超準解析に関する覚え書き

藤田博司

1991 年 1 月 26 日*

1　モデルの広大化と飽和モデル

標準モデルを, ここでは

$$\mathbf{S} = (U, R_1, R_2, \ldots, R_r)$$

と表記することにしよう. U の元の名前をもち, R_1, R_2,...,R_r に対応する述語記号をもつ言語 $\mathcal{L}(\mathbf{S})$ を考える. $\mathcal{L}(\mathbf{S})$ に関する構造:

$$^*\mathbf{S} = (^*U, {}^*R_1, {}^*R_2, \ldots, {}^*R_r)$$

においては, U の元の名前の解釈が写像 $^* : U \to {}^*U$ を与える. ここでは, この * が初等埋め込み (elementary embedding) になっている場合だけを考える. つまり, $\mathcal{L}(\mathbf{S})$ の任意の式 $\varphi(a_1, \ldots, a_n)$ について,

$$\mathbf{S} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \iff {}^*\mathbf{S} \models \varphi({}^*a_1, \ldots, {}^*a_n)$$

が成立している場合だけを考える. このとき, $\mathcal{L}(\mathbf{S})$ の表現力の及ぶ範囲内では $\mathbf{S}$ と $^*\mathbf{S}$ を区別できない.

写像 * は単射である. このことは初等埋め込みが等号を保つので明らかである. もしも * が全単射であれば, それは同型写像に過ぎない. これが同型でない, すなわち全射でない場合には $^*\mathbf{S}$ には標準モデルにない要素がつけ加わっている. そのようなとき, $^*\mathbf{S}$ を 超準モデル という.

例えば, 古典解析の構造

$$(\mathbb{R}, \mathbb{N}, 0, 1, \pi, e, +, -, \cdot, {}^{-1}, \sin, \cos, \log, \ldots)$$

の超準モデルを考えることは, いわゆる無限小解析を正当化するのに十分な理論的枠組みを提供する. そこでは $^*\mathbb{R}$ が $\mathbb{R}$ の真の拡大順序体となって無限大, 無限小の *-実数を含み, しかも古典解析の内部的 (internal) な記述において $^*\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ はまったく同じようにふるまう.

しかしながら, こうした超準モデルの本格的な応用には, もっと強く広大モデルまたは飽和モデルを考える必要がある.

言語 $\mathcal{L}(\mathbf{S})$ の, ただ一つの自由変数 t をもつ論理式の集合 Σ を考える. この Σ に属するすべての式 $\varphi(t)$ を $\mathbf{S}$ において同時に満たす要素 $a \in U$ が存在するならば, Σ は $\mathbf{S}$ で 共起する という. また Σ が $^*\mathbf{S}$ で共起するということも同様に定義する. 論理式の集合 Σ 自身が共起するかどうかはともかく, Σ の任意の有限部分集合が $\mathbf{S}$ で共起するときには, Σ は $\mathbf{S}$ で 有限共起する という. また Σ が $^*\mathbf{S}$ で有限共起するということも同様に定義する.

* 古いフロッピーディスクから 2008 年 12 月に復元した. そのさい, フォーマットを $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX から LaTeX 2_ε に改めたほか, 必要最小限の修正を行なった.

例をあげよう．$\mathbf{S}$ として初等整数論の構造をとる．そのとき論理式の集合

$$\Sigma = \{ \text{“}t \neq 0 \,\&\, n \text{ divides } t\text{”} \mid n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \}$$

は $\mathbf{S}$ で有限共起する．しかしながら，これらの論理式すべてを満たす t は “零でなくて，しかもすべての自然数で割り切れる整数” でなければならず，したがって Σ は $\mathbf{S}$ で共起しない．

[定義 1]　標準モデル $\mathbf{S}$ で有限共起する濃度 κ 未満の論理式の集合が，必ず ${}^*\mathbf{S}$ で共起するとき，超準モデル ${}^*\mathbf{S}$ は $\mathbf{S}$ の κ 級広大化 (κ-enlargement) であるという．また ${}^*\mathbf{S}$ が，任意の無限基数 κ について $\mathbf{S}$ の κ 級広大化になっているならば，${}^*\mathbf{S}$ は 広大モデル であるという．

[定義 2]　モデル ${}^*\mathbf{S}$ がそれ自身の κ 級広大化であるとき，${}^*\mathbf{S}$ は κ 級飽和モデル であるという．いいかえれば，${}^*\mathbf{S}$ で有限共起する κ 個未満の $\mathcal{L}({}^*\mathbf{S})$ の 1 変数論理式の任意の集合が ${}^*\mathbf{S}$ で共起するときに，${}^*\mathbf{S}$ は κ 級飽和モデルであるという．

ここで，${}^*\mathbf{S}$ が κ 級飽和モデルであれば $\kappa \leqq |{}^*U|$ であることに注意する．このことは，$\mathcal{L}({}^*\mathbf{S})$ の論理式の集合

$$\{ \text{“}t \neq a\text{”} \mid a \in {}^*U \}$$

が ${}^*\mathbf{S}$ で有限共起するが共起しないことからわかる．したがってとくに，濃度の制限のない飽和モデルは存在しない．以下では，ω_1 級飽和モデルのことを可算飽和モデルということにする．次の定理が超準解析の基礎となるものである．証明は [斎藤] 他に見られる．

[定理 1]　任意の無限基数 κ ならびに任意の構造 $\mathbf{S}$ について，$\mathbf{S}$ の κ 級広大化であるような κ 級飽和モデル ${}^*\mathbf{S}$ が少なくとも一つは存在する．

この定理の主張は体の代数閉包の存在や，位相空間のコンパクト化可能性等に相当すると考えられる．実際超冪による広大モデルの構成法は完全正則空間の Stone-Čech コンパクト化と密接に関連している．以下では超準解析の手法を用いて関数解析 (の初歩的な一部分) を展開するので，標準モデルとしては任意の次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$，自然数の全体 $\mathbb{N}$，各種の初等関数 sin, cos, log, exp 等のほかに，ルベーグ測度や 代表的な関数空間である $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ といったものも含めておかなくてはならない．そこでそのような十分大きいモデルとして次のようなものを考える．

集合 U が Zermelo 集合 であるとは，それが次の条件 (1)–(4) を満たすことであると定義する．

(1) U は推移的である．つまり $x \in U$ ならば $x \subset U$ である．
(2) 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$，実数直線 $\mathbb{R}$ は U に属する．
(3) a が U に属するならば合併 $\bigcup a$ および 冪集合 $\mathrm{P}(a)$ は U に属する．
(4) a と b が U に属するならば，対 $\{a, b\}$, (a, b), および直積集合 $a \times b$ は U に属する．

以下われわれの標準モデル $\mathbf{S} = (U, R_1, R_2, \ldots, R_r)$ においては U は Zermelo 集合であるものとし，R_1 は通常の要素所属関係 $\in$ であるものとする．この $\mathbf{S}$ は通常の解析学を展開する土台としてとりあえずは十分な大きさを持っている．我々はこの $\mathbf{S}$ とその広大化である可算飽和モデル ${}^*\mathbf{S}$ の関係を調べ，それを $\mathbf{S}$ での関数解析の理論を展開することに応用する．

解析学へのこのようなアプローチはこんにち 超準解析 と呼ばれており，ライプニッツの無限小解析を数理論理学とモデル理論の手法によりそのまま明確化，正当化した A. Robinson の業績に端を発する．ここで我々が展開する議論はしたがって，超準関数解析入門とでもいうようなものである．

2 超準自然数, 内集合と外集合

この節では超準解析で用いられる基本概念を例示するために, *-実数の全体 $^*\mathbb{R}$ および *-自然数の全体 $^*\mathbb{N}$ について述べる. いま $\mathbf{S} = (U, R_1, R_2, \ldots, R_r)$ を前節に述べた標準モデルだとする. つまり U は Zermelo 集合で, R_1 は普通の要素所属関係 $\in$ を U に制限したものだとする. また $^*\mathbf{S}$ は $\mathbf{S}$ の広大化でありかつ可算飽和モデルになっているものだとする. 以下に $^*\mathbb{R}$, $^*\mathbb{C}$ といった記号がでてくれば, それはこの固定された $^*\mathbf{S}$ の要素を考えているものと決めておく.

[**定義 3**] 超準モデルの世界 $^*U$ の要素で, ある $x \in U$ に対応する $^*x$ になっているものを標準的 (standard) な要素あるいは 標準元 という. 標準的でない $^*U$ の要素を超準的 (nonstandard) な要素あるいは 超準元 という.

これは一般的な注意であるが, 厳密にいって例えば $^*\mathbb{R}$ は *-実数全体の *-集合であって, これをそのまま *-実数全体の集合といってしまうことには多少問題がある. しかしながら超準モデルでの要素所属関係を正確に $^*\!\in$ と書くことは表記をいたずらに繁雑にするだけであるし, 標準元に関する限り $^*\!\in$ と $\in$ を区別する必要はないわけだから, 特に混乱を避けるために必要な場合を除いて, われわれはそのような区別を行なわず単に $\in$ を用いる. その他の関係記号や演算記号についても同様である.

標準元の要素は標準的とは限らない. もっとはっきりいって A を U に属する無限集合とすれば, 広大化の定義に戻って考えればわかるように $^*A$ は必ず超準元を含む. したがって普通の集合である A を $^*A$ と同一視することはできない. 例えば $^*\mathbb{N}$ とか $^*\mathbb{R}$ は $\mathbb{N}$ とか $\mathbb{R}$ とははっきりと別のものである. しかしながらわれわれは個々の自然数および実数のように $\mathbf{S}$ でも集合でなく基本的な要素 (atom あるいは urelement) であると考えられるものについてはこの同一視を行なって, $^*x$ の代わりに単に x と表示する. 以上の規約のもとで $\mathbb{N} \subset {}^*\mathbb{N}$, $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$ と考えることができる.

[**命題 2.1**] *-実数の全体 $^*\mathbb{R}$ は通常の演算の*-解釈のもとで順序体をなす.

[**証明**] 順序体は 1 階述語論理での有限個の公理により特徴づけられるので, * が初等埋め込みであることからすぐに従う. □

[**命題 2.2**] 無限大の *-実数が存在する. また正で無限小の*-実数が存在する.

ここで *-実数が無限大だというのは, それがいかなる標準的な実数よりも真に大きいということである. また正の *-実数が無限小であるとは, それがいかなる標準的な正の実数よりも真に小さいということである. この命題の証明は次のようにすればよい. 標準自然数 n について, $\mathcal{L}(\mathbf{S})$ の 1 変数論理式

$$\text{“}t \in \mathbb{R} \,\&\, n < t\text{”}$$

を考えると, その全体は可算であり $\mathbf{S}$ で有限共起する. したがってこれらの論理式は $^*\mathbf{S}$ で共起するが, そのことを証拠立てる $^*U$ の要素は無限大の *-実数にほかならない. またその逆数は正の無限小 *-実数である. □

次に *-自然数が $^*\mathbb{R}$ の中にどのように入っているかを見よう.

[**命題 2.3**] 有限な *-自然数は標準的である.

[**証明**] 有限な *-自然数 $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ はある標準的な自然数 $n \in \mathbb{N}$ よりは小さい. $\mathcal{L}(\mathbf{S})$ の論理式

$$\text{“}(\forall x \in \mathbb{N})\,[\, x < n \implies (x = 0 \vee x = 1 \vee \cdots \vee x = (n-1))\,]\text{”}$$

を考えると, これは $\mathbf{S}$ で正しいので ${}^*\mathbf{S}$ で正しい. したがって

$$\text{“}(\forall x \in {}^*\mathbb{N})\,[\,x < {}^*n \implies (x = {}^*0 \vee x = {}^*1 \vee \cdots \vee x = {}^*(n-1))\,]\text{”}$$

とくに “$\nu = {}^*0 \vee \nu = {}^*1 \vee \cdots \vee \nu = {}^*(n-1)$” が成立するから ν は標準的である. □

第 1 節において, $\mathbf{S}$ で有限共起するが共起しない論理式の集合の例として “t は正の整数 n で割り切れる” という形の式全体の集合 Σ をあげた. $\mathbf{S}$ の広大化 ${}^*\mathbf{S}$ においては, この Σ は共起するので, すべての正の整数で割り切れるような *-自然数が存在する. 具体的には, ν を無限大 *-自然数として $\nu!$ を考えればよい.

[命題 2.4] 最小の無限大 *-自然数は存在しない.

[証明] 0 と異なる自然数は自然数プラス 1 である. この事実を ${}^*\mathbf{S}$ で解釈すると, 0 と異なる *-自然数は *-自然数プラス 1 である. したがって任意の無限大*-自然数 ν について $\nu - 1$ も *-自然数であるが, これが有限なら命題 2.3 によって標準的, したがって ν も標準的となって不合理である. ゆえに $\nu - 1$ もまた無限大 *-自然数である. したがって ν の下には無限個の無限大 *-自然数

$$\nu > \nu - 1 > \nu - 2 > \cdots > \nu - n > \cdots$$

が存在することになる. □

それゆえ ${}^*\mathbb{N}$ は数学的帰納法の公理を満たさない. とくに $\mathbb{N} \subset {}^*\mathbb{N}$ が反例となる. しかしながら

$$\mathbf{S} \models (\forall X \subset \mathbb{N})\,[\,0 \in X \,\&\, (\forall x \in X)[\,x+1 \in X\,] \implies X = \mathbb{N}\,] \tag{2.1}$$

であるから

$${}^*\mathbf{S} \models (\forall X \subset {}^*\mathbb{N})\,[\,0 \in X \,\&\, (\forall x \in X)[\,x+1 \in X\,] \implies X = {}^*\mathbb{N}\,] \tag{2.2}$$

のはずである. これはどういうことかというと, ($2\dot{2}$) 式は ${}^*\mathbb{N}$ の部分集合のうちで ${}^*\mathbf{S}$ の ‘中にある’ ものについてだけは数学的帰納法の原理が成立することを主張しているわけである. 実は $\mathbb{N}$ は ${}^*\mathbf{S}$ の中にないのである. このことをはっきりさせるために内集合と外集合の区別をする.

[定義 4] A を通常の集合つまり $\mathbf{S}$ の集合とし, X を ${}^*A$ の部分集合, つまり ${}^*A$ の *-元の集合だとする. もしもある*-集合 $Y \in {}^*U$ があって

$$X = \{\, y \in {}^*U \mid x^* \in {}^*A \,\&\, x^* \in Y \,\}$$

となっているならば, X は内的 (internal) な集合, または <u>内集合</u> であるという. 内的でない集合は外的 (external) な集合, または <u>外集合</u> であるという.

粗くいえば, <u>内集合とは *-集合のことである.</u> *-自然数全体の集合 ${}^*\mathbb{N}$ は内集合に関する数学的帰納法の公理を満たし, ${}^*\mathbb{N}$ の空でない内的部分集合は最小限をもつ. とくに $\mathbb{N}$ は外集合である. もっと一般に通常の無限集合 A は写像 * によって, ${}^*A$ の部分集合として埋め込まれていると考えられるが, その意味では A は外集合である. きちんと書けば

[命題 2.5] A は通常の集合で, 無限集合であるものとする. ${}^*A$ の標準元全体の集合を X とかく:

$$X = \{\, {}^*a \mid a \in A \,\}.$$

このとき, X は外的な集合である.

[証明] A は無限集合なので, 単射

$$F : \mathbb{N} \rightarrowtail A$$

が存在して

$$^*F : {}^*\mathbb{N} \rightarrowtail {}^*A$$

を引き起こす. *-自然数 $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ について,

$$^*F(\nu) = {}^*a \qquad (a \in A)$$

と標準元に写れば, $^*a \in \mathrm{image}(^*F)$ が $^*\mathbf{S}$ で正しく, したがって

$$a \in \mathrm{image}(F)$$

が正しい. ゆえにある $n \in \mathbb{N}$ で $F(n) = a$ となり

$$^*F(\nu) = {}^*a = {}^*F(n)$$

となる. $^*F$ は単射なので $\nu = n$. よって ν は標準的である. 逆に $n \in \mathbb{N}$ が標準的な自然数なら $^*F(n)$ はもちろん標準的である. このことから,

$$\mathbb{N} = \{\, \nu \in {}^*\mathbb{N} \mid {}^*F(\nu) \in X \,\}$$

となるので, X が内集合なら $\mathbb{N}$ も内集合となって矛盾する. □

[系] $^*\mathbb{R}$ の部分集合と見て, $\mathbb{R}$ は外集合である.

3 無限小解析

ライプニッツ流に無限小を導入して, 古典解析の諸概念を超準的に特徴付けることができる. ここではそれを二, 三の例によって示すが, われわれの目的は古典解析の叙述などではないから本格的にはやらない. 次の定義はすでに第 2 節で非公式に述べたものである.

[定義 5] *-実数 $\xi \in {}^*\mathbb{R}$ はその絶対値 $|\xi|$ が任意の標準的正実数より小さいときに 無限小 であるという. また $|\xi|$ が任意の標準的実数より大きいとき, ξ は 無限大 であるという.

明らかに, 無限小の標準的実数は 0 だけである. 無限小, あるいは無限大という概念は外的である. なぜなら, これらの一方が内的ならば他方も内的, したがって有限性の概念も内的となって, 有限自然数の全体 $\mathbb{N}$ が内集合になってしまって不合理である. われわれは, 内的には $\mathbf{S}$ とそっくりな $^*\mathbf{S}$ を外から眺めて議論しているわけである.

[定義 6] 二つの *-実数 ξ, η の差が無限小であるとき, ξ と η は 限りなく近い という. このとき $\xi \approx \eta$ と表記する.

関係 $\approx$ は $^*\mathbb{R}$ 上の外的な同値関係である.

[命題 3.1] 任意の有限 *-実数 ξ に対して, 標準的実数 $a \in \mathbb{R}$ で $\xi \approx a$ を満たすものがただ一つ存在する.

[証明] a として ξ より小さい標準的実数すべての集合の通常の意味での上限をとる. $a \geqq \xi$ の場合を考える. もしも $a - \xi$ が無限小でなければ, ある標準的正実数 r について $0 < r < a - \xi$ となるが, このとき $a - r$ は標準的実数で

$$a > a - r > a - (a - \xi) = \xi$$

となる．これは ξ より小さい実数の上限, という a の最初の定義に反する．したがって $a-\xi$ は無限小である．$a \leqq \xi$ の場合も同様である．ゆえに $\xi \approx a$ である．一意性は明らかであろう．$\square$

このことにより, 有限の *-実数が "実数 + 無限小" という形に一意的に分解できることがわかった．標準的実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して, a に限りなく近い *-実数の全体の (外的) 集合を a の モナド といい, $\mathrm{mon}(a)$ と書く．

$$\mathrm{mon}(a) = \{\, \xi \in {}^*\mathbb{R} \mid \xi \approx a \,\}.$$

また, 有限の *-実数 $\xi \in {}^*\mathbb{R}$ について, ξ に限りなく近い一意的な実数を ξ の 標準部分 と呼び, ${}^\circ\xi$ と書く．無限大の *-実数は標準部分を持たないものと解する．有限 *-実数 ξ, η について, 明らかに

$$\xi \approx \eta \iff {}^\circ\xi = {}^\circ\eta$$

である．

実は無限大の *-実数の標準部分を $\pm\infty$ と定義することもできるし, それはそれでいいこともある．必要な場合にはそのようにする．このことに関連して次節でのコンパクト空間の超準的特徴付けの議論を参照されよ．次の命題の意味するところは無限小という言葉の意味からして当然のことであろう．

[命題 3.2] (1) 任意の無限小 *-実数 ϵ および 任意の有限 *-実数 ξ について, $\epsilon\xi$ はまた無限小である．

(2) 任意の, 零でない無限小 *-実数 ϵ について, $1/\epsilon$ は無限大である．

(3) 任意の無限大 *-実数 M について, $1/M$ は無限小である．

[系] ${}^*\mathbb{R}$ はアルキメデス的でない．

また, 有理数の全体 $\mathbb{Q}$ が $\mathbb{R}$ のなかで稠密であるから, ${}^*\mathbb{Q}$ は ${}^*\mathbb{R}$ の中で稠密であり, 二つの *-実数の間には必ず *-有理数がある．とくに, いかなる標準的実数 $a \in \mathbb{R}$ についても, それに限りなく近い *-有理数が存在して, $\mathrm{mon}(a) \cap {}^*\mathbb{Q} \neq \emptyset$ となる．これは *-実数を *-無限小数に展開してそれを *-有限小数に丸めるという感じのことに相当する．

[定理 2 (数列の収束の超準的表現)] (1) 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ がコーシー列であるための必要十分条件は, 任意の無限大 *-自然数 μ, ν について ${}^*a_\mu \approx {}^*a_\nu$ となることである．

(2) 数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ が数 a に収束するための必要十分条件は任意の無限大 *-自然数 ν について ${}^*a_\nu \approx a$ となることである．

[証明] (1) 必要性: $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ がコーシー列であるとは, 任意の正の実数 r についてある自然数 N があって

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})[\, m, n \geqq N \implies |a_m - a_n| < r \,]$$

が成立する．ということである．この式を * で ${}^*\mathbf{S}$ に移行すれば

$$(\forall m, n \in {}^*\mathbb{N})[\, m, n \geqq N \implies |{}^*a_m - {}^*a_n| < r \,]$$

ということになる．μ と ν が無限大であればもちろん $\mu, \nu \geqq N$ であるから

$$|{}^*a_\mu - {}^*a_\nu| < r$$

が成立する．この r は任意の標準実数だったので $|{}^*a_\mu - {}^*a_\nu|$ は無限小である．

十分性: 正の標準実数 r が与えられたとする．無限大 *-自然数 λ をとると, λ より大きい *-自然数は無限大だから, 仮定より

$$\mu, \nu \geqq \lambda \implies {}^*a_\mu \approx {}^*a_\nu$$

したがって $|{}^*a_\mu - {}^*a_\nu| < r$ である．そこで

$$(\exists N \in {}^*\mathbb{N})(\forall m, n \in {}^*\mathbb{N})[\, m, n \geqq N \implies |{}^*a_m - {}^*a_n| < r\,]$$

が ${}^*\mathbf{S}$ で成立しており, * によって $\mathbf{S}$ に引き戻すことにより

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})[\, m, n \geqq N \implies |a_m - a_n| < r\,]$$

であることがわかる．r は任意だったから, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ はコーシー列である．

(2) の証明も同様である．□

[系] 収束する数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ について

$$\lim_{n\to\infty} a_n = {}^\circ({}^*a_\nu).$$

ただし ν は任意の無限大 *-自然数だとする．

次の命題はあとで数列空間 (ℓ^p) に関する議論を行なうときに利用される．

[命題 3.3] 正項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ について次のことは同値である．

(a) $\sum a_n < +\infty$, つまりこの級数は収束する．
(b) 任意の 無限大 *-自然数 ν について *-部分和 $\sum_{n=0}^{\nu} {}^*a_n$ は有限である．
(c) ある 無限大 *-自然数 ν について *-部分和 $\sum_{n=0}^{\nu} {}^*a_n$ は有限である．

[証明] 定理 2 から明らかに (a) $\implies$ (b) $\implies$ (c) である．また (c) が成り立てばある標準実数 M があって $\sum_{n=0}^{\nu} {}^*a_n \leqq M$, したがって任意の標準自然数 m について

$$\sum_{n=0}^{m} a_n \leqq \sum_{n=0}^{\nu} {}^*a_n \leqq M$$

である．したがって $\sum a_n < +\infty$ である．□

一般の級数についてはこう単純ではないことにも注意しておこう．最後の例として関数の連続性を無限小解析の言葉で特徴付けられることを示す．より一般に, 微分可能性や一様連続性を超準的に特徴付けることも容易にできる．くわしくは [斎藤] あるいは [Keisler] を見られよ．

[定理 3 (関数の連続性の超準的表現)] I は区間または $\mathbb{R}$ 全体だとする．関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が $a \in I$ において連続であるための必要十分条件は, 任意の*-実数 $\xi \in {}^*I$ について

$$\xi \approx a \implies {}^*f(\xi) \approx f(a)$$

となること, いいかえれば

$${}^*f[\mathrm{mon}(a) \cap {}^*I] \subset \mathrm{mon}(f(a))$$

となることである．

[証明] 必要性: f が a で連続であるとは, 任意の正実数 r について, ある正実数 s をとって

$$(\forall x \in I)[\, |x - a| < s \implies |f(x) - f(a)| < r\,]$$

を成立するようにできるということである．同じ状況のもとで

$$(\forall x \in {}^*I)[\, |x - a| < s \implies |{}^*f(x) - f(a)| < r\,]$$

である．ここで $\xi \approx a$ ならもちろん $|\xi - a| < s$ だから $|{}^*f(\xi) - f(a)| < r$ となり, r は任意であったから ${}^*f(\xi) \approx f(a)$ である．

十分性: 正の実数 r が与えられたときに, 正の無限小 *-実数 δ を考えると, $|\xi - a| < \delta$ ならば $\xi \approx a$ である．このとき仮定より ${}^*f(\xi) \approx a$ であり, 当然 $|{}^*f(\xi) - f(a)| < r$ である．そこで

$$(\exists\delta > 0)(\forall\xi \in {}^*I)[\,|\xi - a| < \delta \implies |{}^*f(\xi) - f(a)| < r\,]$$

は ${}^*\mathbf{S}$ で正しい．ゆえに

$$(\exists s > 0)(\forall x \in I)[\,|x - a| < s \implies |f(x) - f(a)| < r\,]$$

が正しい．r は任意であったから f は a において連続である．□

4 位相空間の超準的特徴付け

第 3 節の無限小解析で導入された概念を一般の位相空間に拡張することを試みる．その途中でコンパクト位相空間に関するチコノフの定理の超準的証明が提示される．この定理の通常の証明はフィルターの収束に関する議論を用いていたりしてかなり複雑であるが, われわれの枠組みにはフィルターに相当するものとして超準元なるものがあらかじめ組み込まれているので, 少なくとも見かけ上は直積位相の定義以上のものを必要としない．これは超準解析のパワーを示す好例といえる．

標準モデル内の位相空間 $(X, \mathcal{T})$ を考える．ここで $\mathcal{T}$ は開集合系をあらわす．関数空間等も考慮したいので一般には X の元を $\mathbf{S}$ の基本要素つまりアトムと見なすことができないが, X の位相空間としての性質だけが問題で, 各要素の正体にまで立ち入ることがないような議論においては．${}^*X$ の標準元 ${}^*x$ を通常の元 x と同一視してもよい．そこで以下では * の省略が可能で, しかも省略しても混乱の起こる心配のない場合にはある程度好き勝手に * の省略を行なう．

[命題 4.1] 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ の任意の点 $p \in X$ に対して, *-開集合 $\alpha \in {}^*\mathcal{T}$ で,

$$p \in \alpha \subset \bigcap\{\,{}^*G \mid G \in \mathcal{T} \,\&\, p \in G\,\}$$

を満たすものが存在する．

[証明] 言語 $\mathcal{L}(\mathbf{S})$ の論理式の, 次の集合 Σ を考えよう．

$$\Sigma = \{\,``p \in t \subset G \,\&\, t \in \mathcal{T}" \mid p \in G \in \mathcal{T}\,\}\,.$$

この Σ に属する各論理式は, t が G より小さな p の近傍である, という主張であるから, 近傍系の基本的な性質から, Σ は $\mathbf{S}$ で有限共起する．したがって ${}^*\mathbf{S}$ では Σ は共起する．α としては Σ が ${}^*\mathbf{S}$ で共起することを証拠立てる *-要素をとればよい．□

このような α は p の 無限小近傍 と呼ばれる．

[定義 7] (1) 標準点 ${}^*p$ の標準的開近傍全部の共通部分を X における ${}^*p$ の モナド といい $m_X({}^*p)$ と書く．

$$m_X({}^*p) = \bigcap\{\,{}^*G \mid p \in G \in \mathcal{T}\,\}$$

単にこの位相のモナドというときには, 演算子 m_X をさすこととする．添字 $_X$ は明らかならば省略することがある．

(2) *-点 q が, ある点 p のモナドに属するとき, q は 近標準点 と呼ばれる. またそのようなとき q は p に 限りなく近い という.

命題 4.1 より, 標準点のモナドはその点の無限小近傍を含む. 次の命題は定理 3 の一般化である.

[命題 4.2] 二つの位相空間 $(X,\mathcal{T})$, $(Y,\mathcal{U})$ について, 写像 $f : X \to Y$ が連続であるためには, 各点 p で

$$^*f[m_X(^*p)] \subset m_Y(^*(f(p)))$$

となることが必要十分である.

[証明] 必要性: f が連続なら $f(p)$ の近傍 G に対して逆像 $f^{-1}[G]$ が p の近傍となる. このとき $m_X(p) \subset {}^*(f^{-1}[G])$, したがって $^*f[m_X(p)] \subset {}^*G$ となる. G は $f(p)$ の任意の近傍であったから. $^*f[m_X(p)] \subset m_Y(^*(f(p))$ となる.

十分性: G を $f(p)$ の任意の近傍とすれば. $^*G$ は $^*(f(p))$ のモナドを含む. 仮定より後者はさらに $^*f[m_X(^*p)]$ を含むが, 命題 4.1 より $m_X(^*p)$ に含まれるような, $^*p$ の *-近傍 α がある. したがって $(^*f)^{-1}[^*G]$ は $^*p$ のある *-近傍を含む. この事実を * により標準モデルに引き戻せば, $f^{-1}[G]$ が p のある近傍を含むことがわかる. G は任意だったから f は p において連続である. □

次の命題 4.3 の証明もほぼ同様で, 簡単であるから省略する.

[命題 4.3] 位相空間 $(X,\mathcal{T})$ において,

(1) 集合 A が開集合であるためには, $^*A$ がそのすべての標準点のモナドを含むことが必要十分である.

(2) 集合 A が閉集合であるためには, モナドが $^*A$ と交わるような任意の標準点を A があらかじめ含んでいることが必要十分である.

次の命題は重要であり, 実際後でちょくちょく利用される.

[命題 4.4] 位相空間 $(X,\mathcal{T})$ がコンパクトであるためには, $^*X$ の任意の点が近標準点であることが必要十分である.

[証明] 必要性: $^*X$ の, 近標準点でない *-点 q が存在したとする. いかなる標準点 $p \in X$ についても, $q \notin m_X(p)$ であるから, p の標準近傍 N_p で

$$p \in N_p \in \mathcal{T} \,\&\, q \notin {}^*N_p$$

となるものが存在する. $\{N_p \mid p \in X\}$ は X の開被覆をなすから, 有限個の点 $p_1, \ldots, p_n$ をうまくとって

$$X = N_{p_1} \cup \cdots \cup N_{p_n}$$

とできる. このとき

$$q \in {}^*X = {}^*N_{p_1} \cup \cdots \cup {}^*N_{p_n}$$

となって A_p のとり方に矛盾する.

十分性: 有限交叉性を有する閉集合の族 $\{ F_i \mid i \in I \}$ を考えると, 言語 $\mathcal{L}(^*S)$ の 1 変数論理式 "$t \in F_i$" の全体は $\mathbf{S}$ で有限共起する. したがってそれは $^*\mathbf{S}$ で共起する. いいかえれば,

$$\bigcap_{i \in I} {}^*F_i \neq \emptyset$$

が成立する．そこですべての ${}^*F_i$ の共通元 q をとると, 仮定よりそれは近標準点であり, ある標準点 $p \in X$ のモナドに属する．したがって, 任意の $i \in I$ について $m_X(p) \cap {}^*F_i \neq \emptyset$ であるが, F_i が閉集合であることからこのとき $p \in F_i$ である．ゆえに

$$p \in \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$$

となる．これで X がコンパクトであることが証明された．□

[定理 4 (チコノフの定理)] コンパクト位相空間の添字付きの族 $\langle X(i) \mid i \in I \rangle$ の直積空間を Y とする:

$$Y = \prod_{i \in I} X(i)$$

このとき Y もまたコンパクト空間である．

[証明] 任意の $q \in {}^*Y$ が近標準点であることを証明すればよい．標準的な添字 $i \in I$ については, $q(i)$ は ${}^*X(i)$ の近標準点である．したがって標準的な $p(i) \in X(i)$ をとって $q(i) \in m_{X(i)}(p(i))$ となるようにできる．これにより $p \in \prod_{i \in I} X(i)$ $(= Y)$ が定まる．この p について $q \in m_Y({}^*p)$ であることをいう (ここで, Y の元 p は I 上の関数として登場してきているので, もはや p と ${}^*p$ を同一視するわけにはいかない)．さて p の標準近傍 G を任意にとると, 直積位相の定義から有限個の添字 $i_1,\ldots,i_n$ と $p(i_1),\ldots,p(i_n)$ の開近傍 $G_1,\ldots,G_n$ をうまくとって,

$$p \in \{\, y \in Y \mid y(i_1) \in G_1 \,\&\, \cdots \,\&\, y(i_n) \in G_n \,\} \subset G$$

となるようにできる．ここで $p(i)$ に対する仮定より

$$q(i_1) \in {}^*G_1 \,\&\, \cdots \,\&\, q(i_n) \in {}^*G_n$$

であるから $q \in {}^*G$ である．G は p の任意の近傍であったから $q \in m_Y({}^*p)$ であって, q が近標準的であることがわかる．□

チコノフの定理の証明がこのように少なくとも見かけ上は初等的になった理由は, 空間上のフィルターに関する議論を広大モデルの超準元に関する議論に置き換えたことである．その対応関係をきちんと記せば, 次のようである．

[命題 4.5 (*-点と極大フィルターの同等性)] X は通常の無限集合だとする．(1) ${}^*X$ の任意の *-元 ξ に対して

$$\mathcal{F}_\xi = \{ A \subset X \mid \xi \in {}^*A \}$$

と定義すれば, この $\mathcal{F}_\xi$ は X 上の極大フィルターである．

(2) X 上任意の極大フィルター $\mathcal{F}$ に対して, $\mathcal{F}_\xi = \mathcal{F}$ を満たすような *-元 $\xi \in {}^*X$ が少なくとも一つは存在する．

(3) X が位相空間である場合, 極大フィルター $\mathcal{F}$ が点 p に収束することと, (2) にいう ξ が ${}^*p$ のモナドに属する近標準点であることは同値である．

[証明] (1) は単に極大フィルターの定義に戻って確かめるだけなので問題ない．

(2):極大フィルターが有限交叉性を持ち, したがって広大モデル ${}^*\mathbf{S}$ で共通元を有することに注意して

$$\xi \in \bigcap \{\, {}^*A \mid A \in \mathcal{F} \,\}$$

ととると $\mathcal{F}_\xi$ は $\mathcal{F}$ を拡張するフィルターである．$\mathcal{F}$ は極大フィルターなので $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\xi$ となる．

(3):極大フィルター $\mathcal{F}$ が p に収束するのは p のすべての近傍が $\mathcal{F}$ に入ることと同等である．そこで $\mathcal{F}_\xi$ が p に収束することと, ${}^*p$ の任意の標準 *-近傍が ξ を含むこと, つまり ξ が ${}^*p$ のモナドに入ることは同等である．$\square$

命題 4.5 にいう, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\xi$ の解 ξ は一般に一意的に定まらない．例えば, $\mathbb{N}$ 上の極大フィルターはちょうど $2^{\aleph_0}$ 個あるので, $2^{\aleph_0}$ 個より多くの *-自然数を含むような広大モデルでは $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\xi$ となるような *-自然数 ξ は一般にたくさんある．

次のことに注意すれば, チコノフの定理の証明はもっと簡潔にできる．

[**命題 4.6 (誘導弱位相の超準的特徴付け)**] 位相空間の添え字付けされた族 $\langle (X(i), \mathcal{T}^i) \mid i \in I \rangle$ と, 共通の定義域 Y から各 $X(i)$ への写像の族 $\langle \varphi_i : Y \to X(i) \mid i \in I \rangle$ を考える．Y にこれらの写像をすべて連続にする最弱の位相 $\mathcal{U}$ を入れる．このとき, 任意の $y \in Y$ について

$$\begin{aligned} m_Y(y) &= \bigcap_{i \in I} {}^*\varphi^{-1}[m_i(\varphi_i(y))] \\ &= \{\, \xi \in {}^*Y \mid (\forall i \in I)[\,{}^*\varphi_i(\xi) \in m_i(\varphi_i(y))] \,\} \end{aligned}$$

が成立する．ここで m_Y, m_i はそれぞれ $(Y, \mathcal{U})$, $(X(i), \mathcal{T}^i)$ のモナドを表わすものとする．つまり誘導される弱位相のモナドは, 各写像のモナドの逆像全体の共通部分である．

この命題の証明は簡単である．誘導位相のモナドが標準の添え字 $i \in I$ に対する ${}^*X(i)$ だけで特徴付けられていることに注意すべきである．直積位相は自然な射影全体の族からこの形での誘導位相として得られるから, そのモナドは標準的な添え字の各成分のモナドの直積を延長したものになっている．

第 3 節で, 二つの *-実数のあいだには限りなく近いことを表わす同値関係 $\approx$ が定義されていた．これに対して, この節では 2 点間の “限りなく近い” という関係は一方が標準点である場合にのみ有効であるものとされている．この違いは一般の位相空間が一様構造を有しないことに関係している．距離空間, あるいは一般に完全正則空間には位相を与えるような一様構造が存在するので, 関係 $\approx$ を導入することができる．大雑把にいって位相構造はモナドによって, また一様構造は関係 $\approx$ によって特徴付けられる．以下このことを調べることにする．まずはモナドによる位相の導入に関する一般論からはじめよう．

ハードとローブの本 [**Hurd-Loeb**] に従って, 擬モナド (pseudomonad) というものを定義する．それに続く k-近傍だの k-位相だのは藤田が勝手に作った用語である．

[**定義 8**] 無限集合 X の各要素 x に ${}^*X$ の部分集合 $k(x)$ を対応させる写像 k が, “すべての x について $x \in k(x)$” という条件を満たしているならば, この k のことを X 上の 擬モナド と呼ぶ．

明らかに, 位相空間のモナドは擬モナドになっている．これに対して擬モナドは必ずしも位相のモナドになっているわけではないが, 次のようにして擬モナドの導入する位相を考えることはできる．

[**定義 9**] 集合 X 上の擬モナド k が与えられたとせよ．点 $x \in X$ の k-近傍 とは, $k(x) \subset {}^*A$ を満たす任意の集合 $A \subset X$ のことだとする．各点の k-近傍によって一意的に定まる X 上の位相を k-位相 と呼ぶ．

以下では, k-位相のモナドを $\bar{k}$ と表わすことにする．つまり, 各 $x \in X$ について

$$\bar{k}(x) = \bigcap \{\, {}^*A \mid A \subset X \,\&\, k(x) \subset {}^*A \,\}$$

と定める. 容易にわかるように, 各点 $x \in X$ において $k(x) \subset \bar{k}(x)$ が成り立つ. この $\bar{k}$ も一つの擬モナドだから, $\bar{k}$-位相というものを考えることができるが, 命題 4.3 からわかるとおりそれは k-位相と一致する. したがって,

[**命題 4.7**] (1) 擬モナド k が位相のモナドであるためには, $k = \bar{k}$ であることが必要十分である.

(2) 任意の擬モナド k について $\bar{k} = \bar{\bar{k}}$ が成り立つ.

(3) 二つの擬モナド k, ℓ が各点 $x \in X$ で

$$k(x) \subset \ell(x) \subset \bar{k}(x)$$

を満たせば, k-位相と ℓ-位相は一致する.

[**定義 10**] 擬モナド k が $\bar{k} = k$ を満たすときには, これを <u>モナド</u> という.

命題 4.7 により X 上のモナドということと, X 上のある位相のモナドというのは同じことである. 次に擬モナドの例を挙げよう.

正の無限小 *-実数 ϵ を一つ固定して, 実数 $x \in \mathbb{R}$ について

$$\begin{aligned} k(x) &=]x - \epsilon, x + \epsilon[\\ &= \{\, \xi \in {}^*\mathbb{R} \mid |\xi - x| < \epsilon \,\} \end{aligned}$$

と定めれば, k は $\mathbb{R}$ 上の擬モナドであって k-位相は通常の位相である. また,

$$\begin{aligned} k(x) &= [x, x + \epsilon[\\ &= \{\, \xi \in {}^*\mathbb{R} \mid x \leqq \xi < x + \epsilon \,\} \end{aligned}$$

と定めれば, k-位相は半開区間位相, いわゆる Sorgenfrey 直線の位相となる. いずれの場合にも, $k \neq \bar{k}$ であって k はモナドではない. 半開区間位相に対応するモナド $\bar{k}$ は

$$\bar{k}(x) = \{\, x + \xi \mid \xi \approx 0 \,\&\, \xi \geqq 0 \,\}$$

である (以上の例は [**Hurd-Loeb**] にあったもの).

一般の集合 (内的でも外的でもよい) $E \subset {}^*X$ に対して,

$$\tilde{k}(E) = \bigcap \{\, {}^*G \mid G \subset X \text{ は } k\text{-開集合} \,\&\, E \subset {}^*G \,\}$$

と定義する. 明らかに $x \in X$ ならば $\tilde{k}(x) = \bar{k}(x)$ である.

[**命題 4.8**] 標準集合 $A \subset X$ については

$$\tilde{k}({}^*A) = \bigcup \{\, \tilde{k}(\xi) \mid \xi \in {}^*A \,\}$$

となる.

[**証明**] 右辺を α とおく. $\xi \in {}^*A$ ならば, 明らかに $\tilde{k}(\xi) \subset \tilde{k}({}^*A)$ であるから, $\alpha \subset \tilde{k}({}^*A)$ であることはすぐわかる. 反対方向の包含関係を示すために, 何か $\eta \in \tilde{k}({}^*A) - \alpha$ が存在するものと仮定しよう. α の作り方から, すべての $\xi \in {}^*A$ について $\eta \in \tilde{k}({}^*A) - \tilde{k}(\xi)$ である. そこで k-開集合 U_ξ を

$$\xi \in {}^*U_\xi \,\&\, \eta \notin {}^*U_\xi$$

となるようにとれる．これらの ${}^*U_\xi$ 全部で ${}^*A$ を覆えるから,

$$\bigcap\{\,{}^*A-{}^*U_\xi\mid\xi\in{}^*A\,\}=\emptyset$$

である．したがって (超準モデルの広大性から) $A-U_\xi$ の全体は有限交叉性を持たないことになる．これは有限個の $\xi_1,\ldots,\xi_n$ をうまくとって

$$A\subset U_{\xi_1}\cup\cdots\cup U_{\xi_n}$$

とできることを意味する．この右辺は k-開集合であって, U_ξ のとり方から

$$\begin{aligned}\eta\notin&{}^*U_{\xi_1}\cup\cdots\cup{}^*U_{\xi_n}\\ =&{}^*(U_{\xi_1}\cup\cdots\cup U_{\xi_n})\end{aligned}$$

となる．ゆえに $\eta\notin\tilde{k}({}^*A)$ となって矛盾が生じる．これで $\tilde{k}({}^*A)\subset\alpha$ も証明された． □

[系] 集合 $A\subset X$ が k-開集合になるということは, 次の (1)–(3) のどれとも同値である．

(1) $\tilde{k}({}^*A)={}^*A$;
(2) $\tilde{k}({}^*A)\subset{}^*A$;
(3) すべての $\xi\in{}^*A$ について $\tilde{k}(\xi)\subset{}^*A$.

また, A が k-閉集合であるということは,

$$\xi\in{}^*X\,\&\,\tilde{k}(\xi)\cap{}^*A\neq\emptyset\implies\xi\in{}^*A$$

ということと同値である．

次に分離公理のモナドによる表現について述べる．そのために次の補題を証明しておく．

[命題 4.9] 位相空間 X のモナドを m と書くとき, 集合 A, $B\subset X$ が互いに交わらない開集合のペアで分離できるためには,

$$\tilde{m}({}^*A)\cap\tilde{m}({}^*B)=\emptyset$$

となることが必要十分である．

[証明] 必要性: 開集合 G, H を

$$A\subset G,\ B\subset H,\ G\cap H=\emptyset$$

となるようにとれれば, $\tilde{m}({}^*A)\subset{}^*G$, $\tilde{m}({}^*B)\subset{}^*H$, かつ ${}^*G\cap{}^*H=\emptyset$ なので $\tilde{m}({}^*A)$ と $\tilde{m}({}^*B)$ は交わらない．

十分性: A と B を分離する開集合のペアが存在しないと仮定すると, 集合族

$$\{\,G\mid G\in\mathcal{T}\,\&\,(A\subset G\vee B\subset G)\,\}$$

は有限交叉性を持つ．そこで, 超準モデルの広大性により

$$\bigcap\{\,{}^*G\mid G\in\mathcal{T}\,\&\,(A\subset G\vee B\subset G)\,\}\neq\emptyset$$

であり, この共通元をとるとそれは $\tilde{m}({}^*A)$ と $\tilde{m}({}^*B)$ の両方に入ってしまう． □

[定理 5] 位相空間 X と そのモナド m を考える. 分離公理 $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$, および $\mathbf{T}_2$ はそれぞれ次の条件と同値である.

$$x, y \in X \,\&\, x \neq y \implies x \notin m(y) \vee y \notin m(x). \quad (\mathbf{T}_0')$$
$$x, y \in X \,\&\, x \neq y \implies x \notin m(y) \,\&\, y \notin m(x). \quad (\mathbf{T}_1')$$
$$x, y \in X \,\&\, x \neq y \implies m(x) \cap m(y) = \emptyset. \quad (\mathbf{T}_2')$$

[証明] $\mathbf{T}_2$ については補題 4.9 から明らかである. その他二つの場合は一点が他の一点のモナドに入ることが, 前者を含み後者からを含まない開集合が存在することと同値になることに注意すればわかる. □

正則性および正規性の表現としてそれぞれ二通りのものを挙げる. 次のものは上の三つと同様のもので, $\mathbf{T}_3$ および $\mathbf{T}_4$ のステートメントを補題 4.9 を使って読み替えることにより自然に得られるものである.

[定理 5 (続き)] 分離公理 $\mathbf{T}_3$ および $\mathbf{T}_4$ はそれぞれ次の条件と同値である.

$$x \in X \,\&\, F : \text{closed } \,\&\, x \notin F \implies m(x) \cap \tilde{m}({}^*F) = \emptyset \quad (\mathbf{T}_3')$$
$$E, F : \text{closed } \,\&\, E \cap F = \emptyset \implies \tilde{m}({}^*E) \cap \tilde{m}({}^*F) = \emptyset \quad (\mathbf{T}_4')$$

これらに比べて, 次に挙げるものは自明でない. これは [斎藤] に出ていたものである.

[定理 6] 分離公理 $\mathbf{T}_3$ および $\mathbf{T}_4$ はそれぞれ次の条件と同値である.

$$x \in X \,\&\, \eta \in {}^*X \,\&\, \eta \notin m(x) \implies m(x) \cap \tilde{m}(\eta) = \emptyset \quad (\mathbf{T}_3'')$$
$$\xi, \eta \in {}^*X \,\&\, \tilde{m}(\xi) \cap \tilde{m}(\eta) \neq \emptyset \implies \exists \zeta \in {}^*X \, [\, \xi, \eta \in \tilde{m}(\zeta) \,] \quad (\mathbf{T}_4'')$$

[証明] $\underline{\mathbf{T}_3 \Rightarrow \mathbf{T}_3''}$: η が $m(x)$ に属しないならば, 開集合 G で $x \in G$ かつ $\eta \notin {}^*G$ となるものがある. いま $\mathbf{T}_3$ を仮定しているので G は x のある閉近傍 H を含む. この H については

$$m(x) \subset {}^*H, \ \eta \in {}^*X - {}^*H$$

であるが, $X - H$ が開集合であることから $\tilde{m}(\eta) \subset {}^*X - {}^*H$ となる. よって $m(x) \cap \tilde{m}(\eta) = \emptyset$ である.

$\underline{\mathbf{T}_3'' \Rightarrow \mathbf{T}_3}$: 仮に $\mathbf{T}_3$ が成り立たなかったとしたら, 閉集合 F と, F に属しない点 x をとって

$$m(x) \cap \tilde{m}({}^*F) \neq \emptyset$$

となるようにできる (この主張は $\mathbf{T}_3'$ にほかならない). いま ξ を $m(x)$ と $\tilde{m}({}^*F)$ の共通部分からとったとすれば, ある $\eta \in {}^*F$ があって $\xi \in \tilde{m}(\eta)$ となる (命題 4.8). ところが F は閉集合で x は F に属しないのだから $m(x) \cap {}^*F = \emptyset$ のはずで, したがって $\eta \notin m(x)$ のはずである. ここで $\mathbf{T}_3''$ により

$$m(x) \cap \tilde{m}(\eta) = \emptyset$$

となるので ξ の行き場がなくなってしまい矛盾となる.

$\underline{\mathbf{T}_4 \Rightarrow \mathbf{T}_4''}$: 仮にすべての $\zeta \in {}^*X$ について $\xi \notin \tilde{m}(\zeta)$ あるいは $\eta \notin \tilde{m}(\zeta)$ の少なくとも一方が成立するものとしよう. このとき,

$$\mathit{\Gamma} = \{\, \gamma \in {}^*X \mid \eta \notin \tilde{m}(\gamma) \,\}$$
$$\mathit{\Delta} = \{\, \delta \in {}^*X \mid \xi \notin \tilde{m}(\delta) \,\}$$

とおき, 各 $\gamma \in \mathit{\Gamma}$ および 各 $\delta \in \mathit{\Delta}$ に対して, それぞれ開集合 G_γ および H_δ を対応させて

$$\gamma \in {}^*G_\gamma,\ \eta \notin {}^*G_\gamma\,;$$
$$\delta \in {}^*H_\delta,\ \xi \notin {}^*H_\delta$$

となるようにできる. この作り方から,

$$^*X = \bigcup_{\gamma \in \mathit{\Gamma}} {}^*G_\gamma \cup \bigcup_{\delta \in \mathit{\Delta}} {}^*H_\delta$$

となるので, 超準モデルの広大性から, 有限個の $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$ および $\delta_1,\ldots,\delta_n$ をうまくとれば

$$X = G_{\gamma_1} \cup \cdots \cup G_{\gamma_m} \cup H_{\delta_1} \cup \cdots \cup H_{\delta_n}$$

と X 全体を覆ってしまえる. ここで,

$$E = X - (H_{\delta_1} \cup \cdots \cup H_{\delta_n})$$
$$F = X - (G_{\gamma_1} \cup \cdots \cup G_{\gamma_m})$$

とおけば, E, F ともに閉集合で

$$E \cap F = \emptyset,\ \xi \in {}^*E,\ \eta \in {}^*F$$

となっている. 分離公理 $\mathbf{T}_4$ によって, E と F は開集合で分離されるが, そのことからただちに $\tilde{m}(\xi) \cap \tilde{m}(\eta) = \emptyset$ がしたがう. これで $\mathbf{T}''_4$ の成立することが示された.

<u>$\mathbf{T}''_4 \Rightarrow \mathbf{T}_4$</u> : 二つの閉集合 E, F が開集合のペアで分離できなければ, 補題 4.9 より

$$\tilde{m}({}^*E) \cap \tilde{m}({}^*F) \neq \emptyset$$

となり, その共通元を γ とすれば命題 4.8 より $\xi \in {}^*E$ ならびに $\eta \in {}^*F$ をうまくとって

$$\gamma \in \tilde{m}(\xi) \cap \tilde{m}(\eta)$$

となるようにできる. ここで $\mathbf{T}''_4$ を使えば, ある $\zeta \in {}^*X$ について, $\xi, \eta \in \tilde{m}(\zeta)$ となる. したがって

$$\tilde{m}(\zeta) \cap {}^*A \neq \emptyset$$

かつ

$$\tilde{m}(\zeta) \cap {}^*B \neq \emptyset$$

である. ところが A, B とも閉集合であるから $\zeta \in {}^*A \cap {}^*B$ となる. このことから $A \cap B \neq \emptyset$ であることがわかる. □

定理 5 と定理 6 から次の標準的命題がただちに得られる.

[命題 4.10] コンパクトなハウスドルフ空間は正規空間である.

[証明] 条件 $\mathbf{T}''_4$ を確かめれば良い. いま $^*X$ の二つの *-点 ξ, η について

$$\tilde{m}(\xi) \cap \tilde{m}(\eta) \neq \emptyset$$

であったと仮定する. コンパクト空間では任意の *-点が標準部分を有するので, x, y をそれぞれ ξ, η の標準部分であるとする. このとき

$$\tilde{m}(\xi) \subset m(x)$$

かつ

$$\tilde{m}(\eta) \subset m(y)$$

であるから $m(x) \cap m(y) \neq \emptyset$ であって, ハウスドルフ性の条件 $\mathbf{T}_2'$ により $x = y$ となる. ゆえに $\xi, \eta \in m(x)$ となるので $\mathbf{T}_4''$ は成立する. □

分離公理についてはとりあえずこれくらいにして, 節を改めて一様位相について述べることにする. 完全正則空間の分離公理 $\mathbf{T}_{3\frac{1}{2}}$ の特徴付けについてはその後で論じる (つもり).

5 一様空間

この節では任意の一様構造が, “限りなく近い” ことを表す同値関係を定め, 逆にそれによって規定されることを示す. これは前節においてモナドから位相を再構成したのと平行した議論になっている. その後で一様構造に関連する諸概念の超準的な書き換えがおこなわれる. 一様空間の構造をより深く知るためには飽和モデルを用いる必要があるが, ここではそのような一様空間の一般論については禁欲することにした. それゆえこの節でも, 超準モデルについては広大性のみを仮定する.

標準的な定義からはじめる. ここでの定式化はブルバキ (数学原論 “位相” 第 2 章) の全近縁系の公理によるが, 彼らのいう “分離的” な一様空間のみを取り扱う. 次に述べる条件の (1) はそのことを暗に含んでいる.

[**定義 11**] 集合 X の積 $X \times X$ の部分集合の族 $\mathcal{U}$ が次の条件 (1)–(4) を満たすとき, $\mathcal{U}$ は X 上の一様構造の全近縁系 をなすという.

(1) $\bigcap \mathcal{U} = \Delta$.
(2) $U \in \mathcal{U}$ かつ $U \subset V \subset X \times X$ なら $V \in \mathcal{U}$.
(3) 任意の $U, V \in \mathcal{U}$ について $U \cap V \in \mathcal{U}$.
(4) 任意の $U \in \mathcal{U}$ について ${}^tU \in \mathcal{U}$.
(5) 任意の $U \in \mathcal{U}$ について, ある $V \in \mathcal{U}$ で $V \circ V \subset U$.

ただしここで Δ は $X \times X$ における対角線集合, ${}^tU$ は二項関係として U の転置, また $V \circ V$ は二項関係としての V のそれ自身との連接を表すものとする. またこのとき $\mathcal{U}$ は X 上の 一様性 を定めるという.

全近縁系は位相空間の近傍フィルターに相当する. 次に基本近傍系に相当する基本近縁系の概念を定める.

[**定義 12**] 集合 X の積 $X \times X$ の部分集合の, 添え字付けられた族 $\mathcal{U}_0 = \langle U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \rangle$ が次の条件 (1)–(4) を満たすとき, $\mathcal{U}_0$ は X 上の一様構造の 基本近縁系 をなす, という.

(1) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \Delta$.
(2) 任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して, うまく $\nu \in \lambda$ をとって $U_\nu \subset U_\lambda \cap U_\mu$ とできる.
(3) 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, うまく $\mu \in \Lambda$ をとって ${}^tU_\mu \subset U_\lambda$ とできる.
(4) 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, うまく $\mu \in \Lambda$ をとって $U_\mu \circ U_\mu \subset U_\lambda$ とできる.

またこのとき $\mathcal{U}_0$ は X 上の一様性を定める, という.

定義 10 の意味の一様性と定義 11 の意味のそれとが整合的であることを説明するために, 次に一様性の同値という概念を定義する.

[定義 13] 集合 X 上の二つの一様構造の基本近縁系 $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{V}_0$ が与えられているものとする．いま $\mathcal{U}_0$ が $\mathcal{V}_0$ より <u>強い</u> ということを（両者の添え字集合をそれぞれ Λ, Θ として）

$$(\forall\theta\in\Theta)(\exists\lambda\in\Lambda)[\,U_\lambda\subset V_\theta\,]$$

が成立することと定め, これを記号の上では

$$\mathcal{U}_0\preccurlyeq\mathcal{V}_0$$

と書く（強い方が小さい）．またこれら二つの基本近縁系が同値であるということを

$$\mathcal{U}_0\preccurlyeq\mathcal{V}_0\,\&\,\mathcal{V}_0\preccurlyeq\mathcal{U}_0$$

が成立することであると定める．

明らかに, 全近縁系はそれ自身によって添え字付けられた基本近縁系である．また, 任意の基本近縁系 $\mathcal{U}_0$ に対して

$$\mathcal{U}=\{\,U\subset X\times X\mid U\supset U_\lambda\text{ for some }U_\lambda\in\mathcal{U}_0\,\}$$

と定めれば, この $\mathcal{U}$ は一つの全近縁系である．この $\mathcal{U}$ は基本近縁系とみて, もとの $\mathcal{U}_0$ と同値である．また同値な基本近縁系からは上のようにして同一の全近縁系が得られる．以上のような意味で基本近縁系と全近縁系は同等な概念になっている．そこで全近縁系または基本近縁系によって一様性の定められた空間を <u>一様空間</u>, その全近縁系の要素となる集合（または二項関係と見ることができる）をその一様空間における一つの <u>近縁</u> という．一様空間における各近縁は, 任意の 2 点間の近さの程度を与えるものと考えられる．さて, 標準的な定義をさらに続ける．

[定義 14] 二つの一様空間 $(X,\mathcal{U})$, $(Y,\mathcal{V})$（$\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ は全近縁系, 以下同じ）が与えられているものとする．いま写像 $f:X\to Y$ が <u>一様連続</u> であるということを, いかなる $V\in\mathcal{V}$ に対しても, うまく $U\in\mathcal{U}$ をとって,

$$\langle x,y\rangle\in U\implies\langle f(x),f(y)\rangle\in V$$

が成立するようにできるということだと定める．それ自身一様連続であって, しかも一様連続な逆写像を有する写像のことを <u>一様位相同型写像</u> という．二つの一様空間のあいだに一様位相同型写像があるときに, 両者は <u>一様同相</u> であるという．

いいかえれば, 互いに近い点を互いに近い点に写す写像のことを一様連続写像というのである．また一様位相同型写像は一方の一様空間の近縁系を他方の一様空間の近縁系に正確に写す．一様同相な一様空間は同じ一様構造を有すると考えられる．

[定義 15] 一様空間 $(X,\mathcal{U})$ が与えられたとき, 任意の部分集合 $Y\subset X$ に対して,

$$\mathcal{U}|_Y=\{\,U\cap(Y\times Y)\mid U\in\mathcal{U}\,\}$$

と定義して得られる一様空間 $(Y,\mathcal{U}|_Y)$ を, $(X,\mathcal{U})$ からの <u>相対一様空間</u> といい, その一様性を <u>相対一様性</u> という．

[定義 16] 任意個数の一様空間の族 $(X_i,\mathcal{U}_i)$ $(i\in I)$ が与えられたとき, 直積集合 $X=\prod_{i\in I}X_i$ において, すべての自然な射影

$$\mathrm{pr}_i:X\twoheadrightarrow X_i$$

を一様連続にするような最も弱い一様性を 直積一様性 といい, その一様性のもとで考えられた一様空間 X を $(X_i,\mathcal{U}_i)$ の 直積一様空間 という.

直積一様性を陽に表現すれば,

$$(\mathrm{pr}_i \times \mathrm{pr}_i)^{-1}[U_i] \qquad (\, U_i \in \mathcal{U}_i,\ i \in I\,)$$

の形の集合有限個の共通部分の全体を基本近縁系にもつ一様性である. 一般に, ひとつの集合 Y からの写像の族

$$\varphi_i : Y \to X_i \qquad (\, i \in I\,)$$

があって, 各点を分離するとき, Y にこれら全てを一様連続にする最弱の一様性を定めることができる (各点を分離するとは, $x \neq y$ なら少なくとも一つの i で $\varphi_i(x) \neq \varphi_i(y)$ となること). これを $\{\, \varphi_i \mid i \in I\,\}$ によって Y に 誘導された一様性 という. 相対一様性は包含写像によって導入された一様性, 直積一様性は自然な射影によって導入された一様性である.

一様空間の典型的な例として距離空間と位相群があり, 応用上の例はたいていこのどちらかである. 抽象的な一様空間の概念はむしろ位相空間論において重要になっている. 基本的な定義は一段落したので次に一様空間を超準解析的に特徴付けることを試みる.

[**定義 17**] 一様空間 $(X,\mathcal{U})$ が与えられているものとするとき, ${}^*X$ 上の二項関係 $\approx$ を

$$\xi \approx \eta \iff \langle \xi, \eta \rangle \in {}^*U \quad \text{for all } U \in \mathcal{U}$$

と定めこれをこの一様空間の 近似関係 という. また $\xi \approx \eta$ のとき, ξ と η は互いに 限りなく近い という.

この関係 $\approx$ は一様性を特徴付ける. くわしくは次のことが成立する.

[**命題 5.1**] 一様空間 $(X,\mathcal{U})$ と, その近似関係 $\approx$ が与えられたとするとき.

(1) 近似関係 $\approx$ は ${}^*X$ 上の同値関係である.

(2) 標準点どうしが限りなく近いのは点が一致するときだけである.

(3) この一様性の任意の基本近縁系 $\mathcal{U}_0$ について

$$\begin{aligned}\mathrm{gr}(\approx) &= \bigcap \{\, {}^*U \mid U \in \mathcal{U}_0 \,\} \\ &= \bigcap \{\, {}^*(U \circ U) \mid U \in \mathcal{U}_0 \,\}\end{aligned}$$

が成立する.

(4) この一様性の全近縁系 $\mathcal{U}$ については

$$\mathcal{U} = \{\, U \mid U \subset X \times X \,\&\, \mathrm{gr}(\approx) \subset {}^*U \,\}$$

が成立する.

証明は超準モデルの広大性を用いれば容易である. また一様性の概念を次のようにして超準的同値関係の方から定義することもできる.

[**命題 5.2**] 任意の集合 X において, ${}^*X$ 上の二項関係 $\approx$ が何らかの一様性の近似関係になっているための必要十分条件は次の (1)–(3) が成立することである.

(a) 関係 $\approx$ は ${}^*X$ 上の同値関係である.

(b) $\approx$ を X 上に制限すると, 等号と同じである.

(c) $\Upsilon = \mathrm{gr}(\approx)$ とおくとき

$$\Upsilon = \bigcap \{\, {}^*(U \circ U) \mid U \subset X \times X \,\&\, \Upsilon \subset {}^*U \,\}$$

となっている.

[証明] とりあえず ${}^*U$ が Υ を含むような $U \subset X \times X$ の全体を $\mathcal{U}$ と書くことにする. いうべきことは, $\mathcal{U}$ がある一様性の全近縁系になっていること, および $\approx$ がその一様性の近似関係になっていることである. 全近縁系の条件のうち (1) は $\approx$ の条件 (a) と (b) からわかり, (2) と (3) は $\mathcal{U}$ の作り方と $*$ が集合算を保つことから明らかである. 次に $\approx$ は同値関係であるから ${}^t\Upsilon = \Upsilon$ であって, $U \in \mathcal{U}$ のとき

$${}^*({}^tU) = {}^t({}^*U) \supset {}^t\Upsilon = \Upsilon$$

となるから ${}^tU \in \mathcal{U}$ であり (4) もいえる. (5) については, ${}^*U \supset \Upsilon$ のとき (c) と超準モデルの広大性からある V で

$$\Upsilon \subset {}^*V, \quad V \circ V \subset U$$

となっていることがわかる. 以上のことから $\mathcal{U}$ がひとつの近縁系をなすことがわかった. この近縁系の定める一様性の近似関係が $\approx$ と一致することは (c) からすぐにわかる ($U \in \mathcal{U}$ のとき $U \subset U \circ U \in \mathcal{U}$) であることに注意). □

この命題 5.2 において, $\approx$ がもともとある一様性の近似関係であったなら, 命題 5.1 によりそれは $\mathcal{U}$ を全近縁系とする一様性である. したがって X 上の一様性を与えることと上記の (a)–(c) を満たす ${}^*X$ 上の関係 $\approx$ を与えることは同等である. 超準的なアプローチのひとつの利点は, "限りなく近い" という直観的なわかりやすい関係で抽象的な近縁系の公理に替えることができるところにある. 例えば次の命題は一様連続写像の定義のあとに述べた直観的な説明の厳密な表現にほかならない.

[命題 5.3 (一様連続写像の超準的特徴付け)] 二つの一様空間 $(X, \mathcal{U})$, $(Y, \mathcal{V})$ の近似関係を, それぞれ $\approx_X$, $\approx_Y$ と書く.

(1) 写像 $f : X \to Y$ が一様連続写像であるためには

$$\xi, \eta \in {}^*X \,\&\, \xi \approx_X \eta \implies {}^*f(\xi) \approx_Y {}^*f(\eta)$$

となることが必要十分である.

(2) 全単射 $h : X \to Y$ が一様位相同型写像であるためには

$$\xi, \eta \in {}^*X \implies [\, \xi \approx_X \eta \iff {}^*h(\xi) \approx_Y {}^*h(\eta) \,]$$

となることが必要十分である.

[証明] (1) がいえれば (2) はすぐにわかる. 以下 (1) の証明.

<u>必要性</u>: 任意に与えられた $V \in \mathcal{V}$ に対して $U \in \mathcal{U}$ を

$$U \subset (f \times f)^{-1}[V]$$

となるようにとる. すると

$$\begin{aligned}\mathrm{gr}(\approx_X) &\subset {}^*U\\ &\subset {}^*((f\times f)^{-1}[V])\\ &= ({}^*f\times{}^*f)^{-1}[{}^*V]\end{aligned}$$

となる. V は任意であったからこのとき $\mathrm{gr}(\approx_X)\subset({}^*f\times{}^*f)^{-1}[\mathrm{gr}(\approx_Y)]$ であって条件の必要なことがわかる.

十分性: 任意の $V\in\mathcal{V}$ について

$$\mathrm{gr}(\approx_X)\subset({}^*f\times{}^*f)^{-1}[\mathrm{gr}(\approx_Y)]\subset({}^*f\times{}^*f)^{-1}[{}^*V]$$

である. このときうまく $u\in{}^*\mathcal{U}$ をとって $u\subset\mathrm{gr}(\approx_X)$ となるようにできる. 論理式の集まり

$$\text{“}\mathbf{t}\in\mathcal{U}\,\&\,\mathbf{t}\subset U\text{”}$$

は標準モデルで有限共起するので超準モデルで共起し, その証人として $u\in{}^*\mathcal{U}$ をとると $u\subset\mathrm{gr}(\approx_X)$ となる. それゆえ超準モデルにおいては次の式が正しい:

$$(\exists u)[\,u\in{}^*\mathcal{U}\,\&\,u\subset({}^*f\times{}^*f)^{-1}[{}^*V]\,].$$

これを * で標準モデルに引き戻せば, 次の式となり, これは標準モデルで正しい.

$$(\exists U)[\,U\in\mathcal{U}\,\&\,U\subset(f\times f)^{-1}[V]\,].$$

V は任意であったから, f の一様連続性は証明された. □

[**命題 5.4 (相対一様性および直積一様性の超準的特徴付け)**]

(1) 一様空間 $(X,\mathcal{U})$ の近似関係を $\approx$ と書くとき, 部分集合 Y における X からの相対一様性の近似関係は $\approx$ の ${}^*Y$ 上への制限である.

(2) 一様空間 $(X_i,\mathcal{U}_i)$ の近似関係を $\approx_i$ とかく $(i\in I)$. そのとき直積一様性の近似関係 $\approx$ は次の式で与えられる.

$$\xi\approx\eta\iff\xi(i)\approx_i\eta(i)\ \text{for all}\ i\in I.$$

証明は誘導一様性の定義に戻って計算するだけであり, 簡単なので省略する. あとしばらくの間, 一様性と位相との関係を調べてみる.

[**定義 18**] 一様空間 $(X,\mathcal{U})$ において, 点 x の近傍系として

$$\mathcal{U}(x)=\{\,U(x)\mid U\in\mathcal{U}\,\}$$

(ただし $U(x)=\{\,y\in X\mid\langle y,x\rangle\in U\,\}$ とする) を採ることによりことにより定められる位相を, この一様空間の 一様位相 という.

同値な一様性は同じ位相を定めるし, 一様位相同型写像は位相同型写像である. しかし一様位相の意味で同相であっても一様同相とは限らない. 位相同型写像が一様位相同型写像とは限らないからである. また一様連続写像は連続写像であるが, 一様空間上の写像が一様位相で連続であっても一様連続とは限らない. 一様構造は位相構造よりも細かいことを気にする構造なのである.

明らかに, $\mathcal{U}$ が全近縁系なら $\mathcal{U}(x)$ は一様位相の全近傍系, $\mathcal{U}$ が基本近縁系なら $\mathcal{U}(x)$ は一様位相の基本近傍系である．それゆえ一様位相での標準点のモナドは, 近似関係の意味でその点に限りなく近いような *-点の全体である．しかしながら超準点にまで延長されたモナドの振舞いと, 超準点における近似関係の振舞いとの関係については一般には何もいえない．モナドの延長は位相だけによって決まるので, 一般には一様構造を復元しない．重要な例外は次に述べるコンパクトなハウスドルフ空間の場合である．

[命題 5.5] コンパクトなハウスドルフ空間においては, その位相と両立する一様性がただひとつだけ存在し, それは

$$\xi \approx \eta \iff \mathrm{st}(\xi) = \mathrm{st}(\eta)$$

で与えられるものである．ただしここで $\mathrm{st}(\xi)$ は ξ に限りなく近い一意的な標準点（ξ の標準部分）を表わす．この一様性の意味で, 任意の一様空間への任意の連続写像は一様連続である．

一様空間の理論においては完備性および全有界性の概念が重要な役割を担う．これらを説明するのに先だって, そのために必要なコーシー・ネットおよびコーシー・フィルターについて述べる．

有向擬順序集合で添え字付けられた点の集まりを <u>ネット</u> という．つまり集合 X 上のネットとは次の条件 (1)–(3) を満たす三つ組み $(\varphi, \Lambda, \leqslant)$ のことである．

(1) φ は Λ から X への写像である．
(2) $\leqq$ は Λ 上の擬順序関係である．
(3) 任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して, うまく $\nu \in \Lambda$ をとれば $\nu \leqslant \lambda$ かつ $\nu \leqslant \mu$ となる．

以後の多くの場面で, ネットを点列のように $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と表記する．点列をネットと思うときには, 順序集合としては $\mathbb{N}$ の通常の順序の逆順序で考えることに注意する．

位相空間 X 上のネット $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が点 $a \in X$ に <u>収束する</u> とは, a 任意の近傍 N に対して, うまく $\lambda_0 \in \Lambda$ をとれば, $\lambda \leqslant \lambda_0$ であるような任意の $\lambda \in \Lambda$ について $a_\lambda \in N$ となるようにできることであると定める．またネット $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が点 $a \in X$ に <u>接触する</u> とは, ある添字集合 Λ の共終部分集合 Λ_0 があって, 部分ネット $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_0}$ が a に収束することだと定める．いいかえれば, a の任意の近傍 N と任意の $\lambda_1 \in \Lambda$ に対して, ある $\lambda_0 \in \Lambda_0$ をうまくとれば,

$$\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \,\&\, a_{\lambda_0} \in N$$

を成立させられるということである．

一様空間 X 上のネット $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が <u>コーシー・ネット</u> であるとは, 任意の近縁 U に対して, うまく $\lambda_0 \in \Lambda$ をとれば, 任意の $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ に対して

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_0 \,\&\, \lambda_2 \leqslant \lambda_0 \implies \langle a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2} \rangle \in U$$

となるときにいう．

一様空間 X 上のフィルター $\mathcal{F}$ が <u>コーシー・フィルター</u> であるとは, 任意の近縁 U に対して集合 $A \in \mathcal{F}$ をうまくとれば

$$x \in A \,\&\, y \in A \implies \langle x, y \rangle \in U$$

とできるという場合にいう．$\mathcal{F}$ がコーシー・フィルターであれば, $\mathcal{F}$ の任意の選択関数 $\varphi : \mathcal{F} \to X$ について, ネット（これを $\mathcal{F}$ の選択ネットと呼ぼう）

$$(\varphi, \mathcal{F}, \subset)$$

はコーシー・ネットである．また任意の選択ネットがコーシー・ネットであるようなフィルターはコーシー・フィルターである．いまはフィルターから選択ネットという形でネットを得たが，逆に任意のネット $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について，

$$\{\, a_\lambda \mid \lambda \leqslant \lambda_0 \,\} \qquad (\lambda_0 \in \Lambda)$$

の形の集合の全体はフィルター基底をなす．この意味でネットからフィルターを定義することができる．明らかに，コーシー・ネットからはコーシー・フィルターが得られる．

ネットがある点に収束すれば，そのネットから得られるフィルターも同じ点に収束する．またある点に収束するフィルターの任意の選択ネットは同じ点に収束する．ハウスドルフ空間では，フィルターやネットの収束する先は一意的である．その点はフィルターおよびネットの 極限点 と呼ばれる．極限点はもしあればただひとつの接触点である．

一様空間においては収束するネットはコーシー・ネットである．コーシー・ネットの接触点はあったとしたらただひとつで，それは極限点である．

任意のコーシー・ネットが収束するような一様空間を 完備な一様空間 という．これは任意の極大コーシー・フィルターが収束するといってもよい．また極大フィルターがすべてコーシー・フィルターであるような一様空間を 全有界な一様空間 という．これは任意のネットが部分ネットとしてコーシー・ネットを含むことといってもよい．これらの定義から，コンパクト一様空間は完備でありかつ全有界でもある．これは逆も正しい．

以上の定義と同等な，超準解析的な概念を求めよう．擬有向集合 $(\Lambda, \leqslant)$ が与えられたとする．このとき超準モデルの広大性から，あらゆる $\lambda \in \Lambda$ に対して同時に $\lambda_\infty {}^*\!\leqslant {}^*\lambda$ となるような，*-元 $\lambda_\infty \in {}^*\Lambda$ が存在する．このような λ_∞ のことをこの擬有向集合の 仮想極限 と呼ぶことにする．仮想極限は一般にたくさんある．この仮想極限の概念を用いると，ネットの収束については次のように表現できる．

[命題 5.4 (ネットの収束の超準的表現)]

(1) 位相空間 X 上のネット $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が点 a に収束するための必要十分条件は，Λ の任意の仮想極限 λ_∞ に対して a_{λ_∞} が a のモナドに入ることである．

(2) 位相空間 X 上のネット $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が点 a に接触するための必要十分条件は，Λ のひとつの仮想極限 λ_∞ に対して a_{λ_∞} が a のモナドに入ることである．

(3) 一様空間 X 上のネット $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ がコーシー・ネットであるための必要十分条件は，任意の仮想極限 λ_1, λ_2 について $a_{\lambda_1} \approx a_{\lambda_2}$ となることである．

[定義 19] 集合 X の *-元 ξ と η が同一の極大フィルターを定めるとき，両者は 識別不能 であるという．いいかえれば

$$\xi \in {}^*A \iff \eta \in {}^*A, \qquad \text{for all } A \subset X$$

であるときに，ξ と η は識別不能であるという．これを記号の上では

$$\xi \doteqdot \eta$$

と表記する．

一様空間，あるいはもっと具体的な数直線においてさえ，識別不可能な点がいつでも限りなく近いとはいえないし，限りなく近い点がいつでも識別不可能というわけでもない．後者の反例として，正と負の無限小 *-実数は互いに限りなく近いが半直線によって識別され得る．前者の反例は簡単には作れないが，次の命題により，

接触点をもたないネットの相異なる仮想極限に対応して識別不可能だが限りなく近いわけではない二点が現われることがわかる．これらの例はコンパクトでない空間での近似関係に関する注意として意義があると思う．

[**命題 5.5 (極大コーシー・フィルターの特徴付け)**]　一様空間 X 上の極大フィルター $\mathcal{F}$ がコーシー・フィルターであるためには $\mathcal{F}$ の任意の共通 *-元が互いに限りなく近いことが必要十分である．

[**命題 5.6**]　一様空間 X の *-元 ξ について次の (1)–(4) は同値である．

(1) ξ の定める極大フィルターはコーシー・フィルターである．

(2) ξ と識別不能な任意の *-点が ξ に限りなく近い．いいかえれば任意の $\eta \in {}^*X$ について

$$\eta \doteq \xi \implies \eta \approx \xi$$

が成立する．

(3) あるコーシー・ネット $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ とある仮想極限 $\lambda_\infty \in {}^*\Lambda$ について, $a_{\lambda_\infty} \doteq \xi$ となる．

(4) 任意の近縁 U に対して, ある標準点 $x \in X$ で $\xi \in {}^*(U(x))$ となる．

任意の近標準点は明らかにこれらの条件を満たす．命題 5.6 の条件 (4) は近標準点の定義の双対になっていることに注意せよ．

[**定義 20**]　一様空間 X の *-点 ξ が命題 5.6 にいう条件を満たすときに, ξ は コーシー点 であるという．

定義から近標準点はすべてコーシー点である．コーシー点と識別不能な点, あるいはコーシー点に限りなく近い点はまたコーシー点である．命題 5.6 から次のことが直ちにわかる．

[**定理 10 (完備性と全有界性の超準的表現)**]

(1) 一様空間 X が完備であるためには, すべてのコーシー点が近標準点であることが必要十分である．

(2) 一様空間 X が全有界であるためには, 任意の *-点がコーシー点であることが必要十分である．

次の命題は定理 10 の (2) をいいかえたものに過ぎない．全有界性の定義は通常こちらの方を用いる．

[**命題 5.7(全有界性の別表現)**]　一様空間 X が全有界であることは次の (1), (2) のいずれとも同値である．

(1) 任意の近縁 U について, 有限個の点 $x_1,\dots,x_n$ をうまくとって $X = U(x_1) \cup \cdots \cup U(x_n)$ とできる．

(2) 任意の近縁 U について ${}^*X = \bigcup_{x\in X} {}^*(U(x))$ が成立する．

6　可算飽和性と延長原理

第 3 節での議論には * が同型でない初等埋め込みであるという事実だけが必要であった．また第 4, 第 5 節では ${}^*\mathbf{S}$ が広大モデルであるという事実を利用した．この節では飽和モデルに特有の現象をいくつか述べる．

多くの文献にしたがって, *-有限な *-集合のことを 超有限集合 と呼ぶことにすると, 広大モデルでは, 標準元ばかりからなる外集合は, ある超有限集合に含まれる．また κ-級飽和モデルにおいては, さらに強く内的な要素の濃度 κ 未満の集合は, ある超有限集合に含まれることになる．

以下この節では, κ は非可算な基数, ${}^*\mathbf{S}$ は κ-級飽和な広大モデルであるものとする．

[**命題 5.1 (飽和性の原理)**]　*-集合の (外的な) 族 Γ が有限交差性を有し, しかも濃度が κ 未満であれば, $\bigcap \Gamma \neq \emptyset$ である．

この命題の主張は, 超準モデルの κ-級飽和性のいいかえに過ぎない. とくに集合の可算列については次のようになる.

[命題 5.2] *-集合の列 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ が

$$\alpha_0 \supset \alpha_1 \supset \cdots \supset \alpha_n \supset \cdots$$

を満たせば $\bigcap_{n=0}^{\infty} \alpha_n \neq \emptyset$ である.

[系] *-実数の増大列

$$\xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n < \cdots$$

は ${}^*\mathbb{R}$ の順序の意味で有界かつ離散的である.

飽和モデルの上では可算列というものはこのように不完全で, 未完成のものといった感じがする. 次の定理は任意の可算列をもっと完全な *-無限列に延長できることを主張する.

[定理 5 (可算列の延長原理)] *-集合 A と外的な写像

$$F : \mathbb{N} \to A$$

に対して, *-写像

$$G : {}^*\mathbb{N} \to A,\ G \in {}^*U$$

で, $F = G \restriction \mathbb{N}$ となるものが存在する.

[証明] 各自然数 n に対して

$$\alpha_n = \{\, G \in {}^*U \mid G : {}^*\mathbb{N} \to A \,\&\, G \restriction n = F \restriction n \,\}$$

とおく. $F \restriction n$ は有限であるから内的, したがって α_n も内的である. この α_n に命題 5.2 を適用すればよい. □

[命題 5.3(無限小の延長原理)] $(X, \mathcal{O}_X)$ は通常の位相空間で, 各点は濃度 κ 未満の基本近傍系を有するものとする. もしも内集合 $A \subset X$ が標準点 $p \in X$ のモナドを含めば, p のある標準近傍 G があって ${}^*G \subset A$ である.

[証明] p のどの標準 *-近傍も A に含まれないものとするとき,

$$\Gamma = \{\, {}^*G - A \mid p \in G \in \mathcal{O}_X \,\}$$

とおけば, Γ は内集合の有限交叉性を有する族である. p は濃度 κ 未満の基本近傍系を持つので, Γ の濃度も κ 未満と思ってよい. 飽和性の原理より, この Γ は共通元を有する. その共通元は A に属しないが $\mathrm{mon}_X(p)$ には属するので. A が p のモナドを含むという仮定に反する. □

自然数に関する標準的な述語 $P(t)$ については, 無限個の自然数 $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成り立つことと, 少なくとも一つの無限大 *-自然数 $\nu \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ で ${}^*P(\nu)$ が成り立つことは同等である. このことは超準モデルの広大性に帰することができる. 可算飽和モデルでは, この性質を一般の内的述語に拡張できる.

[命題 5.4] 言語 $\mathcal{L}({}^*\mathbf{S})$ における *-自然数に関する述語 $P(t)$ について, 無限個の自然数 $n \in \mathbb{N}$ で $P(n)$ が成立することと, ある無限大 *-自然数 $\nu {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ で $P(\nu)$ が成立することとは同等である.

[証明] 命題 5.2 で α_n として $P(\nu)$ を満たす n 以上の *-自然数全体の集合を考えればよい. □

例えば次節でローブ測度について議論するが, そこでは内的で *-有限加法的な *-測度空間から, 外的で可算加法的な測度空間が構成される.