$ となって仮定に反する. そこで, x の下では分岐点の集合は有界である. この考察と, $\mathrm{cf}(\alpha) = \lambda$ であることと, $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ の濃度が λ 未満であることから, α 未満のある順序数 $g(\alpha)$ がとれて, T の分岐点が $g(\alpha)$ 以上 α 未満のレベルに全然存在しないということになっている. この g は κ の定常部分集合 $E = \{\, \alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \lambda \,\}$ 上に定義された退行的関数なので, フォドアの押し下げ補題により, ある定常集合 $S \subset E$ 上で一定値 β をとる. S は κ の共終部分集合であるから, 結局 T は β 以上のレベルではいっさい分岐しないということになる. ところが β レベルの要素は λ 個未満だから, κ の正則性により, どれか少なくともひとつの $x \in \mathrm{Lev}_\beta(T)$ について, $T(x)$ は濃度 κ をもつ鎖になっている. ◀

定理 5.4 連続値可測基数は木の性質を持つ.

[証明] κ を連続値可測基数とし, $(T, <_T)$ を κ-木としよう. T のすべての部分集合に対して定義された無原子的で κ-加法的な確率測度 μ が存在する. $T' = \{\, x \in T \mid \mu(T(x)) > 0 \,\}$ としよう. x と x' があい異なる階数 α の要素のときは $|T(x) \cap T(x')| < \kappa$ だから $\mu(T(x) \cap T(x')) = 0$ であり, また $T = \bigcup \{\, T(x) \mid x \in \mathrm{Lev}_\alpha(T) \,\}$ であり $|\mathrm{Lev}_\alpha(T)| < \kappa$ である. したがって, $\mu(T(x)) > 0$ となる要素は, 各レベルに必ずあるが, 多くとも可算個しかない. こうして, 部分木 T' は, 各レベルが高々可算な κ-木となる. ここで $\lambda = \aleph_1$ として補題 5.3 を用いれば, T' が長さ κ の鎖を含むことがわかる. ◀

5.B ラムゼイの定理.

七羽のハトが三つの巣穴に住んでいるとしたら, どれか少なくともひとつ, 三羽以上のハトが住んでいる穴があるはずです. 無限に多くのものを有限個の引き出しに片付けようとしたら, ひとつ以上の引き出しに無限個のものを入れないといけません. これらはいわゆる **引き出し論法** (Pigeonhall Principle) の一例です. これらは簡単ですが, 次の例はどうでしょうか:

> 6 人の人がいるときには, お互い顔見知りの 3 人か, お互い初対面の 3 人が, かならず含まれるけれども, 集まった人数が 5 人だと, 顔見知り 3 人組も初対面 3 人組も存在しない場合がある.

もう少し一般に, 次のことが成立します.

> 任意の正整数 ℓ に対して, 次のような整数 N が存在する: N 人以上の人が集まれば, お互い顔見知りの ℓ 人か, お互い初対面の ℓ 人が, かならず含まれる.

これが, ラムゼイの定理のひとつの例になっています. ラムゼイの定理にはいろいろのバリエーションがありますが, ここでは無限グラフの分割にかんするラムゼイの定理を証明することにします.

いくつかの記号と用語を定義します. n を正整数とします. 集合 X の n 個の自然数からなる集合の全体を $[X]^n$ と書きます. $[X]^n$ から自然数 $k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ への写像を $[X]^n$ の **k-彩色** (k-coloring) といいます. $F : [X]^n \to k$ なる k-彩色に対して, $F``[A]^n$ がちょうど 1 つだけの要素からなるような X の部分集合 A のことを F に関する **均質集合** (homogeneous set) あるいは**単色集合**といいます. ですから, ラムゼイの定理の例として先ほど引用した命題は, N 個以上の要素を持つ集合 X について $[X]^2$ の 2-彩色に関する ℓ 個以上の要素をもつ単色集合の存在を主張するものでした.

無限集合に対しても同様の問題を考えることができます. (有限または無限の) 基数 κ, λ, μ, ν に対する, 集合 $[\kappa]^\nu$ の任意の μ-彩色がいつでも濃度 λ の単色集合を含む, という命題を

$$\kappa \to (\lambda)^\nu_\mu$$

と表記します. 一般に, κ が大きければ大きいほど, また λ, μ, ν が小さければ小さいほど, それだけ $\kappa \to (\lambda)^\nu_\mu$ が成立しやすいのですが, では λ, μ, ν をどのようにとっても, κ を十分大きくとりさえすれば $\kappa \to (\lambda)^\nu_\mu$ となるだろうか, そして, そうなるとしたら, λ, μ, ν に対して κ をどうとればよいだろうか, というのが, ラムゼイ理論の一般的な形式です. これについてまず最初に確認しておくべきなのは, ν は有限でないとうまくいかないということです.

定理 5.5 どんな無限基数 κ についても, $\kappa \to (\aleph_0)^{\aleph_0}_2$ は成立しない.[*11]

[証明] $[\kappa]^{\aleph_0}$ の整列順序づけ $<^*$ を考える. $a \in [\kappa]^{\aleph_0}$ について

$$F(a) = \begin{cases} 0, & \forall b \in [a]^{\aleph_0} (\ a \leq^* b\ ) \text{ が成立するとき} \\ 1, & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

として 2-彩色 F を定義しよう. $X \subset \kappa$ を任意の無限部分集合とする. $[X]^{\aleph_0}$ の $<^*$-最小要素 a については当然 $F(a) = 0$ となる. a の無限かつ補無限な部分集合のうち $<^*$-最小のものを b とし, $a \setminus b$ から要素 ξ をって $c = b \cup \{\xi\}$ とおけば, b の最小性から $b <^* c$ となる. $b \in [c]^{\aleph_0}$ であるから $F(c) = 1$ である. したがって, F は $[X]^{\aleph_0}$ において一定値をとらない. ◀

そのような理由で, 以下では ν は有限基数すなわち自然数 n とします. そうすると, 有限彩色について, 次の定理が成立します.

定理 5.6 (ラムゼイの定理) 任意の正整数 m と n について $\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_m$ が成立する.

[証明] n にかんする帰納法で証明する.

$n = 1$ のときは普通の引き出し論法にすぎない.

つぎに m-彩色 $F : [\omega]^{n+1} \to m$ が任意に与えられたとする. $[\omega \setminus \{0\}]^n$ の m-彩色 F_0 を $F_0(a) = F(\{0\} \cup a)$ によって定義しよう. 帰納法の仮定 $\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_m$ により, F_0 にかんする単色な無限集合 $X_0 \subset \omega \setminus \{0\}$ が

[*11] 証明を見ればわかるとおり, この結果は選択公理 (の一変形である整列可能性) に露骨に依存しています. マサイアス (Adiran R.D. Mathias) の証明したところによれば, 到達不能基数の存在が矛盾しない限り, 選択公理のない集合論と $\aleph_0 \to (\aleph_0)^{\aleph_0}_2$ とは矛盾しません.

存在する．$[X_0]^n$ における F_0 の共通の値を c_0 とする．$x_0 = \min X_0$ とする．次に $[X_0 \setminus \{x_0\}]^n$ の m-彩色 F_1 を $F_1(a) = F(\{x_0\} \cup a)$ によって定義しよう．帰納法の仮定により，F_1 にかんして単色な無限集合 $X_1 \subset X_0 \setminus \{x_0\}$ が存在する．$[X_1]^n$ における F_1 の共通の値を c_1 とし，$x_1 = \min X_1$ とする．以下同様に，X_k, c_k, x_k が得られたとして，$[X_k \setminus \{x_k\}]^n$ の m-彩色 F_{k+1} を $F_{k+1}(a) = F(\{x_k\} \cup a)$ によって定義し，これにかんして単色な無限集合 $X_{k+1} \subset X_k \setminus \{x_k\}$ を取り出して，F_{k+1} の共通の値を c_{k+1} とし，X_{k+1} の最小要素を x_{k+1} とする．

このようにして得られた x_k のうち，$x_{k_0} < x_{k_1} < \cdots < x_{k_n}$ と $n+1$ 個の要素を考えたとすると，$x_{k_1}, \ldots, x_{k_n} \in X_{k_0+1}$ であることから $F(\{x_{k_0}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}\}) = F_{k_0+1}(\{x_{k_1}, \ldots, x_{k_n}\}) = c_{k_0+1}$ となる．だから，$c \in m$ を無限個の k について $c_{k+1} = c$ となるようにとり，$X = \{\, x_k \mid c_{k+1} = c \,\}$ とおけば，X は無限集合で，F は $[X]^{n+1}$ 上で一定値 c をとることになる．◀

不可算な単色集合をめぐる議論は第 2 節で述べたとおりで，$2^{\aleph_0} \to (\aleph_1)^2_2$ は成立せず，$(2^{\aleph_0})^+ \to (\aleph_1)^2_{\aleph_0}$ は成立します．これに関連して，色の数が無限になった場合の次の結果を紹介します．

定理 5.7 $2^{\aleph_0} \to (3)^2_{\aleph_0}$ は成立しない．

[証明] $[{}^{\omega}2]^2$ の $\aleph_0$-彩色を，$F(\{x,y\}) = \min\{\, n < \omega \mid x(n) \neq y(n) \,\}$ によって定義しよう．もしも $x, y, z \in {}^{\omega}2$ について，$F(\{x,y\}) = F(\{y,z\}) = n$ となったとすると，$x{\restriction}n = y{\restriction}n = z{\restriction}n$ かつ $x(n) \neq y(n)$, $y(n) \neq z(n)$ となる．しかし $x(n)$, $y(n)$, $z(n)$ は 0 でなければ 1 だから，$x(n) \neq y(n)$, $y(n) \neq z(n)$ からは $x(n) = z(n)$ が導かれて，$x \restriction (n+1) = z \restriction (n+1)$，したがって $F(\{x,z\}) \geq n+1$ となる．◀

5.C 完全性定理とコンパクト性定理

形式化された論理は，論理式をたんなる記号列としてあつかい，意味内容を捨象して記号列の構造的な特徴だけに注目して推論規則を定式化します．ここで推論規則のすべてを書き下すことはしませんが，たとえば，A と $(A \to B)$ から B を導出してよろしい，とか，A と B から $A \wedge B$ を導出してよろしい，というようないくつかの単純な規則が，明示的に与えられます．形式言語 $\mathcal{L}$ の文の集合 Σ から文 φ が導出できる，ということを，次の条件をみたす $\mathcal{L}$ の式の並び $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ があることと定義します:

> 各 φ_i $(0 \leq i \leq n)$ は Σ に属する文であるか，あるいは，先立つ $\varphi_0, \ldots, \varphi_{i-1}$ から論理の推論法則によって導出されうる式である．そして，最後の φ_n が φ に一致する．

この条件をみたす式の並び $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ のことを Σ からの φ の **演繹** (deduction) あるいは **証明** (proof) といいます．文の集合 Σ から文 φ が導出できることを，$\Sigma \vdash \varphi$ とあらわします．このように，推論法則とか演繹とか導出可能性いったものは，記号列の構文的な特徴だけを手がかりにして考えられているものです．

いっぽう，なんらかの数学的構造を記述する意図をもって形式言語が構想されている場合も，もちろんあります.[*12] ですから，数学的構造によって形式言語がどのように意味づけされるかという，形式言語の意味論的側面も無視することはできません．次にこれを検討しましょう．

たとえば，代数学で「群 G」といった場合には，集合 G, G 上の (積と呼ばれる) 二項演算 $\circ : G \times G \to G$, (逆と呼ばれる) 一項演算 ${}^{-1} : G \to G$, それと (単位元と呼ばれる) 特定の要素 $e \in G$ をワンセットにした $(G, \circ, {}^{-1}, e)$ のことを考えています．また，順序集合 X といえば，集合 X とその上の (順序づけ) とよばれる関係 $<_X$ がセットになった $(X, <_X)$ のことを考えています．

[*12] いや，こんなヒネッタ言い方をしていては良識が疑われます．まじめに構想された形式言語は，代数システムなりコンピュータの計算プロセスなり，なんらかの数学的構造の記述を意図しているに決まっています．ただ，形式言語はそういう意図をまったく離れて純粋に構文論的に扱うことが可能でなければならず，そのことを逆手にとれば，意図された対象をもたないオモチャの形式言語を定義することもまた可能である，というだけの話です．

このように, 数学的構造とは, 言及の範囲を定める集合と, その集合上で定義された演算や関係とのセットを意味します.

「群」とか「環」とか「順序集合」といった, 数学的構造の特定のクラスを全体として考えるときには, 集合も演算そのものも多種多様ですが, 群ならば二項演算ひとつと一項演算ひとつと定数ひとつが指定される, 順序集合なら二項関係ひとつが指定される, というように, それぞれのクラスに特有の型というか **テンプレート** が共通に考えられます. 形式言語は, ひとまずこの構造のテンプレートを定めます. こうして, たとえば, 群のクラスと順序群のクラスは, 順序群のクラスのほうが関係記号を余計に持っている (テンプレートが異なる) ことによって区別されます.

言語によってテンプレートが指定されれば, そのテンプレートに合致する数学的構造によって, その言語の式を意味づけすることが可能になります. 群の場合で言えば, 二項演算がどんなものとして与えられるか, 逆元をどうやって求めればいいか, 単位元はどれか, それらを決めるのが群論の言語の**解釈**を定めることになっています. この 解釈が定められることによって, たとえば, 式 $\forall x \forall y \exists z(\, xz = zy\,)$ はすべての群で成立するが, 実 2 次行列の群 $GL(2, \mathbb{R})$ では 式 $\forall x \forall y(\, xy = yx\,)$ は成立しない, といった具合に, それぞれの数学的構造において, どの文が成立し, どの文が成立しないかが確定します.

つぎに, その数学的構造のクラスを特徴づける性質を, 演算や関係のみたすべき条件式の形で指定します. これは形式言語の役割というより, その言語で記述された文の集合を指定すること, すなわち「公理系」の設定の問題となります. たとえば, 群のクラスとアーベル群のクラスは同じテンプレート (積, 逆, 単位元) をもっていますが, アーベル群のクラスのほうが公理すなわち条件が多いことによって区別されます. このように, 構文論的な観点からは形式言語の文の任意の集合にすぎなかった　推論の前提の集合 Σ は, 意味論的側面からは, 対象となる数学的構造のクラスを指定するための最重要ポイントということになります. (蛇足ですが, 群のクラスと有限群のクラスの区別は, テンプレートの違いによるものでも代数的な条件式の違いによるものでもありません. これらの方法では有限群のクラスを特徴づけすることはできないのです. 形式言語がわたくしたちの把握したい数学的構造のすべてを表現できるわけではないのです. このことは, これから解説するコンパクト性定理と関連しています.)

形式言語 $\mathcal{L}$ の文 φ が数学的構造 $\mathcal{A}$ において成立していることを, $\mathcal{A} \models \varphi$ と書きます. Σ に属するすべての文 φ について $\mathcal{A} \models \varphi$ となるときには $\mathcal{A} \models \Sigma$ と書き, $\mathcal{A}$ は Σ の **モデル** (model) である, といいます.[*13] もちろん, このようにいうときには, 数学的構造 $\mathcal{A}$ によって形式言語 $\mathcal{L}$ をどのように解釈するかきちんと指定されていることが大前提となっています.

さて, 論理の推論規則は, 次の意味で **健全性** (soundness) をもつように選ばれています.

推論規則の健全性 文の集合 Σ から φ が導出できるとき, φ は Σ のすべてのモデルにおいて成立する. ◀

これはたとえば, 群の公理から論理的に導出される内容はすべての群において成立している, というような主張で, あたりまえのことのようですが, 形式化された数学における推論規則の設定が適切であることのひとつの状況証拠となります.

健全性は「正しい前提から間違った結論を導かない」ということを意味していると考えられます. しかし, 推論法則が健全であっても, 前提が「間違っている」ならば, 間違った結論が出てくることは避けられません. たとえば, 前提条件が矛盾していたら理論全体が無意味なものになるわけです.

式の集合 Σ から ある文 φ とその否定文 $\neg\varphi$ の両方が導出可能であるとき, Σ は **矛盾する** (inconsistent)

[*13] 数理論理学においては現実が理論のモデルとなるのです. いっぽう, 数理経済学などの分野ではモデルは現実を模写した理論的構築物です.

といいます．これは，Σ から $\varphi\wedge(\neg\varphi)$ という形の式が導出できることといっても同じことになります．いかなる数学的構造もある文 φ とその否定文 $\neg\varphi$ の両方をみたすことはありえません．ですから，もしも Σ が矛盾していたら，Σ のモデルは存在しません．矛盾した理論は意味論的に空虚なものになるわけですが，それだけでなく，矛盾した文の集合からは任意の文を導出できるので，形式的体系としても面白いものではありません．

あきらかに，推論規則が健全であることはゼヒトモ必要なことです．ですが，導出できる結論がすくなければ少ないほど，それだけ健全性は成立しやすいこともあきらかですから，健全であるだけでは必ずしも十分でありません．推論規則は，正しい文をすべて導出できるほどに強力なものであることが望ましいのです．Σ のすべてのモデルで成立している式 φ が Σ から導出できるという，「健全性の逆」が成立してほしいのです．

フレーゲやヒルベルトによって定式化された近代の数理論理学の体系はまさにこのことを実現しています．このことを立証したのが，ゲーデル (Kurt Gödel) の **完全性定理** (Completeness Theorem) です．

完全性定理 $\mathcal{L}$ の文の集合 Σ から φ が形式的に導出可能であるための必要十分条件は，Σ のすべてのモデルが φ のモデルになっていることである．◀

条件の必要性はさきほど述べた推論規則の健全性にほかなりません．その逆が問題なのですが，健全性の逆の対偶をとれば，“文 φ が Σ から導出されないかぎり，$\neg\varphi$ をみたす Σ のモデル $\mathcal{A}$ が存在する，” ということになります．いま φ が Σ から導出されないというのは，文の集合として $\Sigma\cup\{\neg\varphi\}$ が矛盾していないということにほかなりませんから，完全性定理は「矛盾していない文の集合はモデルをもつ」という主張と同値になります．そこで，完全性定理を証明するためには，文の集合 Σ が矛盾していないという仮定のもとで，Σ のモデルを構築する方法を考えることになります．

モデル理論の基礎をなす定理として重要なスコーレム (Albert Thoralf Skolem) の **コンパクト性定理** (Compactness Theorem) は，上で述べたゲーデルの完全性定理 (の対偶) と双生児のようによく似た次の主張です．

コンパクト性定理 $\mathcal{L}$ の文の集合 Σ の任意の有限部分集合がモデルをもつとき，Σ 全体もモデルをもつ．◀

文の集合 Σ が矛盾を含まないという完全性定理の前提が，コンパクト性定理では Σ の任意の有限部分集合がモデルをもつという仮定に置き換えられています．もしも Σ が矛盾すれば Σ のなんらかの有限部分集合からの矛盾の演繹が存在し，(論理の健全性により) その有限部分集合にはモデルが存在しないことになります．ですから，Σ の任意の有限部分集合がモデルをもつという要請は，Σ が矛盾していないという要請と比較して，見かけ上は強くなっています．ですから，完全性定理が証明できればコンパクト性定理は自動的に得られます．とはいえ，完全性定理とコンパクト性定理との双生児のような類似性を手がかりに，両者を同時に証明してしまうことができます．ここではヘンキン (Leon Henkin) による証明を紹介します．

以下では，文の集合 Σ が矛盾していないときに Σ は **整合的** (consistent) であるといい，Σ の任意の有限部分集合がモデルをもつときに Σ は **有限充足的** (finitely satisfiable) であるということにします．最初のいくつかの補題は，整合性と有限充足性とに共通の構造的性質を指摘するものです．

補題 5.8 φ を $\mathcal{L}$ の文とする．$\mathcal{L}$ の文の集合 Σ が整合的であるならば，$\Sigma\cup\{\varphi\}$ か $\Sigma\cup\{\neg\varphi\}$ の少なくとも一方 (あるいは両方) は整合的である．

[証明] もしも $\Sigma\cup\{\varphi\}$ が矛盾するとしたら $\Sigma\vdash\neg\varphi$ である．もしも $\Sigma\cup\{\neg\varphi\}$ が矛盾するとしたら $\Sigma\vdash\neg\neg\varphi$ である．だから $\Sigma\cup\{\varphi\}$ と $\Sigma\cup\{\neg\varphi\}$ の両方が矛盾するとしたら $\Sigma\vdash(\neg\varphi)\wedge(\neg\neg\varphi)$ となり，Σ 自体が矛盾している．◀

補題 5.9 φ を $\mathcal{L}$ の文とする．$\mathcal{L}$ の文の集合 Σ が有限充足的であるならば，$\Sigma\cup\{\varphi\}$ か $\Sigma\cup\{\neg\varphi\}$ の少なく

とも一方 (あるいは両方) は有限充足的である.

[証明] $\Sigma \cup \{\varphi\}$ が有限充足的でなかったとしよう. すると, Σ のある有限部分集合 S_0 について, $S_0 \cup \{\varphi\}$ のモデルが存在しないということになる. Σ の他の有限部分集合 S が与えられたすると, Σ が有限充足的だという仮定により $S \cup S_0$ にはモデル $\mathcal{A}$ が存在する. ところが $S_0 \cup \{\varphi\}$ のモデルは存在しないので $\mathcal{A}$ においては $\neg\varphi$ が成立している. つまり $\mathcal{A}$ は $S \cup S_0 \cup \{\neg\varphi\}$ のモデルである. ここで S は Σ の任意の有限部分集合でよいから, $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ の任意の有限部分集合がモデルをもつことになる. よって, $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ が有限充足的である. ◀

言語 $\mathcal{L}$ の論理式のうち, 自由変数をもたず, しかも一番外側の記号が存在量化子 $\exists$ であるようなものを**存在文**と呼ぶことにします. いま言語 $\mathcal{L}$ の存在文 $\exists v\varphi(v)$ 一つ一つに対応して, 新しい定数記号 c_φ を $\mathcal{L}$ へ添加して言語を拡充 (expand) し, そうして得られた新しい言語を $\mathcal{L}'$ とあらわしたとしましょう. $\mathcal{L}$ の文の集合 Σ に, $\mathcal{L}$ の存在文 $\exists v\varphi(v)$ のすべてにわたって, $\mathcal{L}'$ の文

$$\Theta_\varphi \;\equiv\; \Big(\big(\exists v\varphi(v)\big) \;\to\; \varphi(c_\varphi) \Big)$$

を付け加えて得られる文の集合を Σ' と書くことにします. 意味的には, この Θ_φ は, 条件 $\varphi(v)$ をみたす要素 v があるとしたら, c_φ はまさにそういうもののひとつである, と主張しています. このような定数 c_φ は存在文 $\exists v\varphi(v)$ に対する **スコーレム定数** (Skolem constant) と呼ばれますので, 以後は, $\mathcal{L}'$ と Σ' のことを $\mathcal{L}$ と Σ の**スコーレム定数による拡大**と呼ぶことにします. この操作は, 存在する可能性のあるものに対してつけるべき名前を前もって予約するだけのものであり, 実際に何かが存在するとか存在しないという主張を新たに付け加えないので, もとの理論を実質的に強化するものではありません.

補題 5.10 $\mathcal{L}$ の文の集合 Σ が整合的であるならば, スコーレム定数による拡大 Σ' も整合的である.

[証明] もしも Σ' が矛盾するとしたら, 有限個の $\mathcal{L}'$ の文 $\Theta_{\varphi_1},\ldots,\Theta_{\varphi_n}$ を Σ のある有限部分集合 S に付け加えたものが矛盾する. とくに n をそのようなことが起こりうる最小の数だとすると, $S \cup \big\{ \Theta_{\varphi_1}, \ldots, \Theta_{\varphi_{n-1}} \big\}$ は整合的で, これに Θ_{φ_n} を付け加えたとたん矛盾する, ということになっている. これはとりもなおさず, $S \cup \big\{ \Theta_{\varphi_1}, \ldots, \Theta_{\varphi_{n-1}} \big\}$ から Θ_{φ_n} の否定文が導出できるということにほかならない. つまり

$$S \cup \big\{ \Theta_{\varphi_1}, \ldots, \Theta_{\varphi_{n-1}} \big\} \vdash \big(\exists v_n \varphi_n(v_n)\big) \wedge \neg\varphi_n(c_{\varphi_n})$$

が成立している. ところが定数記号 c_{φ_n} は左辺の $S \cup \big\{ \Theta_{\varphi_1}, \ldots, \Theta_{\varphi_{n-1}} \big\}$ にも存在文 $\exists v_n \varphi_n(v_n)$ にも出現しない新しい定数であるから, この c_{φ_n} のかわりに, 同じく左辺にも $\exists v_n \varphi_n(v_n)$ にも出現しない $\mathcal{L}$ の変数記号 v^* を代入した $\neg\varphi_n(v^*)$ も導出できるはずで,

$$S \cup \big\{ \Theta_{\varphi_1}, \ldots, \Theta_{\varphi_{n-1}} \big\} \vdash \big(\exists v_n \varphi_n(v_n)\big) \wedge \neg\varphi_n(v^*)$$

となる. ところが, 存在文 $\exists v_n \varphi_n(v_n)$ から, それまでまだ一度も出現していない変数記号 v^* を v_n に代入した $\varphi_n(v^*)$ を導出することは, 論理の $\exists$-除去 の推論規則として認められているはずなので, このとき

$$S \cup \big\{ \Theta_{\varphi_1}, \ldots, \Theta_{\varphi_{n-1}} \big\} \vdash \varphi_n(v^*) \wedge \neg\varphi_n(v^*)$$

すなわち, $S \cup \big\{ \Theta_{\varphi_1}, \ldots, \Theta_{\varphi_{n-1}} \big\}$ が矛盾することになる. これは n の最小性の仮定とあいいれない. ◀

補題 5.11 $\mathcal{L}$ の文の集合 Σ が有限充足的であるならば, スコーレム定数による拡大 Σ' も有限充足的である.

[証明] 有限個の $\mathcal{L}'$ の文 $\Theta_{\varphi_1},\ldots,\Theta_{\varphi_n}$ を Σ のある有限部分集合 S に付け加えたものがモデルをもてばよい. 仮定により S はモデルをもつので仮にそれを $\mathcal{A}$ としよう. n 個の存在文 $\exists v_i \varphi_i(v_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ のう

ち, $\mathcal{A}$ において成立して いない ものについては, 対応する Θ_{φ_i} が $\mathcal{A}$ において自動的に成立する．いっぽう, $\exists v_i \varphi_i(v_i)$ が $\mathcal{A}$ において成立しているなら, なんらかの要素 $a_i \in A$ を $\mathcal{A} \models \varphi_i(a_i)$ となるようにとれるはずなので, その a_i を c_{φ_i} の $\mathcal{A}$ における解釈とすれば, Θ_{φ_i} が $\mathcal{A}$ において成立することになる．したがって $S \cup \{\Theta_{\varphi_1}, \ldots, \Theta_{\varphi_n}\}$ はこのように解釈を拡張した $\mathcal{A}$ をモデルにもつ. ◀

言語 $\mathcal{L}$ をスコーレム定数によって拡大した言語 $\mathcal{L}'$ は, $\mathcal{L}$ に含まれない定数記号をたくさん含んでおり, したがって, それらが代入された新しい論理式や項 (対象式) をたくさん含んでいることになります．ですから, $\mathcal{L}'$ には, $\mathcal{L}$ には含まれていなかった新しい存在文が含まれているはずです．次にはそれらにたいしてスコーレム定数による拡大をおこない, そうするとまた定数記号が増えて, 存在文も増える, このことが限りなく繰り返されていきます:

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{L}' \subset \mathcal{L}'' \subset \cdots \subset \mathcal{L}^{(n)} \subset \cdots$$
$$\Sigma \subset \Sigma' \subset \Sigma'' \subset \cdots \subset \Sigma^{(n)} \subset \cdots .$$

ここで $\mathcal{L}^{(n+1)}$ と $\Sigma^{(n+1)}$ はそれに先立つ $\mathcal{L}^{(n)}$ と $\Sigma^{(n)}$ のスコーレム定数による拡大だとします．そして, これら全体の和集合を考えます：

$$\mathcal{L}^* = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{L}^{(n)}, \quad \Sigma^* = \bigcup_{n<\omega} \Sigma^{(n)}.$$

このとき $\mathcal{L}^*$ と Σ^* は, 次の意味で 存在文に対する **立証性** (witness property) をもつことになります．次の補題において $(c_\varphi)^{\mathcal{A}}$ とは定数記号 c_φ のモデル $\mathcal{A}$ における解釈をあらわしています.

補題 5.12 $\mathcal{L}^*$ の存在文 $\exists v \varphi(v)$ が Σ^* から導出されるならば, $\mathcal{L}^*$ の定数記号 c_φ について $\varphi(c_\varphi)$ が Σ^* から導出される．また, 存在文 $\exists v \varphi(v)$ が Σ^* のすべてのモデルにおいて成立するならば, Σ^* のすべてのモデル $\mathcal{A}$ において, $\mathcal{A} \models \varphi\big((c_\varphi)^{\mathcal{A}}\big)$ となる. ◀

言語 $\mathcal{L}$ と文の集合 Σ からこのように立証性をもつ $\mathcal{L}'$ と Σ' を構成することを, 理論を **ヘンキン化する** (Henkinize) といいます．ここで, Σ^* そのものばかりでなく, $\mathcal{L}^*$ の文の集合で Σ^* を含むものは, すべて立証性をもつことに注意してください.

ヘンキン化がいたって安全な操作であることを示す次の補題は, 補題 5.10 と補題 5.11 から直ちに導かれます.

補題 5.13 言語 $\mathcal{L}$ の文の集合 Σ と, そのヘンキン化 $\mathcal{L}^*$ と Σ^* を考える．もしも Σ が整合的なら Σ^* も整合的である．もしも Σ が有限充足的なら Σ^* も有限充足的である. ◀

補題 5.8 と補題 5.9 にツォルンの補題を組み合わせると, ヘンキン化された Σ^* を, さらに次の意味で “極大” な文の集合 $\tilde{\Sigma}$ に拡大できます: $\tilde{\Sigma} \supset \Sigma^*$ であり, $\mathcal{L}^*$ のどの文 φ についても $\varphi \in \tilde{\Sigma}$ と $(\neg\varphi) \in \tilde{\Sigma}$ のうち一方が, そして一方だけが, 成立する．そして, Σ が整合的なら $\tilde{\Sigma}$ も整合的であり, Σ が有限充足的なら $\tilde{\Sigma}$ も有限充足的である.

そこで, 以下では最初から 言語 $\mathcal{L}$ と文の集合 Σ が立証性をもち, Σ は整合的あるいは有限充足的で, しかもそのようなもののうちで極大である と仮定して, Σ のモデルの存在を示します．次の補題は極大性からの帰結です:

補題 5.14 言語 $\mathcal{L}$ と文の集合 Σ が立証性をもち, Σ は整合的あるいは有限充足的で, しかもそのようなもののうちで極大である と仮定する．このとき

(i) $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1} \in \Sigma$ で, φ_n が $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ から導出できるときは, $\varphi_n \in \Sigma$ である.

(ii) $(\varphi \wedge \psi) \in \Sigma$ は $\varphi \in \Sigma$ と $\psi \in \Sigma$ の両方が成立することと同値.

(iii) $(\varphi \vee \psi) \in \Sigma$ は $\varphi \in \Sigma$ と $\psi \in \Sigma$ のすくなくとも一方が成立することと同値.
(iv) $(\neg\varphi) \in \Sigma$ は $\varphi \notin \Sigma$ と同値.
(v) $(\exists v\varphi(v)) \in \Sigma$ は $(\varphi(c_\varphi)) \in \Sigma$ と同値. ◀

いま, (あらかじめヘンキン化された) 言語 $\mathcal{L}$ の定数記号全体の集合 $\mathcal{C}$ 上に関係 $\sim$ を

$$c \sim d \ \text{ iff } \ \big(c = d\big) \in \Sigma$$

によって定義したとします. 補題 5.14 の (i) により, Σ が極大整合的だとしても極大有限充足的だとしても, この関係 $\sim$ は $\mathcal{C}$ 上の同値関係になります. 同値類の集合 $\mathcal{C}/\sim$ を M とし, 定数記号 c の $\sim$-同値類を $\bar{c}$ と書きましょう.

言語 $\mathcal{L}$ の r 項関係記号 $R(v_1, \ldots, v_r)$ を考えます. いま 定数記号 $c_1, \ldots, c_r$, $d_1, \ldots, d_r$ について, $(c_1 = d_1)$,...,$(c_r = d_r)$ から $R(c_1, \ldots, c_r) \leftrightarrow R(d_1, \ldots, d_r)$ が導出できることはあきらかです. そこで, 次の集合

$$R^{\mathcal{M}} = \Big\{ \big\langle \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_r \big\rangle \in M^r \ \Big| \ \big(R(c_1, \ldots, c_r)\big) \in \Sigma \Big\}$$

によって R を解釈することにします.

言語 $\mathcal{L}$ の s 変数関数記号 $f(v_1, \ldots, v_s)$ について考えます. 任意の定数記号 $c_1, \ldots, c_s$ について, 存在文 $\exists v\big(v = f(c_1, \ldots, c_s)\big)$ は (なんの仮定も必要とせずに) 導出可能です. それゆえ立証性により定数記号 c_0 があって $\big(c_0 = f(c_1, \ldots, c_s)\big)$ が導出可能, Σ の極大性から $\big(c_0 = f(c_1, \ldots, c_s)\big) \in \Sigma$ となります. また, $(c_1 = d_1)$,...,$(c_s = d_s)$ と $\big(c_0 = f(c_1, \ldots, c_s)\big)$ と $\big(d_0 = f(d_1, \ldots, d_s)\big)$ から $c_0 = d_0$ が導出可能なので, c_0 の $\sim$-同値類は c_1,...,c_s の同値類のみによって決まることになり, ここに関数 $f^{\mathcal{M}} : M^s \to M$ が定まります. この関数によって関数記号 f を解釈することにします. とくに $s = 0$ のときには, これによって定数記号の解釈が定まります.

以上で, 定数記号の同値類の集合 M を言及の範囲として言語 $\mathcal{L}$ を解釈する構造 $\mathcal{M}$ が定まりました. この構造 $\mathcal{M}$ が文の集合 Σ のモデルとなることは, 式の構成に関する帰納法により

$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n) \ \text{ iff } \ \big(\varphi(c_1, \ldots, c_n)\big) \in \Sigma$$

となることを検証すれば確かめられます. この帰納法による検証は, たんに補題 5.14 を繰り返し適用してゆくだけで, なんの困難もありません.

ここでは φ が $\exists v\psi(v)$ である場合の扱いを述べることにします. まず $\mathcal{M} \models \exists v\psi(v, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n)$ であったならば M のある要素 $\bar{c}$ について $\mathcal{M} \models \psi(\bar{c}, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n)$ が成立します. $\bar{c}$ の代表元 ($\mathcal{L}$ の定数記号) c_0 をとると, 帰納法の仮定から $\psi(c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \Sigma$ となっています. そして $\psi(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ から $\exists v\psi(v, c_1, \ldots, c_n)$ を導出することは論理の "∃-導入" の推論規則として認められています. したがって, 補題 5.14 の (i) により, $\big(\exists v\psi(v, c_1, \ldots, c_n)\big) \in \Sigma$ となります. 逆に $\big(\exists v\psi(v, c_1, \ldots, c_n)\big) \in \Sigma$ を仮定すると, Σ の立証性, すなわち補題 5.14 の (v) により, ある定数記号 c_0 について $\psi(c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \Sigma$ となり, 帰納法の仮定により $\mathcal{M} \models \psi(\bar{c}_0, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n)$ したがって, $\mathcal{M} \models \exists v\psi(v, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n)$ となります.

このようにして, コンパクト性定理と完全性定理はほとんど同一の議論で証明できます.

参考文献

[1] A. Beller, R.B. Jensen, and P. Welch, ***Conding the Universe***, Cambridge University Press 1982.

[2] K.J. Devlin, ***Constructibility***, Springer-Verlag 1984.

[3] F.R. Drake, ***Set Theory — An Introduction to Large Cardinals***, North-Holland 1974.

[4] A. Hajnal and P. Hamburger, ***Set Theory***, Cambridge University Press 1999.

[5] T. Jech, ***Set Theory*** (3rd Edition), Springer-Verlag 2003.

[6] A. Kanamori, ***The Higher Infinite*** (2nd Edition), Springer-Verlag 2003; 第 1 版の邦訳: A. カナモリ著『巨大基数の集合論』(渕野昌訳, シュプリンガー・フェアラーク東京 1998 年)

[7] K. Kunen, ***Set Theory — An Introduction to Independence Proofs***, Elsevier 1980; 邦訳: ケネス・キューネン著『集合論: 独立性証明への案内』(藤田博司訳, 日本評論社 2008 年)

[8] R. Laver and S. Shelah, *The* $\aleph_2$*-Souslin hypothesis*, Trans. Amer. Math. Soc. **264** (1981), no. 2 pp. 411–417.

[9] D. Marker, ***Model Theory: an Introduction***, Springer Verlag 2006.

[10] M. Magidor and S. Shelah, *The tree property at successors of singular cardinals*, Arch. Math. Logic, **35** (1996) pp. 385–404.

[11] W. Mitchell, *Aronszajn trees and the independence of the transfer property*, Ann. of Math. Logic **5** (1972) pp. 21–46.

[12] E. Specker, *Sur un probléme de Sikorski*, Colloq. Math. **2** (1949), pp. 9–12.