ルベーグ可測性にかんするソロヴェイのモデル

藤田 博司
(愛媛大学 理学部)

2007 年数学基礎論サマースクール
静岡大学にて 2007 年 9 月 4 日〜7 日

わたくしの講義では, 強制法の応用の一例として, 実数のあらゆる集合がルベーグ可測になるソロヴェイのモデルについてお話しします. オリジナルの文献 (以下「原論文」と言います) は次のものです:

Robert. M. Solovay, *A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Annals of Mathematics, Vol.92 (1970), pp.1–56.

この Solovay の論文は, 表題に述べられたモデルが提示されているだけでなく, 関連するさまざまな問題に対するコメントや新たな問題提起を含んでいて, 以後の集合論研究の源流の一つとなった基本文献であると言って差し支えないように思います. 原論文の脚注によれば, 主要な結果の得られたのは 1964 年の春から夏にかけての数ヶ月だそうです. P.J.Cohen が連続体仮説の独立性証明の手段として強制法を開発したわずか 1 年後にこうした顕著な応用が見いだされたことも, 特筆に値します.

このノートは次のとおり 6 つのセクションで構成されます.

§1. ルベーグ測度と測度の問題の概略,
§2. 強制法にかんする補足的な諸結果,
§3. ボレル集合, $\boldsymbol{B}$-コード, ランダム実数,
§4. Levy の半順序と Levy-Solovay モデル,
§5. 内部モデル,
§6. 関連する話題とその後の展開.

執筆にあたっては, Solovay の原論文のほか, Jech のモノグラフの第 2 版 [6] と第 3 版 [7], Kanamori のモノグラフ [8], Kunen の教科書 [10] などを参考にしました. その他の参考文献については末尾の文献リストをごらんください.

1　ルベーグ測度と測度の問題の概略

19 世紀の終わり近く, 数直線が G.Cantor の集合論の言葉できちんと定義できることが理解され, 関数の概念が点と点の対応という抽象的な定式化を獲得したころから, 古典数学で確立された解析学の諸結果を集合論的枠組みの中で新しく得られるであろう一般的な関数にまで拡張する必要が認識されてきました.

積分は長さや面積の概念と切っても切れない関係にあります. 直観にもとづいた古典幾何の図形概念が, 平面の点集合という抽象的な概念に吸収された結果として, そうした一般的な点集合にまで, 長さや面積の概念

を拡張できるかどうか (あるいはそもそも面積という概念は厳密にはどういうものなのか) を, ハッキリさせる必要が生じてきました.

H.Lebesgue が学位論文において展開した測度の理論は, それらの問題に答えようとするものでした.

実数の一般の集合にまで長さの概念を拡張しようという着想は, さらに E.Borel にまでさかのぼります. Borel は (いわゆる) ボレル集合の概念を提唱し, 数直線上のボレル集合の長さが, そのボレル集合自体が生成されてくる過程に沿った超限再帰によって定義できることを示しました. 測度 (英:measure, 仏:mesure) という言葉も, Borel が提唱したもののようです.

E.Borel(と R.Baire) は, 20 世紀の初頭にフランスで活躍した数学者たちのなかでは, 集合論を応用した新しい解析学の展開に貢献しながらも, 構成主義に近い強硬な立場に立っていたことで知られており, ボレル集合の範囲を超えた実数の集合を考察することを, 事実上, 拒否していました. いっぽう, Lebesgue は Borel や Baire よりはいくぶん穏健な立場で, 長さや面積をきちんと定義できる点集合のクラスとしての可測集合の概念を考案し, それらに対して Borel が定義した測度を拡張しました.

1.1 ボレル集合とその測度

Borel が提唱したボレル集合とその測度の定義は, ルベーグ測度の絶対性を論じる際に必要ですから, ここで概略を述べます.

まず n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 I で n 個の開区間の直積の形

$$I = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

になっているものを, 開矩形 (open rectangle) と呼びます. 矩形の測度は

$$\mathrm{mes}(I) = (b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2) \times \cdots \times (b_n - a_n)$$

によって定めるのが妥当でしょう. 有限個の矩形の和集合の測度も, 初等幾何でやるように, 交わりのない矩形の和に分割することで計算できます.

開集合全体と閉集合全体のクラスを, それぞれ $\boldsymbol{\Sigma}^0_1$ と $\boldsymbol{\Pi}^0_1$ で表します. 開集合 G は, 可算個の開矩形 I_k の和集合ですから, その開集合 G の測度 $\mathrm{mes}(G)$ は, G を構成する矩形の族の, 有限部分族の和の測度の上限 $\sup_{k\in\omega} \mathrm{mes}(I_0 \cup \cdots \cup I_k)$ と定義するのが妥当です. 有界な閉集合 K の測度は, それを含む開矩形 I の測度から, 開集合 $I \setminus K$ の測度を引き算すれば, 矩形 I の取り方によらずに定まります. 有界でない閉集合 F の測度は, 有界閉集合 $F \cap [-M, +M]^n$ の上限として定義できます.

ボレル集合のクラス $\boldsymbol{B}$ は, 開集合のクラス $\boldsymbol{\Sigma}^0_1$ と閉集合のクラス $\boldsymbol{\Pi}^0_1$ から, 超限再帰によって次のように定められます.

可算順序数 $\alpha \geq 2$ について, α 未満の各順序数 ξ に対する $\boldsymbol{\Sigma}^0_\xi$ と $\boldsymbol{\Pi}^0_\xi$ がすべて定まったと仮定します. そのとき, $\bigcup_{1\leq\xi<\alpha} \boldsymbol{\Pi}^0_\xi$ からとった可算個の集合の列の和集合として得られる集合のクラスを $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$ とし, また, $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$ に属する集合の補集合のクラスを $\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha$ とします.

これらの集合の測度は次のように定義されます. $\bigcup_{1\leq\xi<\alpha} \boldsymbol{\Pi}^0_\xi$ に属するすべての集合に測度が割り当てられたと仮定します. $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$ に属する集合 E は

$$E = \bigcup_{k\in\omega} E_k, \quad \text{ただし } E_k \in \bigcup_{1\leq\xi<\alpha} \boldsymbol{\Pi}^0_\xi$$

と表示できるので, その測度を

$$\mathrm{mes}(E) = \sup_{k\in\omega} \mathrm{mes}(E_0 \cup \cdots \cup E_k)$$

と定義するのが妥当でしょう. Π^0_α に属する集合の測度は, 閉集合の測度を開集合の測度を使って求めたのと同様の手順で定義されます.

こうして, Borel は可算順序数 $\alpha \geq 1$ の各々に対して, ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ の部分集合のクラス $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$ と $\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha$, そして, それらの集合の測度の定義を与えました.

これら $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha$ と $\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha$ の, 可算順序数 α の全体にわたる和が, ボレル集合のクラス $\boldsymbol{B}$ です. この $\boldsymbol{B}$ は, すべての矩形を含む最小の可算加法族 (σ-加法族) になっています.

個々のボレル集合を "与える" ことは, 開矩形の可算族から出発して可算和と補集合の演算の繰り返しによって順々に複雑な集合を作ってゆくという "プロセスを指定する" ことにほかなりません. 個々のボレル集合の測度は, そのプロセスに沿う形で明確な言葉で定義されているという点に注目してください.

1.2 ルベーグ測度

通常のルベーグ積分の教科書の説明とは少し食い違いますが, 前節の Borel の理論との関連でいえば, Lebesgue の着想は, Borel が定義したボレル集合の測度をいわばモノサシとして, 一般の点集合の大きさを, 外側と内側からこのモノサシで測ってやろう, というものです. すなわち,

定義 1. 点集合 $A \subseteq \boldsymbol{R}^n$ が**ルベーグ可測** (Lebesgure measurable) であるとは, 任意の正の数 ε に対して, ボレル集合 B_i と B_o が存在して

$$B_i \subseteq A \subseteq B_o \quad \text{かつ} \quad \mathrm{mes}(B_o \setminus B_i) < \varepsilon$$

となることをいう. □

実際にはここでの B_i として閉集合, B_o として開集合をとることができます. A がルベーグ可測な集合であるとき, A の**外測度** (exterior measure)

$$m^*(A) = \inf\{\, \mathrm{mes}(B_o) : A \subseteq B_o \in \boldsymbol{B}\,\}$$

と**内測度** (interior measure)

$$m_*(A) = \sup\{\, \mathrm{mes}(B_i) : A \supset B_i \in \boldsymbol{B}\,\}$$

は一致します[*1]. その等しい値を, A の**ルベーグ測度** (Lebesgue measure) と呼んで $m(A)$ と書きます. ここでも, B_i としては閉集合, B_o としては開集合を考えれば十分なことがわかっています.

ルベーグ外測度 $m^*(A)$ がゼロであるような集合 A は**零集合** (null set) と呼ばれます. 零集合のクラスは $\mathcal{N}$ であらわされます. 零集合の概念を用いれば, 集合のルベーグ可測性は

$$A \triangle B \in \mathcal{N} \text{ となるボレル集合 } B \text{ の存在}$$

といい換えることができます[*2].

関数 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ は, 実数の区間の逆像がすべてこの意味でのルベーグ可測集合になっているときに, **可測関数**と呼ばれます. これは, 開集合の逆像がルベーグ可測集合になるということとも同値ですし, ボレル集合の

[*1] 集合 A が有界である場合に $m^*(A) = m_*(A)$ を可測性の定義とする流儀もありますが, A が有界でない場合には, 等式 $m^*(A) = m_*(A) = \infty$ が定義 1 の意味での可測性を保証しないので, 注意が必要です.

[*2] $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ は集合の**対称差** (symmetric difference)

逆像がルベーグ可測集合になるということとも同値です．しかし，ルベーグ可測集合の可測関数による逆像は，必ずしもルベーグ可測になるとは限りません.*3

集合のルベーグ可測性の定義と，ルベーグ測度の定義は与えられましたが，Borel の理論と異なり，一般のルベーグ測度は，その集合の与えられ方に対応して自然に求められるものとは，もはや考えられない，という点に注意してください．まったく一般的・抽象的に与えられた集合 A の外測度を求めるには，A を含む開集合の全体を考えざるを得ないので，Borel の理論にかろうじて残っていたアルゴリズム的な側面は，Lebesgue の理論においては失われています．

1.3 測度の問題, Solovay の結果とその意義

Lebesgue は，自分の測度の理論の適用範囲が，彼が可測集合と名付けた点集合のクラスに限定されることを，正しく認識していましたが，“私は可測でないいかなる函数も知らないし，それが存在するかどうかも知らない,” とも明言しています (文献 [11] の序文)．ルベーグ可測でない集合や関数の存在は，G.Vitali によって，1905 年に出版された書物において示されました．Vitali は，単位線分を平行移動の意味で互いに (1 を法として) 合同な可算無限個の部分集合の和に分割できることを，選択公理を用いて示しました．ルベーグ測度は，可算加法的で，平行移動のもとで不変であり，有界集合に有限の (外) 測度を与えるので，Vitali の集合はルベーグ可測であり得ないわけです．

Vitali の証明が測度の問題に投じた一石はさまざまな波紋を呼び起こしました．次のような問題が自然に浮かび上がってきます．

(A) 平行移動のもとでの不変性をあきらめれば，可算加法的測度をすべての点集合に定義できるのでは?
(B) 可算加法性を有限加法性に弱めれば，不変な測度をすべての点集合に定義できるのでは?
(C) 選択公理の使用は不可避だろうか?
(D) ルベーグ可測でない集合をもっと明示的に定義できないだろうか?

問題 (A) は S.Ulam の測度問題と呼ばれ，集合論の巨大基数研究のきっかけを作りました．(たとえば [7] の第 9 章，[8] の第 2 節を見なさい) 問題 (B) は S.Banach によって (とくに 1 次元と 2 次元の場合に) 肯定的に解かれましたが，平行移動だけでなく回転を含めた合同変換のもとでの不変性を要求すると，3 次元以上の空間では，有限加法的不変測度も，すべての部分集合に対して定義することは不可能であることがわかっています．これは，いわゆる Banach と Tarski のパラドックスからの直接の帰結です．有限加法的不変測度の存在は，合同変換群の構造の研究の重要なテーマのひとつになっています．(例えば文献 [19])

残る (C) と (D) に答えようというのが，Solovay の原論文の目的です．原論文での主要な定理は次の二つです．(到達不可能基数については，サブセクション 4.2 を見てください.)

定理 1. **ZFC** 集合論 +“到達不可能基数の存在” のモデルが存在すれば，次の 4 個の命題が成立するような **ZF** 集合論のモデルが存在する:

(a) 従属選択の公理 (Axiom of Dependent Choice, **DC**),
(b) 実数のあらゆる集合がルベーグ可測である (**LM**),
(c) 実数のあらゆる集合がベールの性質を有する (**BP**),

*3 (選択公理のもとでは) ルベーグ可測集合の逆像がすべてルベーグ可測になるためには，関数が可測であると同時に，零集合イデアル $\mathcal{N}$ を逆向きに保つことが，必要かつ十分です．

(d) 実数のあらゆる不可算集合が完全集合を含む (**PS**).

定理 2. **ZFC** 集合論 +“到達不可能基数の存在” のモデルが存在すれば, 次の 4 個の命題が成立するような **ZFC** 集合論のモデルが存在する:

(a’) 連続体仮説 (Continuum Hypothesis, **CH**),
(b’) 定理 1 の条項 (b) の次のような変形版: 実数の集合 A が順序数の可算列を唯一のパラメータとして定義できるならば A はルベーグ可測である,
(c’) 定理 1 の条項 (c) の, 同様の変形版,
(d’) 定理 1 の条項 (d) の, 同様の変形版.

原論文において, Solovay は “選択公理はもちろん正しい” と明言しており, 定理 1 は, 問題 (C) の否定的解, すなわち, 選択公理を本質的に使わないかぎり, ルベーグ可測でない集合は得られない ということを示していると解釈されます. Solovay の観点からすれば “もちろん” ルベーグ可測でない集合が存在するわけですが, Vitali の定理は純然たる “存在証明” ですから, 可測でない集合を (**ZFC** 集合論の枠内で) 具体的に構成できるかどうか, という問題 (D) は残ります. 定理 2 はこの問題 (D) に否定的に答えます. つまり, 集合論の論理式 φ について

$$\mathbf{ZFC} \vdash \text{“実数の集合 } \{\, x \in \boldsymbol{R} : \varphi(x) \,\} \text{ は可測でない”}$$

となることは, **ZFC** が矛盾するか, あるいは到達不可能基数が存在しないことが **ZFC** 集合論で証明できるといった, およそありそうもない状況を想定しない限り, 起こりえない, というわけです. ただし, ここで述べた問題 (D) の否定的解, すなわち「**ZFC** 集合論においてルベーグ可測でない集合を明示的に定義することはできない」という主張は, 定理 2 によって整合性が保証された,「数直線の明示的に定義可能な部分集合はすべてルベーグ可測である」という主張とは, きちんと区別する必要があります. というのも「数直線の明示的に定義可能な部分集合のうちに, ルベーグ可測でないものが存在する」という命題も, **ZFC** 集合論と整合的である[*4]からです.

続く第 2 節と第 3 節でいろいろの概念の準備をして, 第 4 節と第 5 節で Solovay の二つの定理の証明を述べます. 強制法の基本については, 加茂先生と渕野先生の講義の内容によります.

この節の残りの部分では, 定理 1 で言及されたルベーグ可測性以外の三つの命題, すなわち, 従属選択の公理 (**DC**), ベールの性質 (**BP**), 完全集合定理 (**PS**) についてすこし説明します.[*5]

1.4 従属選択の公理

定義 2. 次の命題を従属選択の公理 (Axiom of Dependent Choice, **DC**) という: X を空でない任意の集合とする. X 上の二項関係 (すなわち $X \times X$ の部分集合) R が

$$\forall x \in X\ \exists y \in X\ [\ \langle x, y \rangle \in R\ ]$$

[*4] たとえば, 構成可能公理 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ のもとでは, ルベーグ可測でない $\boldsymbol{\Delta}^1_2$ 集合が存在します.

[*5] この節の話題, とくに測度とベールの性質について詳しく知りたい人には, ルベーグ測度とベールのカテゴリーの理論の応用についてわかりやすく述べた本 [13] をお勧めします.

をみたすならば, 関数 $f:\omega\to X$ が存在して

$$\forall n\in\omega\,[\,\langle f(n),f(n{+}1)\rangle\in R\,]$$

をみたす. □

つまり, **DC** とは, 極大要素を持たない二項関係は無限上昇鎖をもつ, という主張です. あきらかに, 選択公理 **AC** は **DC** を導きます. 逆に **DC** から **AC** を導くことができないことは, 定理 1 によって明らかです*6. **DC** はルベーグ可測でない集合の存在を導くほどには強くないのです.

そのいっぽうで, 測度の理論に必要となる, 可算個の集合からの同時選択 (可算選択の公理) は **DC** によって保証されます. また, 第 3 節で展開されるボレル集合のコードの理論には, 可算選択の公理だけでは不十分で, 本当に **DC** が必要です. その理由は, **DC** が整礎的二項関係のとりあつかいを簡単にする点にあります.

定義 3. 二項関係 R が**整礎的** (wellfounded) であるとは, R の定義域の空でない任意の部分集合 S が条件

$$\exists s\in S\forall t\in S\,[\,t\neq s\implies\langle t,s\rangle\notin R\,]$$

をみたす場合にいう. この条件にあらわれるような s は, S の R-**極小** (minimal) な要素と呼ばれる. □

すべての整列順序は整礎的関係であり, そのほかに, たとえば, 要素関係 $\in$ は (基礎の公理により) 整礎的です. 整礎的関係は, その関係に添った帰納法による証明や再帰的定義などを可能にするため, コンピュータ科学や証明論のみならず, 集合論でも活躍します.

命題 3. (**ZF**) 集合 X 上の二項関係 R が整礎的であるための必要十分条件は, 順序数値関数 $\varphi:X\to\mathbf{ON}$ が存在して

$$\forall x,y\in X\,[\,\langle x,y\rangle\in X\implies\varphi(x)<\varphi(y)\,]$$

をみたすことである. □

命題 4. (**ZF**) 従属選択の公理 **DC** は次の命題と同値である: 集合 X 上の二項関係 R が整礎的でなければ, ${}^{\omega}X$ の要素 f が存在して, すべての自然数 n について $\langle f(n+1),f(n)\rangle\in R$ をみたす. つまり, R-無限下降列が存在する. □

1.5 ベールの性質

関数解析の基礎にあるバナッハ空間の理論で, Baire のカテゴリー定理が重要な役割を果たすことは, 周知のとおりです. 無限次元のバナッハ空間では, 古典解析で中心的な役割を担っていた有界集合の相対コンパクト性というユークリッド空間の特質が失われており, ルベーグ測度に相当する具合のいい測度も存在しないので, 両者に代わるツールとして Baire の理論が重要になるのです. Baire のカテゴリー定理の応用に際しては, “ある第一類集合上の点を除いて” という言い回しが, 測度論での “ほとんどいたるところ” と同様の目的で, しばしば使われます. この “第一類集合” という概念の定義から出発しましょう.

---

*6 とはいえ定理 1 は到達不可能基数の存在に訴えるものですから, 厳密にいえばこの議論は **AC** の **ZF** + **DC** からの独立性の証明にはなっていません. しかし, **ZF** が矛盾しなければ **DC** と ¬**AC** を付けくわえても矛盾しないというのは本当です.

定義 4. 位相空間の部分集合 A について, その閉包の内部が空 ($\mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,A = \emptyset$) となるとき, A は**いたるところ非稠密** (nowhere dense) な集合と呼ばれる. 可算個のいたるところ非稠密な集合の和集合に分解できるような集合のことを, **第一類集合** (set of first category) といい, そうでない集合のことを**第二類集合** (set of second category) という. □

Baire のカテゴリー定理. 完備距離空間の空でない開集合は決して第一類集合にならない. □

したがって, 完備距離空間において, 第一類集合の補集合はいたるところ稠密です. 可算個の第一類集合の和がふたたび第一類集合になることは定義から明らかですから, 完備距離空間の第一類集合は, 比較的 “小さな” 集合であるということができます.

定義 5. 数直線 $\boldsymbol{R}$ の第一類部分集合のことを**疎集合** (meager set) といい, その全体を $\mathcal{M}$ であらわす. □

こうして, ルベーグ測度の零集合のクラス $\mathcal{N}$ の類似物として疎集合のクラス $\mathcal{M}$ が導入されました. これにともなって, ルベーグ可測性の類似物として導入されるのが, ベールの性質です.

定義 6. 実数の集合 A に対して, $A \triangle B \in \mathcal{M}$ をみたすボレル集合が存在するとき, A は**ベールの性質** (property of Baire) を持つという. □

ここでの B としては開集合をとることができます. ベールの性質を持つ集合のクラスはルベーグ可測集合のクラスと多くの性質を共有しています. 直積測度にかんする Fubini の定理に対して Kuratowski と Ulam の定理, というように, 測度論のいろいろな定理に対してその “カテゴリー版” が存在します.

ルベーグ可測でない集合が存在するのと同様に, ベールの性質を持たない集合も存在します. 実際, Vitali のルベーグ不可測集合はベールの性質を持ちません. また, 選択公理を用いれば, ルベーグ可測だがベールの性質を持たない集合, ルベーグ不可測だがベールの性質を持つ集合などの存在を容易に証明できます. そこで, 実数のどんな集合がベールの性質を持つか, また, ベールの性質を持たない集合を具体的・明示的に定義できるか, というのは自然な問いといえます[*7]. Solovay の二つの定理の (c) と (c') はこのことを問題にするものです.

次の補題は, 第 3 節でランダム実数とコーエン実数の性質を対比する際に役に立ちます. (証明が明示的・構成的である点に, よく注意してください.)

補題 5. 数直線 $\boldsymbol{R}$ を二つの互いに交わらない集合 A と B に分割して, A が零集合 B が疎集合となるようにできる.

[証明] 有理数全体の集合 $\boldsymbol{Q}$ は可算集合であり, すべての有理数を並べた列 $\{\, q_k : k \in \omega \,\}$ を与えることができる. たとえば, ゼロでない自然数 k が $3^{k_0}(3k_1 + k_2 + 1)$ (ただし $k_0, k_1 \in \omega$, $k_2 \in \{0, 1\}$) の形に一意的に表示できることを利用して

$$q_k = (-1)^{k_2} \frac{k_1}{k_0 + 1}, \quad (k \geq 1)$$

とし, $q_0 = 0$ とすればよい[*8]

[*7] ただし, 測度の問題の (A) と (B) に対応するものは, ベールの性質については考えられません.

[*8] たとえば $1 = q_4 = q_{21} = q_{270}$ といったように, この列には重複が多いですが, そのことはとくに邪魔にはなりません.

各自然数 n について, 可算個の開区間の和集合

$$G_n = \bigcup_{k\in\omega} \left(q_k - \frac{1}{2^{n+k+2}},\ q_k + \frac{1}{2^{n+k+2}} \right)$$

を考えよう. G_n は稠密な開集合であるが, その測度は 2^{-n} 以下になる. そこで

$$A = \bigcap_{n\in\omega} G_n, \quad B = \boldsymbol{R} \setminus A$$

とおくと, A は零集合, B は疎集合となる. □

1.6 完全集合定理

連続体仮説研究の途上で, G.Cantor は, 実数の閉集合は連続体仮説の反例にはなりえない ということに気がつきました. 以下に述べる Cantor と Bendixon の定理という結果のなかにそれが示されています. 完全集合定理 (Perfect Set Theorems) とは, この Cantor と Bendixson の定理を拡張する各種の命題につけられる名前です.

定義 7. 完全集合 (perfect set) とは, 数直線 $\boldsymbol{R}$ の孤立点を持たない閉集合のことである. □

Cantor と Bendixson の定理. (1) 実数の閉集合は可算集合と完全集合の和集合に分解される. (2) この分解の仕方は一意的である. (3) 空でない完全集合はカントール空間 ${}^{\omega}2$ と位相同型な部分集合を含み, したがって, 連続体の濃度を有する.

[証明] (1) と (2) は, 閉集合 F の各点を凝集点とそれ以外の点に分けることで証明される. 実数 a が集合 F の**凝集点** (condensation point) であるとは, すべての正の数 ε について $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap F$ が不可算集合であるときにいう.

(3) の証明は次の考察に基づく. 完全集合 C のどの点のどの近傍も C の点を無限に多く含むので, 0 と 1 の有限列 s に対して, 点 x_s と開区間 I_s を対応させて

$$x_s \in I_s \cap C, \quad \overline{I_{s^\frown 0}} \cap \overline{I_{s^\frown 1}} = \emptyset, \quad \overline{I_{s^\frown i}} \subseteq I_s$$

をみたし, かつ区間 I_s の長さが列 s の長さの逆数で押さえられるようにできる. 0 と 1 の無限列 σ に対して $\bigcap_{n\in\omega} \overline{I_{f\restriction n}}$ はただ一つの点からなる. その点を x_σ と書くと

$$x_\sigma = \lim_{n\to\infty} x_{f\restriction n}$$

となっているので, $\sigma \mapsto x_\sigma$ はカントール空間 ${}^{\omega}2$ から C の中への連続な一対一写像である.*9 □

Cantor と Bendixson の定理はその後, “不可算なボレル集合はカントール空間と位相同型な部分集合を含む” という形で, Hausdorff と Alexandroff によって (独立に) ボレル集合にまで, さらに Suslin と Lusin によって解析集合 ($\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ 集合) にまで拡張されました.

Cantor 自身は当初, この方向で完全集合定理を拡張していけば連続体仮説の証明に到達できるだろうと構想していたようですが, その構想は Bernstein の反例によって打ち砕かれました.

---

*9 補題 5 ほど構成的ではありませんが, ここでもやはり証明が **ZF+DC** の枠内で実行されていることに注意しましょう.

ベルンシュタイン集合. 数直線を互いに交わりのない二つの部分集合 A と B に分割し, A も B もすべての空でない完全集合と交わるようにできる. □

[証明] 数直線のカントール空間と位相同型な部分集合全体の集合は連続体の濃度を持つので, 選択公理によって $\{\, K_i : i < 2^\omega \,\}$ と整列させることができる. 各 K_i も連続体の濃度を持つので, 実数の超限列 $\langle\, x_i : i < 2^\omega \,\rangle$ と $\langle\, x_i : i < 2^\omega \,\rangle$ を,

$$x_i, y_i \in K_i \setminus \{\, x_j, y_j : j < i \},\quad x_i \neq y_i$$

をみたすようにとれる. $A = \{\, x_i : i < 2^\omega \,\}$ とおき, その補集合を B とすればよい.[*10] □

このような集合 A と B は可算でもないし, また空でない完全集合を含むこともないので, Cantor と Bendixson の定理をどのように拡張しても, その適用範囲にベルンシュタイン集合が入ることは絶対にないわけです.

ベルンシュタイン集合はルベーグ可測でなくベールの性質も有しないことが容易にわかります. そして, Bernstein による反例の存在証明にも, 選択公理が本質的に用いられていました. ですから, ルベーグ可測性やベールの性質と同様に, Cantor と Bendixson の定理が実数のすべての集合にまで拡張される可能性について問うのは自然なことでしょう. 定理 1 では, 実際に Solovay のモデルにおいては Cantor と Bendixson の定理が実数のすべての集合にまで拡張されることが示され, 定理 2 においては, たとえ選択公理を積極的に認めたとしても, 完全集合定理の反例を具体的・明示的に定義することは望めないということが示されています.

2 強制法にかんする補足的な諸結果

第 4 節で用いられる諸結果のうち強制法の一般論に属する内容を, ここにまとめてあります. Levy の半順序 (→定義 26) に特有の性質は第 4 節で述べます.

> これ以降この講義では, $\mathbf{V}$ と書いたらつねに "すべての集合のクラス" を意味します. いっぽう, そのつど必要なだけの集合論の公理をみたすなんらかの推移的可算モデルを M であらわします.

2.1 強制法の基本語彙

強制法の基礎については, 原則として加茂先生と渕野先生の講義によりますが, 念のためにここで基本的な約束事を復習します.

このノートで半順序といったら, 構造 $(P, \leq, \mathbb{1})$ で, $\leq$ は P 上の反射的で推移的な二項関係 (擬順序関係) であり, $\mathbb{1}$ は 関係 $\leq$ の意味での最大要素になっているものとします. 二項関係 $\leq$ が反対称であるとは仮定しません. したがって, $\mathbb{1}$ 以外の最大要素が存在するかもしれません. この構造を P と略記してしまうことがしばしばある一方, 必要とあれば, $\leq_P$ とか $\mathbb{1}_P$ のように, どの半順序について考えているかを明記することもあります.

半順序の要素 p と q について $p \leq q$ であるとき, p は q を**拡大する** (p extends q), p は q **より強い** (p is stronger than q), といいます. 小さいほうが強いというのは変な気がしますが, 強制法が, 出発点としての基礎モデル (ground model) に存在しない対象を基礎モデル内で記述可能な条件で近似していくという発想に基

[*10] ここでは, 完全集合全体の族を整列させるために選択公理が本質的に使用されています.

づくことからすると, 条件を強めることが対象の範囲を絞り込むことになるわけで, 小さいほうが強いのは自然なことだといえます. p を拡大する要素全体の集合を $[\boldsymbol{p}]$ と書きます. すなわち

$$[p] = \{\, q \in P \,:\, q \leq p \,\}.$$

半順序 P の二つの要素 p と q は, $r \leq p$, $r \leq q$ をみたす要素 r が存在するとき (共通の拡大を持つとき) に**両立可能** (compatible) であるといい, そうでないとき**両立不可能** (incompatible) であるといいます. これらを記号で

$$p \top q \iff \exists r \in P[\, r \leq p \wedge r \leq q \,] \quad (\text{両立可能})$$
$$p \perp q \iff \neg\, [\, p \top q \,] \iff \forall r\, [\, r \leq p \implies r \not\leq q \,] \quad (\text{両立不可能})$$

とあらわします.

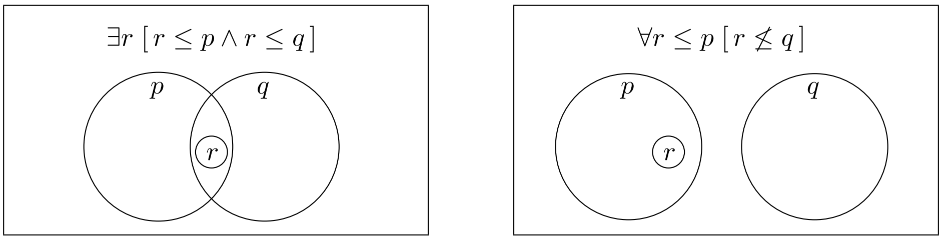

図 1　両立可能 vs 両立不可能

半順序 P の部分集合 D が P の**稠密** (dense) 部分集合であるとは, P のすべての要素 q が D に属する拡大をもつことをいいます. P の稠密部分集合全体の集合を $\mathbf{den}(\boldsymbol{P})$ と書きます.

半順序 P の部分集合 D が稠密であり, 同時に下向きに閉じている ($\forall p \in D\, [p] \subseteq D$) とき, D を**稠密開集合** (dense open set) と呼びます. P の稠密開集合全体の集合を $\mathbf{denop}(\boldsymbol{P})$ と書きます.

半順序 P の部分集合 D が P の**前稠密** (predense) 部分集合であるとは, P のすべての要素 q に対して, それと両立可能な D の要素が存在することをいいいます.

半順序 P の部分集合 A が**反鎖** (antichain) であるとは, A のどの二つの要素も互いに両立不可能であるときにいいます. 包含関係の意味で極大な反鎖は**単位の分割** (partition of unity) あるいは単に**パーティション**と呼ばれます. これは前稠密な反鎖といっても同じことです. P のパーティション全体の集合を $\mathbf{part}(\boldsymbol{P})$ と書きます.

半順序 P の**フィルター** (filter) とは, P の部分集合 F で, (1) $\mathbb{1}_P \in F$, (2) $p \in F$ かつ $p \leq q$ なら $q \in F$, (3) $p, q \in F$ ならば, $r \in F$, $r \leq p$, $r \leq q$ をみたす r が存在する, という三つの条件をみたすもののことです. P のフィルター全体の集合を $\mathbf{filt}(\boldsymbol{P})$ と書きます. フィルターの要素がすべて互いに両立可能であるという点は重要です.

半順序 P の部分集合 G が M 上 P-**ジェネリック** (generic) であるというのは, まず G はフィルターであり, さらに P の部分集合のうち, M に属し稠密であるものすべてと G が交わるときにいいます. これは M に属するすべての前稠密集合と交わることといっても同じことになりますし, M が **AC** のモデルである場合には, M に属するすべてのパーティションと交わること, といっても同じことになります.

半順序 P に対して, P-**名前** (P-name) のクラスを次の再帰的定義で定めます. 集合 a が P-名前であるのは, a のすべての要素が P-名前 c と P の要素 p の組 $\langle c, p \rangle$ の形になっていることをいいます. この定義を超

限再帰によって書き直すと,

$$\mathbf{V}_\alpha = \mathcal{P}(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{V}^P_\alpha \times P)$$

によって再帰的に定義される $\langle \mathbf{V}^P_\alpha : \alpha \in \mathbf{ON} \rangle$ の和 $\mathbf{V}^P = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}} \mathbf{V}^P_\alpha$ が, P-名前の全体のクラスです. 超限再帰の絶対性によって, P-名前のクラスは, P をメンバーとして含むようなすべての集合論の推移的モデルに対して絶対的となります. すなわち, M が集合論の推移的モデルで $P \in M$ だとすると, $(\mathbf{V}^P)^M = M \cap \mathbf{V}^P$ となります. このクラスのことを M^P と表記します.

チェック演算 $\check{}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}^P$ を再帰的に $\check{x} = \{\, \langle \check{y}, \mathbb{1}_P \rangle : y \in x \,\}$ で定めます. チェック演算は, 基礎モデルにあらかじめ存在する各要素をあらわす P-名前として用いられます. この演算は絶対的であり, $P \in M$ で M が集合論の推移的モデルであれば, M のすべての要素 x に対する $\check{x}$ は M に属し, しかも M における対応物 $(\check{x})^M$ と一致します.

たとえば $\langle\langle x, y\rangle, z\rangle$ にチェック演算をほどこすといったように, $\check{}$ 記号が使いにくい場合には, 関数記号 chk を用いて $\mathrm{chk}(\langle\langle x, y\rangle, z\rangle)$ というぐあいに書くことにします.

ジェネリック集合 G が与えられたとき, 各 P 名前 a の G**-解釈** (G-interpretation) a_G を再帰的に

$$a_G = \{\, b_G : \exists p \in G\,[\, \langle b, p\rangle \in a \,]\,\}$$

によって定めます. この定義も絶対的です.

集合論の推移的モデル M と M に属する半順序 P が与えられたとき, M 上の P-ジェネリック集合 G による M の**ジェネリック拡大** (generic extension) $M[G]$ を, M に属する P-名前の G-解釈の全体のことと定義します.

$$M[G] = \{\, a_G : a \in M^P \,\}.$$

補題 6. M を **ZFC** 集合論の推移的可算モデル, P を M に属する半順序, p を P の任意の要素とするとき, M 上 P-ジェネリックな集合 G で $p \in G$ をみたすものが存在する. □

補題 7. M が **ZF** 集合論の推移的可算モデル, P が M に属する半順序, G が M 上 P-ジェネリックな集合だとする. そのとき,

(1) $M[G]$ もまた **ZF** 集合論の推移的可算モデルである.
(2) $M \subseteq M[G]$ である.
(3) $G \in M[G]$ である.
(4) $M[G]$ は上記 (1)–(3) をみたす集合のうち最小のものと特徴づけられる.
(5) 順序数のクラスは不変である: $\mathbf{ON}^M = \mathbf{ON}^{M[G]}$.
(6) M が選択公理 **AC** をみたすなら $M[G]$ も **AC** をみたす. □

つまらない例外的な場合を除いて, M 上 P-ジェネリックな集合が M の要素になることはないので, $M[G]$ で “何が起こっているか” を, M に居ながらにして知り尽くすことは不可能です. しかしながら, G にかんする部分的な情報がもたらされたときに, その情報をもとに, $M[G]$ で成立するであろうこと (の一部) を言い当てることは, M の住人にも可能です.

いま $\in$-論理式 $\varphi(\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$ と M^P の要素 $a_1, \ldots, a_n$ が与えられたとしましょう. P の要素 p について, $G \ni p$ という部分的な情報から, $M[G]$ において $\varphi(a_{1G}, \ldots, a_{nG})$ が成立することを確実に予言できるなら

ば, そのときに, p は $\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ を**強制する** (to force) ということにします. 強制関係を $\Vdash_P^M$ と書くことにすると, これは

$$p \Vdash_P^M \varphi(a_1,\ldots,a_n) \iff (\forall G)\bigl[\,G \ni p \implies (\varphi(a_{1G},\ldots,a_{nG}))^{M[G]}\,\bigr] \tag{ft}$$

ということになります. ここで G は M 上の P-ジェネリック集合の全体を動くものとします. $\Vdash$ に対する添字 M や P が文脈から明らかな場合は, 省略することもあります. この式 (ft) を**強制定理** (Forcing Theorem) と呼びます. ここでは式 (ft) を強制関係 $\Vdash_P^M$ の定義と思ってもらってかまいません.

驚いたことに, この強制関係 $\Vdash_P^M$ は M において定義可能になります.

補題 8. (**定義可能性補題**, Definability Lemma) すべての $\in$-論理式 $\varphi(\mathtt{v}_1,\ldots,\mathtt{v}_n)$ を次のような $\in$-論理式 $\mathtt{F}_\varphi(\mathtt{P},\mathtt{p},\mathtt{v}_1,\ldots,\mathtt{v}_n)$ に変換する明示的な手続き $\varphi \mapsto \mathtt{F}_\varphi$ が存在する: M を集合論の任意の推移的可算モデル, P を M に属する任意の半順序とするとき,

$$(\forall a_1,\ldots,a_n \in M^P)(\forall p \in P)\bigl[\,(\mathtt{F}_\varphi(P,p,a_1,\ldots,a_n))^M \iff p \Vdash_P^M \varphi(a_1,\ldots,a_n)\,\bigr].$$

しかも, この変換手続き自体は記号列としての $\in$-論理式に対する機械的な手続きであり, モデル M にも半順序 P にも依存しない. $\square$

証明は [7] あるいは [10] を見てください. 今後は, 強制関係をこの対応関係 $\varphi \mapsto \mathtt{F}_\varphi$ によって定義されたものと考えることにして, $p \Vdash_P^M \varphi$ と書かず $(p \Vdash_P \varphi)^M$ と書くことにします. そうすれば, モデルに相対化されない $p \Vdash_P \varphi$ (すなわち $\mathtt{F}_\varphi$ そのもの) を考えることができ, 集合論の宇宙 $\mathbf{V}$ における強制関係について語ることが可能になります. もちろん, このことは $\mathbf{V}$ が可算であるとか, $\mathbf{V}$ の外に $\mathbf{V}$ 上 P-ジェネリックな集合が存在するといったことを決して意味しませんが, アタカモ そうであるかのように議論できるという点は重要です.

次の補題に, 強制関係 $\Vdash$ の基本的な性質をまとめてあります. これについても, 詳しくは [7] あるいは [10] を見てください.

補題 9.

(i) 式 φ が論理的な恒真式であれば $\mathbb{1} \Vdash \varphi$.
(ii) $p \Vdash \varphi$ かつ $q \le p$ ならば $q \Vdash \varphi$.
(iii) $p \Vdash \varphi$ は $\forall q \le p \exists r \le q\; r \Vdash_P \varphi$ と同値.
(iv) $p \Vdash \neg\varphi$ は $\forall q \le p\, q \not\Vdash \varphi$ と同値.
(v) $p \Vdash \varphi \wedge \psi$ は $p \Vdash \varphi$ かつ $p \Vdash \psi$ と同値.
(vi) $p \Vdash \exists x \varphi(x)$ は $\forall q \le p\, \exists a \in \mathbf{V}^P \exists r \le q\; r \Vdash \varphi(a)$ と同値.
(vii) (**極大原理**, Maximal Principle) **AC** のもとで, $p \Vdash \exists x\varphi(x)$ のとき $\exists a \in \mathbf{V}^P\; p \Vdash \varphi(a)$. $\square$

条項 (vi) と (vii) の違いですが, 各 r ごとに $r \Vdash \varphi(a)$ をみたす P-名前 a がとれても, それを一つの P-名前にまとめあげるためには, r を a に対応させる手続き (=関数) が必要になります. 考えているモデルが選択公理 **AC** をみたしていれば, そのような関数は公理により存在するといえますが, **AC** のないモデルでは自前で関数を調達する必要があるので, 極大原理は一般には成立しません.

2.2 半順序の同等性

定義 8. 二つの半順序 P と Q が (ジェネリック拡大の意味で) **同等**とは, 両者の完備化がブール代数として同型であることである: $\mathrm{ro}(P) \simeq \mathrm{ro}(Q)$. このことを $P \sim Q$ と表記する. □

半順序の完備化については加茂先生の講義ノート, とくにその第 6 節 (ブール値模型 対 強制拡大) を参照してください. 定義そのものより, $\sim$ が同値関係であることと, P が Q のある稠密部分集合と同型である場合には $P \sim Q$ であること, この 2 つのことを覚えておけば応用上は十分です. とくに $P \sim \mathrm{ro}(P)$ であり, また, $P \simeq Q$ ならば $P \sim Q$ です. $P \sim Q$ のとき, P-名前の空間 $\mathbf{V}^P$ と Q-名前の空間 $\mathbf{V}^Q$ の間を交互に行き来する書き換えの規則が存在し, P-ジェネリック集合と Q-ジェネリック集合の間に自然な一対一対応がついて, 対応するジェネリック集合による拡大は一致します. (→補題 22)

2.3 分離的半順序と正則開集合

このサブセクションは, サブセクション 2.2 や 2.6 との間を行ったり来たりしながら読まないといけないかもしれません.

補題 10. 半順序 P について次の三つの条件は同値である

(1) $\forall p, q \in P \left(\, p \leq q \iff [p] \cap [q]\right.$ が $[p]$ の稠密部分集合 $\left.\right)$.
(2) $\forall p, q \in P \left(\, p \not\leq q \implies \exists r \leq p \,(\, r \perp q \,)\, \right)$.
(3) $\forall p, q \in P \left(\, p \leq q \iff p \Vdash \check{q} \in \dot{G} \,\right)$. □

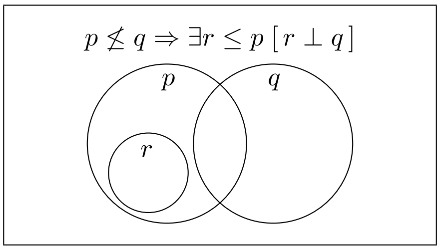

図 2 分離的半順序

定義 9. 補題 10 の同値な条件をみたす半順序は**分離的** (separative) であるといわれる. □

必ずしも分離的でない任意の半順序 $(P, \leq, \mathbb{1})$ に対して, P 上に二項関係 $\leq^*$ を

$$p \leq^* q \iff \forall r \leq p\, [\, r \text{ と } q \text{ は両立可能} \,]$$

によって定義したとします. このとき,

$$p \leq q \implies p \leq^* q$$
$$p \leq^* q \leq^* r \implies p \leq^* r$$

となるので, $(P, \leq^*, \mathbb{1})$ もひとつの半順序となります. この半順序は分離的ですが, 一般に $\leq^*$ は反対称律をみたしません. そこで

$$p \equiv^* q \iff p \leq^* q \leq^* p$$

によって, P 上に同値関係 $\equiv^*$ を定義すると, 商集合の作る構造 $(P/{\equiv^*}, \leq^*, \mathbb{1}/{\equiv^*})$ は反対称律をみたす分離的な半順序であり, 類別写像 $P \to P/{\equiv^*}$ は稠密埋め込み写像 (→定義 14) です. したがって, ジェネリック拡大との関係でいえば分離的半順序だけを考えることにしても一般性を損なわないのですが, 順序づけの自然な定義が分離的でない半順序もたくさんあります. たとえば, あとで論じるコーエン半順序 (→定義 17) と同等な (→定義 8) 半順序として, 数直線 $\boldsymbol{R}$ のすべての空でない開部分集合が包含関係のもとでなす半順序集合がありますが, これは分離的ではなく, この半順序について上記の方法で分離的な商集合を作った場合, 各同値類の代表元として**正則開集合** (regular open set) すなわち, $A = \mathrm{Int}\ \mathrm{Cl}\ A$ を満たす集合をとることができ, 結果としてコーエン半順序は完備ブール代数 $\mathrm{ro}(\boldsymbol{R})$ から零元をとり除いてできる半順序と同等になります.

正則開集合の概念は半順序についても定義することができます. 以下に述べる定義は, 半順序 $(P, \leq)$ に, 内部演算子

$$\mathrm{Int}(A) = \{\, p \in P \ :\ [p] \subset A \,\}$$

によって位相を導入したさいに, 上の段落で述べた意味で正則開集合になるというのと同値です.

定義 10. 半順序 P の部分集合 A が**正則開集合**であるとは,

$$\forall p \in P \left(\, p \in A \iff \forall q \leq p \exists r \leq q \,(r \in A)\,\right)$$

となることを意味する. P の正則開集合全体の集合を $\mathbf{ro}(\boldsymbol{P})$ と書く. □

このとき, $\mathrm{ro}(P)$ は包含関係を順序づけとして完備ブール代数になり, P の要素 p を $\mathrm{Int}\ \mathrm{Cl}\,[p]$ に対応させることで, P の $\mathrm{ro}(P)$ への完備埋め込み写像が定義できます.

補題 11. 以下の二つの条件は, いずれも P が分離的であるための必要十分条件である. ただし (5) には P の順序づけが反対称律を満たすことが必要.

(4) P のすべての要素 p について $[p]$ は正則開集合.
(5) 上の段落で述べた P の $\mathrm{ro}(P)$ への完備埋め込み写像が単射である. □

2.4 半順序の積

ここでは, 積半順序によるジェネリック拡大について, あとで必要になる範囲で述べます.

定義 11. (1) 二つの半順序 P と Q の集合としての直積 $P \times Q$ に

$$\langle p, q \rangle \leq_{P \times Q} \langle p', q' \rangle \iff p \leq_P p' \wedge q \leq_Q q'$$

という順序づけを与えたものを, P と Q の**積**(product) **半順序**とよぶ.

(2) $P \times Q$ の部分集合 G に対して,

$$(G)_0 = \{\, p \in P : \exists q \in Q\,[\,\langle p, q \rangle \in G\,]\,\}$$
$$(G)_1 = \{\, q \in Q : \exists p \in P\,[\,\langle p, q \rangle \in G\,]\,\}$$

と定める. □

P と Q がそれぞれ最大要素 $\mathbb{1}_P$ と $\mathbb{1}_Q$ をもつならば, $\langle \mathbb{1}_P, \mathbb{1}_Q \rangle$ が積半順序 $P \times Q$ の最大要素になります. あきらかに $G \subseteq (G)_0 \times (G)_1$ ですが, G がフィルターである場合は等号が成立します.

補題 12. (1) G を $P \times Q$ のフィルターとすると, $(G)_0$ は P のフィルター, $(G)_1$ は Q のフィルターで, $G = (G)_0 \times (G)_1$ が成立する. (2) G_0 を P のフィルター, G_1 を Q のフィルターとすると, $G_0 \times G_1$ は $P \times Q$ のフィルターである. □

補題 13. (1) G が M 上 $P \times Q$-ジェネリックであれば, $(G)_0$ は $M[(G)_1]$ 上の P-ジェネリック集合, $(G)_1$ は $M[(G)_0]$ 上の Q-ジェネリック集合である; (2) G_0 が M 上 P-ジェネリック, G_1 が $M[G_0]$ 上 Q ジェネリックであれば, $G_0 \times G_1$ は M 上の $P \times Q$-ジェネリック集合である; (3) 同じ状況のもとで, $M[G_0][G_1] = M[G_0 \times G_1]$ が成立する.

[証明] (1) $(G)_0$ が $M[(G)_1]$ 上の P-ジェネリック集合になることを証明する. $(G)_1$ が $M[(G)_0]$ 上 Q-ジェネリックであることの証明もまったく同様である. まず $(G)_0$ が P のフィルターであることはすでに補題 12 に述べたとおりである. D を $M[(G)_1]$ に属する P の稠密部分集合だとする. D の Q-名前 $\dot{D}$ で $\dot{D} \in M$ かつ

$$(\mathbb{1}_Q \Vdash_Q \dot{D} \text{ は } \check{P} \text{ の稠密部分集合})^M \tag{$*$}$$

となるものを考える. このとき

$$p \in D \iff \exists q \in (G)_1[\ (q \Vdash_Q \check{p} \in \dot{D})^M\ ]$$

である. $E = \{\, \langle p, q \rangle \in P \times Q : (q \Vdash_Q \check{p} \in \dot{D})^M \,\}$ とおこう. $E \in M$ である. p_0 と q_0 をそれぞれ P と Q の任意の要素としよう. 仮定 $(*)$ により,

$$q_0 \Vdash_Q \exists p \leq \check{p}_0[\, p \in \dot{D}]$$

であるから, P から p_1, Q から q_1 をそれぞれうまく選ぶと, $p_1 \leq p_0$, $q_1 \leq q_0$ かつ $q_1 \Vdash_Q \check{p}_1 \in \dot{D}$ が成立する. このとき $\langle p_1, q_1 \rangle \in E$ かつ $\langle p_1, q_1 \rangle \leq_{P \times Q} \langle p_0, q_0 \rangle$ である. したがって, E は $P \times Q$ の稠密部分集合である. $G \cap E$ から要素 $\langle p, q \rangle$ をとろう. すると, $p \in (G)_0$, $q \in (G)_1$ かつ $q \Vdash_Q \check{p} \in \dot{D}$ だから, $p \in \dot{D}_{(G)_1} = D$ となり, $(G)_0 \cap D \neq \emptyset$ である. D は $M[(G)_1]$ に属する P の任意の稠密部分集合であったから, $(G)_0$ は $M[(G)_1]$ 上 P-ジェネリックである.

(2) D を M に属する $P \times Q$ の稠密部分集合だとする. $D_1 = \{\, q \in Q : \exists p \in G_0\, [\, \langle p, q \rangle \in D\,]\,\}$ とおく. $D_1 \in M[G_0]$ である. q_0 を Q の任意の要素として, $D_0 = \{\, p \in P : \exists q \leq_Q q_0[\, \langle p, q \rangle \in D\,]\,\}$ とおこう. D_0 は M に属する P の稠密部分集合である. G_0 は M 上 P-ジェネリックだから, $G_0 \cap D_0$ の要素 p_1 がとれるが, D_0 の定義から, このときある q_1 が存在して $q_1 \leq q_0$ かつ $\langle p_1, q_1 \rangle \in D$ となる. そこで D_1 の定義から $q_1 \in D_1$ である. q_0 は Q の任意の要素だから D_1 は Q の稠密部分集合である. G_1 が $M[G_0]$ 上 Q-ジェネリックであるので, $G_1 \cap D_1$ の要素 q_2 がとれる. ふたたび D_1 の定義から G_0 の要素 p_2 が存在して $\langle p_2, q_2 \rangle \in D$ である. したがって, $G_0 \times G_1 \cap D \neq \emptyset$ となっている. また, 補題 12 より, $G_0 \times G_1$ は $P \times Q$ のフィルターである. したがって, $G_0 \times G_1$ は M 上 $P \times Q$-ジェネリックである.

(3) $M[G_0][G_1]$ の $M[G_0]$ の拡大モデルとしての最小条件と, $M[G_0 \times G_1]$ の M の拡大モデルとしての最小条件からすぐにわかる (補題 7 を参照). □

このように, 半順序の積によるジェネリック拡大は, ジェネリック拡大の繰り返しに対応しているわけです. ここまでの結果は, サブセクション 2.6 の結果の特別な場合であり, 典型的な例になっています. いっぽう, 次の結果は積半順序に特有のものといえます.

補題 14. 集合論の推移的モデル M に属する半順序 P と Q を考える. $G \times H$ が M 上の $P \times Q$-ジェネリック集合であるとき,

$$M[G] \cap M[H] = M$$

が成立する.

[証明] $M[G] \cap M[H] \supseteq M$ はあきらかである. 逆向きの包含を考えよう, $A \in (M[G] \cap M[H]) \setminus M$ をみたす A があったとして, そのようなもののうち, $\in$-階数が最小であるものを考えれば, $A \subset M$ である. A の P-名前 a と Q-名前 b を考える. $a_G = A = b_H$ なので, $G \times H$ のある要素 $\langle p_0, q_0 \rangle$ について, $\langle p_0, q_0 \rangle \Vdash_{P \times Q} a_{(\dot{G})_0} = b_{(\dot{G})_1}$ となる. M の任意の要素 x について, $p_0 \Vdash_P \check{x} \in a$ か $p_0 \Vdash_P \check{x} \notin a$ となることを示そう.

仮にこれが成立していなかったとすると, M のある集合 x について, p_0 の拡大 p_1 と p_2 をうまくとれば, $p_1 \Vdash_P \check{x} \in a$ かつ $p_2 \Vdash_P \check{x} \notin a$ が成立する. G_1 と G_2 を, それぞれ p_1 と p_2 を含む $M[H]$ 上の P-ジェネリック集合としよう. すると, 補題 13 により, $G_1 \times H$ も $G_2 \times H$ も, M 上の $P \times H$-ジェネリック集合であり, 要素 $\langle p_0, q_0 \rangle$ を含む. いま, $\langle p_0, q_0 \rangle \Vdash_{P \times Q} a_{(\dot{G})_0} = b_{(\dot{G})_1}$ であったから, $a_{G_1} = b_H$, $a_{G_2} = b_H$ したがって $a_{G_1} = a_{G_2}$ のはずだが, p_1 と p_2 の選び方から, $x \in a_{G_1}$, $x \notin a_{G_2}$ となって, 矛盾が生じる.

したがって, p_0 は M の任意の要素 x について, $\check{x} \in a$ か $\check{x} \notin a$ のどちらかを強制している. したがって, いま A の $\in$-階数を α として,

$$A = \left\{ x \in \mathbf{V}^M_\alpha \ : \ (p_0 \Vdash_P \check{x} \in a)^M \right\}$$

であるから $A \in M$ となる. □

2.5 半順序の自己同型が引き起こす名前の置換, 弱一様性

半順序 P の順序自己同型写像 $h : P \simeq P$ が与えられると, P-名前の置換 $h^* : \mathbf{V}^P \to \mathbf{V}^P$ を定義することができます. 置換 h^* は, P-名前のクラスを定義する超限再帰の式

$$\mathbf{V}^P_\alpha = \mathcal{P}(\bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{V}^P_\beta \times P)$$

に沿う形で, $\in$-再帰によって

$$h^*(a) = \{ \langle h^*(t), h(p) \rangle : \langle t, p \rangle \in a \}$$

と定義されます.

ブール代数値モデルの文脈では, 完備ブール代数の自己同型写像 $h : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ から, $\mathcal{B}$-値構造の置換 $h^* : \mathbf{V}^{\mathcal{B}} \to \mathbf{V}^{\mathcal{B}}$ を

$$\mathrm{dom}(h^*(u)) = h^* \text{``} \mathrm{dom}(u)$$
$$h^*(u)(v) = h(\ u(\ (h^*)^{-1}(v)\ )\ )$$

によって再帰的に定義する, ということになります.

どちらの文脈でも, h^* のことを, **自己同型写像 h によって引き起こされる置換**と呼ぶことにします. このとき, 次のことが成立します.

補題 15. P を半順序, $h : P \simeq P$ を自己順序同型写像とする．h によって引き起こされる P-名前の置換 h^* について次のことが成立する．

(1) h^* は $\mathbf{V}^P$ からそれ自身の上への 1 対 1 写像である．

(2) すべての集合 x について $h^*(\check{x}) = \check{x}$ である．

(3) 任意の $\in$-式 $\varphi(\mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_n)$ と任意の P-名前 $a_1, \ldots, a_n$ に対して,

$$\forall p \in P \left[p \Vdash \varphi(a_1, \ldots, a_n) \iff h(p) \Vdash \varphi(h^*(a_1), \ldots, h^*(a_n)) \right]$$

が成立する．

(4) 任意の $\in$-式 $\varphi(\mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_n)$ と任意の集合 $x_1, \ldots, x_n$ について

$$\forall p \in P \left[p \Vdash \varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n) \iff h(p) \Vdash \varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n) \right]$$

が成立する．$\square$

この補題 15 は, $\mathbf{V}^P$ やチェック作用素や強制関係 $\Vdash$ の再帰的定義に沿った帰納法によって容易に証明できます．詳細はここでは省きます．条項 (3) をブール代数値モデルの言葉で書けば

$$[\![\, \varphi(h^*(a_1), \ldots, h^*(a_n)) \,]\!] = h\big([\![\, \varphi(a_1, \ldots, a_n) \,]\!] \big)$$

となります．この文脈では, 条項 (4) は, ブール値 $[\![\, \varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n) \,]\!]$ は $\mathcal{B}$ の任意の完備自己同型写像のもとで不変である, と表現できます．

定義 12. 半順序 P が**弱一様である** (almost homogeneous) あるいは弱一様性を持つ とは, P の任意の 2 要素 p と q に対して P の順序自己同型 $h : P \simeq P$ が存在して, $h(p)$ と q が P において両立可能となることである．$\square$

弱一様性の重要な帰結が, 次の対称性補題です．

補題 16. (対称性) P を弱一様性をもつ半順序とする．$\in$-論理式 $\varphi(\mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_n)$ は, $\mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_n$ 以外には自由変数を持たないものとする．$x_1,\ldots,x_n$ 任意の集合とし, P のある要素 p について $p \Vdash \varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$ が成立していたとすると, 実は $\mathbb{1}_P \Vdash_P \varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$ である．

[証明] 背理法で証明する．もしも $\mathbb{1}_P$ が $\varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$ を強制しないとすれば, P のなんらかの要素 q について, $q \Vdash \neg\varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$ が成立する．P が弱一様であるとの仮定から, この 2 要素 p と q に対して順序自己同型写像 $h : P \simeq P$ が存在して $h(p)$ と q が両立可能となる．自己同型 h は P-名前のクラスの置換 $h^* : \mathbf{V}^P \to \mathbf{V}^P$ を引き起こす．そのとき, $p \Vdash \varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$ という仮定と補題 15 の (4) により, $h(p) \Vdash \varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$ が成立する．いっぽう, $q \Vdash \neg\varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$ である．これは $h(p)$ と q が両立可能であるという仮定と矛盾する．$\square$

2.6 半順序の完備埋め込み

定義 13. 半順序 P から半順序 Q への写像 $i : P \to Q$ が**完備埋め込み写像** (complete embedding) であるとは,

(i) $\forall p_0, p_1 \in P\,[\, p_0 \le_P p_1 \implies i(p_0) \le_Q i(p_1)\,]$,
(ii) $\forall p_0, p_1 \in P\,[\, p_0$ と p_1 が P で両立可能 $\iff i(p_0)$ と $i(p_1)$ が Q で両立可能 $]$,
(iii) $\forall q \in Q\, \exists \bar{q} \in P\, \forall p \le \bar{q}\,[\, i(p)$ と q は Q で両立可能 $]$

という条件をみたす場合にいう. (この $\bar{q}$ は P における q の縮約 (reduction) とよばれる) □

定義 14. 半順序 P から半順序 Q への写像 $i : P \to Q$ が**稠密埋め込み写像** (dense embedding) であるとは, まずそれが完備埋め込み写像であり, かつ i“P が Q において稠密である場合にいう. □

定義 15. 半順序 P が半順序 Q の部分集合で, $\le_P = \le_Q \restriction P$ であり, 包含写像 (恒等写像) $\mathrm{id} : P \to Q$ が完備埋め込み写像であるとき, P は Q に**完備包含**される, あるいは P は Q の**完備部分半順序**であるといい $P \subseteq_c Q$ と書く. □

補題 17. P が分離的半順序で, $i : P \to Q$ が完備埋め込みであれば, i は単射であり, $i(p_0) \le_Q i(p_1) \iff p_0 \le_P p_1$ が成立する. したがって, i“P は P と同型な Q の完備部分半順序となる. □

完備埋め込み写像の例として, 積半順序への因子の埋め込みがあります. これが第 4 章で重要な役割を果たします.

補題 18. 二つの半順序 P と Q のそれぞれから $P \times Q$ への写像 $p \mapsto \langle p, \mathbb{1}_Q \rangle$ と $q \mapsto \langle \mathbb{1}_P, q \rangle$ は, いずれも完備埋め込み写像である.

[証明] 完備埋め込み写像の条件のうち (i) と (ii) は明らか. (iii) については, $P \times Q$ の要素 $\langle p, q \rangle$ の P (あるいは Q) における縮約として p (あるいは q) を考えるとよい. □

完備埋め込み写像を考える理由は, それによって複数のジェネリック拡大モデルのあいだの関係を考えられる点にあります.

補題 19. P と Q をモデル M に属する半順序, $i : P \to Q$ を M に属する完備埋め込み写像とする. H を M 上の Q-ジェネリック集合とするとき, 逆像 (i^{-1})“H は M 上の P-ジェネリック集合である. したがって, Q による M のジェネリック拡大は必ず P による M のジェネリック拡大を含む: $M[(i^{-1})\text{“}H] \subseteq M[H]$. □

逆に P によるジェネリック拡大をさらに拡大して Q によるジェネリック拡大を得ることも可能です. 次に, そのことを示す議論を, [10] の第 VII 章の演習問題 (D3)〜(D5) から引用します.

定義 16. P と Q をモデル M に属する半順序とし, $i : P \to Q$ を M に属する完備埋め込み写像とする. G を M 上の P-ジェネリック集合とする. この状況の下で, $M[G]$ において,

$$Q/G = \left\{\, q \in Q \;:\; \forall p \in G\,[\, i(p) \text{ と } q \text{ は両立可能 }]\,\right\}$$

と定義する. □

定義 16 のねらいは, 次の補題にあります. 補題 19 と次の補題 20 によれば, $P \subseteq_c Q$ のとき, M の Q によるジェネリック拡大はすべて P によるジェネリック拡大のさらなるジェネリック拡大として得られることがわかります.

補題 20. (1) 定義 16 の記号のもとで, H を $M[G]$ 上の Q/G-ジェネリック集合とすると, H は M 上の Q-ジェネリック集合であって $G = (i^{-1})``H$ となる.

(2) 逆に, H を M 上の Q-ジェネリック集合として, $G = (i^{-1})``H$ とおき, Q/G を定義 16 のとおりに定めると, H は $M[G]$ 上の Q/G-ジェネリック集合である.

(3) 上記 (1) と (2) のいずれの場合にも, $M[G]$ の H による Q/G-ジェネリック拡大 $M[G][H]_{Q/G}$ は M の H による Q-ジェネリック拡大 $M[H]_Q$ と一致する.

[証明] まず, 次のことに注意しよう: 定義 16 からすぐにわかるとおり, 完備埋め込み写像 i にかんして p が q の縮約になるためには, $p \Vdash (\check{q} \in \check{Q}/\dot{G})$ となることが必要かつ十分である. また, P の要素 p について, $i(p) \in Q/G$ は $p \in G$ と同値である.

(1) H が $M[G]$ 上 Q/G-ジェネリックだったとする. 示したいことは, まず H が M 上 Q-ジェネリックであることだ. Q/G は Q のなかで上向きに閉じているので, ジェネリックの条件のうちフィルターであることは明らか. 任意の $D \in \mathrm{den}(Q) \cap M$ が与えられたとしよう. このとき $D \cap (Q/G) \in \mathrm{den}(Q/G)$ となっている.
【そのことの証明: Q/G から任意の要素 q_0 をとり, G の要素 p_0 を $p_0 \Vdash (\check{q_0} \in \check{Q}/\dot{G})$ となるようにとる. このとき p_0 は i にかんする q_0 の縮約になっている. $i(p_0)$ と q_0 の Q での共通の拡大 q_1 を D からとれる. i にかんするその縮約 p_1 を考えよう. すると, p_1 の任意の拡大 p について, $i(p)$ と q_1 は両立可能である. $q_1 \leq i(p_0)$ なので, このとき $i(p)$ と $i(p_0)$ は両立可能. したがって, p と p_0 は P において両立可能である. つまり, p_1 の任意の拡大が p_0 と両立可能である. (P が分離的ならば, このことは $p_1 \leq p_0$ を意味する.) 以上の議論は, p_0 と p_1 をそれぞれの任意の拡大に置き換えても同様に成立するので,

$$\forall p \leq p_0 \, \exists p_1 \leq p \, \exists q_1 \in D \, [\, q_1 \leq q_0 \wedge p_1 \Vdash \check{q_1} \in \check{Q}/\dot{G} \,]$$

が成立する. $p_0 \in G$ であったから, 上式のような p_1 を G の要素としてとれることになる. 対応する q_1 は, $q_1 \in D$ $q_1 \leq q_0$ と $q_1 \in Q/G$ をみたす. よって, Q/G の任意の要素 q_0 は $D \cap (Q/G)$ の要素 q_1 に拡大できる. いいかえれば, $D \cap (Q/G)$ は Q/G の稠密部分集合である.】

さて, H は $M[G]$ 上 Q/G-ジェネリックだったから, $H \cap D \neq \emptyset$ である. D は $\mathrm{den}(Q) \cap M$ の任意の要素であったから, H は M 上 Q-ジェネリックである.

すでに指摘したとおり, $G = (i^{-1})``(Q/G)$ であるから, $(i^{-1})``K \subseteq G$ はあきらか. 逆向きの包含を示すために, G の任意の要素 p_0 を考えると, Q/G の要素はすべて $i(p_0)$ と両立可能である. これはつまり, 単元集合 $\{i(p_0)\}$ がそれだけで Q/G の前稠密部分集合をなすことを意味する. K がジェネリックであることから $i(p_0) \in K$ となり, $p_0 \in (i^{-1})``K$ となる. よって, $G \subseteq (i^{-1})``K$ となって, 等号が成立する.

(2) 今度は H が M 上の Q-ジェネリック集合だったとする. $G = (i^{-1})``H$ とおけば補題 19 より G は M 上 P-ジェネリックである. $H \subset Q/G$ となることはすぐにわかるので, H が Q/G のフィルターであることはよい. $D \in \mathrm{den}(Q/G) \cap M[G]$ としよう. $\dot{D}$ を $D = \dot{D}_G$ をみたす P-名前として, G の要素 p_0 を $p_0 \Vdash \dot{D} \in \mathrm{den}(\check{D}/\dot{G})$ となるようにとる. Q/G における $i(p_0)$ の任意の拡大 q_1 に対して, i にかんする q_1 の縮約 p_1 を考える. $i(p_1)$ と q_1 が Q において両立可能なので, 両者を含む M 上 Q-ジェネリックな H_1 をとれる. $G_1 = (i^{-1})``H_1$ とし, $D_1 = \dot{D}_{G_1}$ としよう. すると, $p_0 \in G_1$ であるから $D_1 \in \mathrm{den}(Q/G_1)$ である. D_1 に属する q_1 の拡大 q_2 をとろう. すると G_1 に属する p_1 の拡大 p_2 を, $p_2 \Vdash \check{q_2} \in \dot{D}$ ととれる. いま $p_2 \in G_1$ かつ $q_2 \in Q/G_1$ だから, $i(p_2)$ と q_2 の共通の拡大 q が存在する. $q \leq q_2 \leq q_1$ であった, そこで,

$$\forall q_1 \leq i(p_0) \, \exists q \leq q_0 \, \exists p_2 \, \exists q_2 \left[\, q \leq i(p_2) \wedge q \leq q_2 \wedge p_2 \Vdash \check{q_2} \in \dot{D} \,\right]$$

となる．いま $i(p_0) \in H$ であったから, H が M 上 Q-ジェネリックであることにより上式のような q を H の要素としてとれる．すなわち,

$$q \in H \wedge q \leq i(p_2) \wedge q \leq q_2 \wedge p_2 \Vdash \check{q_2} \in \dot{D}$$

をみたす q, p_2, q_2 が存在する．このとき $p_2 \in G$ であるから, $q_2 \in H \cap D$ となる．こうして $H \cap D \neq \emptyset$ が示されたが, D は $\mathrm{den}(Q/G) \cap M[G]$ の任意の要素であったから, H は $M[G]$ 上 Q/G-ジェネリックである．

(3) いずれの場合にも $G = (i^{-1})``H$ だったから, $M[G][H]_{Q/G}$ と $M[H]_Q$ が等しいことは, それぞれのモデルの最小性 (→補題 7) から導かれる．□

さて, 集合論の推移的モデル M があったとき, M の要素の部分集合は必ずしも M に属するとは限りません．いま $A \subseteq x \in M$, $A \notin M$ だったとして, $N \supset M \cup \{A\}$ かつ $\mathbf{ON} \cap N = \mathbf{ON} \cap M$ をみたす集合論の推移的モデル N のうちで最小のものが存在するならば, それを $M[A]$ と書きます．A の取り方によってはそのようなものが存在しないこともありますが, A を M のジェネリック拡大の要素から選ぶかぎり, $M[A]$ は必ず存在します．

補題 21. P をモデル M に属する半順序とし, G を M 上の P-ジェネリック集合とする．α を M における順序数とし, A を $M[G]$ における α の部分集合 ($A \subseteq \alpha$, $A \in M[G]$) とする．M における P の完備化 $(\mathrm{ro}(P))^M$ を $\mathcal{B}$ として, G に対応する $\mathcal{B}$-ジェネリック集合を $\bar{G}$ と書こう．このとき, M 内に半順序 Σ と完備埋め込み写像 $i : \Sigma \to \mathcal{B}$ が存在して, $M[A] = M[(i^{-1})``\bar{G}]$ をみたす．したがって (補題 19 と補題 20 によって), $M[A]$ は M の Σ によるジェネリック拡大であり, $M[G]$ はその $M[A]$ のさらなるジェネリック拡大である．

[証明] この証明だけはブール値モデルの方法を用いた方が見通しよくできる．以下, [7] の補題 15.40 から系 15.42(p.247) の話の流れに従って概略を述べる．

(完備 $)^M$ ブール代数 $\mathcal{B} = \mathrm{ro}(P)$ において, A の $\mathcal{B}$-名前を $\dot{A}$ とし, ブール値 $[\![\check{\xi} \in \dot{A}]\!]$ $(\xi < \alpha)$ が $\mathcal{B}$ において (完備に生成する $)^M$ 部分ブール代数を $\mathcal{A}$ とすれば, 求める半順序は $\Sigma = \mathcal{A} \setminus \{\mathbf{0}\}$ であたえられ, i としては包含写像を考えればよい．このとき,

$$\xi \in A \iff [\![\check{\xi} \in \dot{A}]\!] \in \bar{G} \cap \mathcal{A}$$
$$\xi \notin A \iff -[\![\check{\xi} \in \dot{A}]\!] \in \bar{G} \cap \mathcal{A}$$

であるから, $\bar{G} \cap \Sigma$ は $\mathcal{A}$ において集合

$$\{\, [\![\check{\xi} \in \dot{A}]\!] : \xi \in A \,\} \cup \{\, -[\![\check{\xi} \in \dot{A}]\!] : \xi \notin A \,\}$$

が (生成する $)^{M[\bar{G}]}$ 超フィルターに一致する．さらに, $\bar{G} \cap \Sigma$ は M 上 $\mathcal{A}$-ジェネリックである．したがって, $M[A]$ は存在し, $M[\bar{G} \cap \Sigma]$ と一致する．□

次の補題 22 によれば, 強制法による議論で半順序を用いる場合に, 稠密な部分半順序を代わりに用いても同じジェネリック拡大が得られますし, 逆に半順序 P を完備ブール代数 $\mathrm{ro}(P)$ に完備化してから考えても, 同じ結果が得られることになります．このことが, 定義 8 の動機づけになっています．

補題 22. P と Q をモデル M に属する半順序, $i : P \to Q$ を M に属する稠密埋め込み写像とする．このとき, 補題 19 の結論において等号 $M[(i^{-1})``H] = M[H]$ が成立する．さらに, ジェネリック集合の対応 $H \mapsto (i^{-1})``H$ は逆対応

$$G \mapsto \tilde{i}(G) = \{\, q \in Q \;:\; \exists p \in G\,[\,i(p) \leq q\,]\,\}$$

をもち, $M[G] = M[\tilde{i}(G)]$ となる．結果として, P による M ジェネリック拡大と Q による M のジェネリック拡大は全体として一致する．□

最後に, この講義では用いる機会がありませんが, 補題 21 は次のように強化できます．美しく興味深い結果なのでここに引用します．証明は [7] の第 15 章 (補題 15.43, p.247) にあります．

補題 23. Q をモデル M に属する半順序とし, H を M 上の Q-ジェネリック集合とする．N を **ZFC** 集合論の推移的モデルで $M \subseteq N \subseteq M[H]$ をみたすものとする．このとき, Q の完備部分半順序 P が存在して, $N = M[P \cap H]$ をみたす．□

2.7 コーエン半順序とその特徴づけ

ここでは, ジェネリック拡大に用いることのできる半順序のうちで最も単純なものを考えましょう．

定義 17. (1) 自然数の有限集合から 集合 X への関数の全体の集合を $\mathbf{Fn}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X})$ と書く．$\mathrm{Fn}(\omega, X)$ の二つの要素 p と q を

$$p \leq q \iff p \supseteq q$$

によって順序づけする．

(2) 半順序 $\mathrm{Fn}(\omega, \omega)$ のことを**コーエン**(Cohen) **半順序**といい, $\mathbb{C}$ であらわす．□

あきらかに $\mathbb{C}$ は可算集合です．可算な半順序によるジェネリック拡大が, 本質的には $\mathbb{C}$ によるものに限ることが, 以下の補題 25 からわかります．

補題 24. 半順序 P について次の 3 つの条件は同値である:

(1) P は**自明でない**．すなわち, M を $P \in M$ を満たす任意の推移的モデルとするとき, M 上の P-ジェネリック集合はどれも, 基礎モデル M に属さない．

(2) P は**無原始的** (atomless) である．すなわち, P のどの要素も, 互いに両立不可能な二つ以上の要素に拡大できる．

(3) P のどの要素も, 互いに両立不可能な無限個の要素に拡大できる．□

[証明] (1) $\Rightarrow$ (2): 対偶を示す．P が (2) をみたさないとすると, ある要素 p_0 が存在して, p_0 を拡大する要素はすべて互いに両立可能である, という状況になっている．このとき $G = \{\, p \in P \;:\; p \top p_0 \,\}$ とおくと, G は P-ジェネリックだが, あきらかに基礎モデル内に存在する．つまり (1) が成立しない．

(2) $\Rightarrow$ (1): G が M 上 P-ジェネリック集合とする．$F \in \mathrm{filt}(P)$ とすると, 条件 (2) から, $P \setminus F$ は P の稠密部分集合となる．したがって, $\mathrm{filt}(P) \cap M$ の任意の要素 F について $G \cap (P \setminus F) \neq \emptyset$ つまり $G \not\subseteq F$ となり, したがって $G \neq F$ となる．ところが $G \in \mathrm{filt}(P)$ であることは確かなので, これは $G \notin M$ であることを意味する．

(2) ⇒ (3): P が (2) をみたす半順序だったとして, その任意の要素 p が与えられたとしよう. p の両立不可能な拡大 p_0 と q_0 を考える. 帰納的に, 両立不可能な p_n と q_n が得られたとして, q_n を両立不可能な p_{n+1} と q_{n+1} に拡大する. (→図 3)

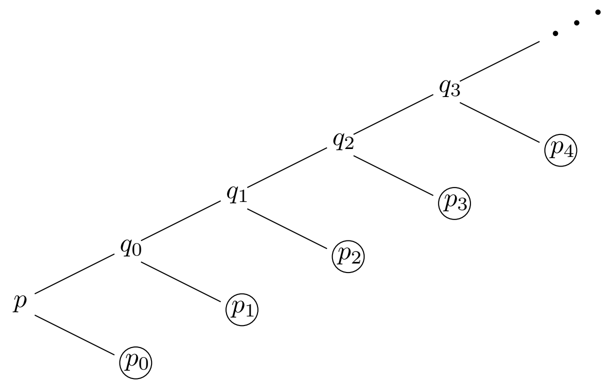

図 3　p の無限個の両立不可能な拡大

こうして得られた, $p_0, p_1, p_2, \ldots$ は, 互いに両立不可能な p の無限個の拡大である.

(3) ⇒ (2) は自明である. □

補題 25. 半順序 P を可算な無原始的半順序とすると, P はコーエン半順序 $\mathbb{C}$ とジェネリック拡大の意味で同等である.

[証明] まず, $P = \{ p_n : n \in \omega \}$ と P を数え上げる. このとき $p_0 = \mathbb{1}_P$ となるようにする.

P のパーティションの列 $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ を次のように定める. 手始めに $A_0 = \{\mathbb{1}_P\}$ とする. パーティション A_{n-1} が定められたとする. p_n と両立可能な A_{n-1} の要素 q_n が存在するので, r_n を p_n と q_n の共通拡大としてとる. A_{n-1} の各要素 q に対して, 集合 $[q] = \{ r \in P : r \leq q \}$ の無限個の要素からなる極大な反鎖 a_q を選ぶ. このときとくに $q = q_n$ のときには $r_n \in a_{q_n}$ となるように a_{q_n} をとる. そのうえで, $A_n = \bigcup_{q \in A_{n-1}} a_q$ とおく.

こうして $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ が定まったところで $Q = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ とおく. 作り方から, Q は P の稠密部分集合である.

順序同型写像 $h : Q \simeq {}^{<\omega}\omega$ を定義しよう. まず $h(\mathbb{1}_P) = \varnothing$ とする. $h \restriction A_{n-1}$ が定まったとしよう. $q \in A_{n-1}$ とすると, q は A_n の無限個の要素 (その全体が a_q だった) に拡大される. そこで, すでに定義された $h(q)$ の無限個の直後の要素の全体 $\{ h(q)^\frown i : i \in \omega \}$ と a_q とを一対一に対応させることで, $h \restriction a_q$ を定めよう. これをすべての A_n の要素 q に対して実行すれば, $h \restriction A_n$ が求められる. こうして得られる写像 $h : Q \to {}^{<\omega}\omega$ が全単射で両方向に順序を保つことは明らかである.

こうして, $\mathbb{C}$ と順序同型な P の稠密部分集合の存在が示されたので, P と $\mathbb{C}$ はジェネリック拡大の意味で同等である. □

補題 25 から次のことがただちにわかります.

補題 26. X を二つ以上の要素を持つ有限または可算の集合とするとき, 半順序 $\mathrm{Fn}(\omega, X)$ はコーエン半順序 $\mathbb{C}$ とジェネリック拡大の意味で同等である. □

実際, $\mathrm{Fn}(\omega, 2)$ のことをコーエン半順序と呼ぶ流儀もあります.

2.8 崩潰半順序とその特徴づけ

定義 18. 順序数 α に対して, $\mathrm{Fn}(\omega, \alpha)$ (→定義 17) のことを, α **を可算にする崩潰半順序** (collapsing poset) と呼び, これを $\mathrm{Coll}(\alpha)$ であらわす. □

崩潰半順序 $\mathrm{Coll}(\alpha)$ のフィルター G に対して

$$f_G = \bigcup G$$

とおくと, f_G は ω の部分集合から α への関数になります. さらに, もしも G がジェネリックであれば, f_G は ω 全体を定義域とする α の上への写像となります. したがって, $\mathrm{Coll}(\alpha)$ によるジェネリック拡大においては, α は可算順序数となるわけです.

定義 19. 順序数 α に対し, α 未満の順序数の有限列の全体 ${}^{<\omega}\alpha$ に,

$$p \leq q \iff \exists n \leq \mathrm{length}(p)[\, p \restriction n = q\,]$$

と順序づけする.

補題 27. ${}^{<\omega}\alpha$ は $\mathrm{Coll}(\alpha)$ の稠密部分集合であり, したがって両者はジェネリック拡大の意味で同等である. □

補題 28. $\mathrm{Coll}(\alpha)$ と $\mathrm{Coll}(|\alpha|)$ は半順序として同型である. □

補題 29. $\alpha \geq \omega$ のとき, $\mathrm{Coll}(\alpha)$ と $\mathrm{Coll}(\alpha) \times \mathrm{Coll}(\alpha)$ は半順序として同型である. □

補題 25 のときと同様の論法で, サイズ κ の半順序 P が ω から κ の上への写像の存在を強制するなら, $P \sim \mathrm{Coll}(\kappa)$ であることが示されます.

補題 30. α を不可算順序数とする. 半順序 P が, α を可算に潰す ($\mathbb{1}_P \Vdash [\, |\alpha| = \omega\,]$) とする. このとき,

(1) P の任意の要素 p は $|\alpha|$ 個以上の互いに両立不可能な要素に拡大できる.
(2) P の稠密開集合の列 $D_n \ \ (n \in \omega)$ で, $\bigcap_{n\in\omega} D_n = \emptyset$ をみたすものがとれる.

[証明] (1) もしも P のある要素 p について $[p]$ がサイズ $|\alpha|$ の反鎖を含まなかったとすると, $|\alpha|$-鎖条件をみたす半順序が基数 $|\alpha|$ を保持することから, p を含む任意の M 上の P-ジェネリック集合について ($|\alpha|^M$ は基数である $)^{M[G]}$. したがって, $(p \Vdash |\alpha| > \omega)^M$ となって仮定 $\mathbb{1} \Vdash |\alpha| = \omega$ に矛盾する.

(2) 極大原理 (→補題 9 の (vii)) により, ある P-名前 $\dot{f}$ について $\mathbb{1} \Vdash (\dot{f} : \omega \to \alpha$: 全射) が成立する. D_n を, $\exists s \in {}^n\alpha(\, p \Vdash \dot{f} \restriction \check{n} = \check{s}\,)$ をみたすような要素 p の全体とする. D_n は稠密開集合である. もしも $\bigcap_{n\in\omega} D_n$ に要素 p が存在すれば, あきらかに p はすべての $\dot{f}(\check{n})$ を決定する. 自然数 n に p の定める $\dot{f}(\check{n})$ の値を対応させる写像 $f : \omega \to \alpha$ は, 基礎モデルに存在する全射になるが, それは α が不可算であるという前提と矛盾する. したがって, $\bigcap_{n\in\omega} D_n = \emptyset$ である. □

補題 30 の (2) は, P が基礎モデル M の要素の可算列を何か新たに付け加える (つまり $\mathbb{1} \Vdash ({}^{\omega}M \not\subseteq M)$ となる) 場合には必ず成立します.

補題 31. α を不可算順序数とする．半順序 P は分離的で, $\mathbb{1}_P \Vdash |\alpha| = \omega$ をみたし, さらに, $|P| \leq |\alpha|$ であるものとする．このとき, P は ${}^{<\omega}\alpha$ と同型な稠密部分集合を含み, したがって $P \sim \mathrm{Coll}(\alpha)$ が成立する．□

[証明] ([8] の p.129, 命題 10.20 の証明にもとづく) $|\alpha| = \kappa$ とおく．半順序としての ${}^{<\omega}\alpha$ と ${}^{<\omega}\kappa$ は同型であり, $\mathbb{1} \Vdash |\alpha| = \omega$ と $\mathbb{1} \Vdash |\kappa| = \omega$ は同値なので, 最初から α が不可算基数 κ である場合を考えればよい．補題 30 の (1) より, P のどの要素もちょうど κ 個の互いに両立不可能な要素に拡大される．したがって, とくに $|P| = \kappa$ である．いま $\mathbb{1} \Vdash |\check{P}| = \omega$ となるので, 極大原理により, $\mathbb{1} \Vdash (\dot{g} : \omega \to \dot{G}:$ 全射$)$ をみたす P-名前 $\dot{g}$ が存在する．

半順序 ${}^{<\omega}\kappa$ の要素 σ の長さにかんする帰納法によって, 写像 $h : {}^{<\omega}\kappa \to P$ をつくる．まず $h(\varnothing) = \mathbb{1}_P$ とする．自然数 n について, $h \restriction {}^{n}\kappa$ が定まったとしよう．${}^{n}\kappa$ の要素 σ に対して, $[h(\sigma)]$ のサイズ κ のパーティションを考え, その要素を a^{σ}_{ξ} $(\xi < \kappa)$ によって 1 対 1 で数え上げる．ここでとくに, 各 a^{σ}_{ξ} が $\dot{g}(\check{n})$ の値を決定する (つまり $\exists r \in P\,(\, a^{\sigma}_{\xi} \Vdash \dot{g}(\check{n}) = \check{r}\,)$ が成立する) ようにとれる．というのも, $\dot{g}(\check{n})$ の値を決定する P の要素全体の集合は稠密開集合だからである．このように a^{σ}_{ξ} をとった上で, $h(\sigma^\frown\xi) = a^{\sigma}_{\xi}$ ととる．

こうして定義される写像 $h : {}^{<\omega} \to P$ が ${}^{<\omega}$ の P への稠密埋め込みであることを示そう．

$$\forall \sigma, \tau \in {}^{<\omega}\kappa\,(\, \sigma \supseteq \tau \iff h(\sigma) \leq_P h(\tau)\,),$$
$$\forall \sigma, \tau \in {}^{<\omega}\kappa\,(\, \sigma \perp \tau \iff h(\sigma) \perp_P h(\tau)\,)$$

となることは明らかである．そこであとは, 値域 $\mathrm{ran}(h)$ が P において稠密であればよい．P の任意の要素 p を考えよう．P が分離的半順序であることから, $p \Vdash \check{p} \in \dot{G}$ である．そこで, p の拡大 q と自然数 n を, $q \Vdash \dot{g}(\check{n}) = \check{p}$ となるようにとれる．作り方からわかるとおり, $\{\, h(\sigma) \;:\; \sigma \in {}^{n+1}\kappa \,\}$ は P のパーティションなので, ${}^{<\omega}\kappa$ のある要素 σ について, q と $h(\sigma)$ が両立可能になる．ところが, これも作り方から, $h(\sigma)$ もまた $\dot{g}(\check{n})$ の値を決定する．そして q と $h(\sigma)$ が両立可能であることから, 両者の決定する $\dot{g}(\check{n})$ の値は一致する．つまり $h(\sigma) \Vdash \dot{g}(\check{n}) = \check{p}$ となるわけだが, これは $h(\sigma) \Vdash \check{p} \in \dot{G}$ を導くから, ふたたび P が分離的半順序であることから $h(\sigma) \leq p$ が成立する．したがって, P の任意の要素が $\mathrm{ran}(h)$ の要素に拡大でき, $\mathrm{ran}(h) \in \mathrm{den}(P)$ となる．□

補題 32. κ を基数, P を無原始的な半順序で $|P| \leq \kappa$ となるものとすると, $P \times \mathrm{Coll}(\kappa)$ は $\mathrm{Coll}(\kappa)$ と同等である．

[証明] 補題 31 により明らか. □

3 ボレル集合, B-コード, ランダム実数

3.1 ボレル集合のコード

第 1 節の 1.1 で述べたとおり, ボレル集合は, 可算個の区間から出発して可算和と補集合の演算を可算回繰り返すことで得られます．このことは, 個々のボレル集合の与えられ方を, ω の部分集合や ${}^{\omega}\omega$ の要素のような可算な対象に記録 (コード化) してしまえることを示唆します．ここでは Solovay のやり方にしたがって, ボレル集合のコード化の方法を述べます.

これ以後, 有理数を端点とする空でない開区間の数え上げ $\langle I_i : i \in \omega \rangle$ が与えられているものとします. 具体的にどのように与えられているかは, 立ち入って問題になることはありませんが, I_i 左右の端点とか, $\overline{I_j} \subseteq I_i$ の真偽とかが, 添字 i や j の関数として計算可能である (これらの情報をコンピュータに出力させるようなプログラムが書ける) 程度には, 具体的で明示的に与えられているものと仮定します.

定義 20. 自然数の無限列 (${}^\omega\omega$ の要素) f に対して, $k \mapsto f(k+1)$ で決まる列を f^* と書き, 各自然数 n ごとに $k \mapsto f(2^n(2k+1))$ で決まる列を $(f)_n$ と書く. □

これらの定義がいずれも $f(0)$ を参照しないことに注意しましょう. 次の条件が満たされるようにコード化を定義します;

(1) もしも $f(0) \equiv 0 \pmod 3$ だったら, f は開集合 $\bigcup_{k=0}^{\infty} I_{f(k+1)}$ のコードである;
(2) もしも $f(0) \equiv 1 \pmod 3$ で f^* が集合 A のコードだったら, f はその補集合 $\boldsymbol{R} \setminus A$ のコードである;
(3) もしも $f(0) \equiv 2 \pmod 3$ で, 各自然数 n について $(f)_n$ が集合 A_n のコードだったら, f はその和集合 $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ のコードである;
(4) 以上の条件でコードと判定されるものだけが, 集合のコードである.

もう少しきちんというには, 次のように整礎的 (wellfounded) な二項関係を用います.

定義 21. (1) ${}^\omega\omega$ 上の二項関係 $<_{\mathrm{code}}$ を

$$f <_{\mathrm{code}} g \iff (g(0) \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3) \wedge f = g^*) \vee (g(0) \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3) \wedge \exists n \in \omega,\ f = (g)_n)$$

と定義する.
(2) ${}^\omega\omega$ の部分集合 $\mathbf{BC}$ を

$$\mathbf{BC} = \{\, f \in {}^\omega\omega \ : <_{\mathrm{code}} \ \text{は } f \text{ 以下で整礎的} \,\}$$

と定義し, その要素を ***B*-コード**と呼ぶ. □

各々の $\boldsymbol{B}$-コードがいかなるボレル集合をコードしているかを解読する手続きは, この関係 $<_{\mathrm{code}}$ に沿った帰納法で定義されます.

定義 22. (1) 関数 $F_{\mathrm{code}} : \mathbf{BC} \times \boldsymbol{R} \to \{0, 1\}$ を次のように定義する: $F_{\mathrm{code}}(c, x) = 1$ であるのは

(i) $c(0) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ かつ $x \in \bigcup_{k\in\omega} I_{c(k)}$ であるとき, または
(ii) $c(0) \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ かつ $F_{\mathrm{code}}(c^*, x) = 0$ であるとき, または
(iii) $c(0) \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ かつ $\exists n \in \omega,\ F_{\mathrm{code}}((c)_n, x) = 1$ であるとき,

であり, このいずれにも該当しない場合は $F_{\mathrm{code}}(c, x) = 0$ となる.
(2) ${}^\omega\omega \times \boldsymbol{R}$ の部分集合 B^+ と B^- を,

$$B^+ = \{\, \langle c, x \rangle \ : \ c \in \mathbf{BC} \wedge F(c, x) = 1 \,\}$$
$$B^- = \{\, \langle c, x \rangle \ : \ c \in \mathbf{BC} \wedge F(c, x) = 0 \,\}$$

によって定義する.

(3) $c \in \mathbf{BC}$ のとき,

$$B_c = \{\, x \in \boldsymbol{R} : \langle c, x \rangle \in B^+ \,\}$$

とおき, これを c **によってコードされたボレル集合**と呼ぶ. □

このときあらゆるボレル集合が B_c の形で得られることは, ボレル集合のランクに沿った帰納法で容易に証明できます.

補題 33. (1) $\mathbf{BC}$ の任意の要素 c について, B_c は $\boldsymbol{R}$ のボレル集合である; (2) $\boldsymbol{R}$ の任意のボレル集合 B に対して $\mathbf{BC}$ の要素 c で $B = B_c$ となるものがとれる. □

次の補題の証明の詳細は記述集合論の Π^1_1 の理論に立ち入ることになるので略しますが, $<_{\mathrm{code}}$ が算術的 (すべての $\exists$ と $\forall$ が遺伝的有限集合の全体 $\mathbf{V}_\omega$ に制限された論理式で定義される) であり, かつ $<_{\mathrm{code}}$ の左辺にあらわる関数はつねに右辺の関数から計算可能なものばかりであること, そして F_{code} がその算術的関係に沿った超限帰納法によって定義されていることに注意すれば, 順当な結果といえます.

補題 34. $\boldsymbol{R}$ の要素 x および ${}^\omega\omega$ の要素 c, d, e についての関係として

$$c \in \mathbf{BC}, \quad x \in B_c, \quad x \notin B_c, \quad B_c = \emptyset, \quad B_c \subseteq B_d, \quad B_c = B_d, \quad B_c = \boldsymbol{R} \setminus B_d, \quad B_c \cap B_d = B_e$$

はいずれも **ZF+DC** から冪集合の公理を除いた集合論*11の任意の推移的モデルに対して絶対的である. □

3.2 ボレル集合の測度の絶対性

さて, ボレル集合が与えられるということは, 可算個の開区間から出発して, 可算和と補集合をとる演算を可算回繰り返して集合を構成するその手続きが与えられるということにほかなりません. たとえば開区間 $(0, 1)$ を例にとってみても, これが集合として何であるかは, 考えている集合論のモデルに依存して変化してしまいますが, 0 より大きく 1 より小さい実数の集まりである, という定義は共通です. そういう意味では, ボレル集合は形式化された集合論の変数の指示対象である (集合論の言及の範囲内にある) 集合というよりは, 実数のクラスと考えるべきです. その場合, 個々のボレル集合 B ではなく, $B = B_c$ をみたすなんらかのコードあるいはプログラムである c のほうを, 実体と思っていることになります.

たとえば, a と b を有理数 ($a < b$) とすれば 閉区間 $[a, b]$ の測度 (長さ) は, どんなモデルの中でも $b - a$ であるはずです. しかし, M が集合論の可算推移モデルであれば, M における閉区間である $(\,[a, b]\,)^M$ は, “本当は” 可算集合のはずですから測度はゼロです. 真の宇宙 $\mathbf{V}$ で見れば, 可算集合 $(\,[a, b]\,)^M$ は区間でもなんでもありませんから, $(m([a, b]))^M > 0$ と $m((\,[a, b]\,)^M) = 0$ とはべつだん矛盾しているわけではありません. むしろ, $m([a, b]) = (\,m([a, b])\,)^M$ という一致のほうに注目すべきです. 実際, $\boldsymbol{B}$-コードが記述している実数のクラスとしてのボレル集合の測度は, どのモデルで測っても一致するのです. 第 1 節で述べたボレル集合族とその上の測度の定義から, 次の補題は $<_{\mathrm{code}}$ に沿った $\mathbf{BC}$ 上の超限帰納法で証明されます.

*11 もちろん, 冪集合の公理がなければ $\boldsymbol{R}$ も ${}^\omega\omega$ も集合としては存在しないので, クラスとして記述されているものと解釈します.

補題 35. (測度の絶対性) $\boldsymbol{B}$-コードの実数値関数としての $c \mapsto m(B_c)$ は **ZF+DC** から冪集合の公理を除いた集合論の任意の推移的モデルに対して絶対的である．すなわち, $c \in (\mathbf{BC})^M$ ならば $m(B_c) \in M$ であり $(m(B_c))^M = m(B_c)$ である. □

とくに, $\boldsymbol{B}$-コードにかんする述語としての $B_c \in \mathcal{N}$ は絶対的です．ルベーグ零集合のクラス $\mathcal{N}$ そのものは, 上に述べた閉区間 $[0,1]$ の例で見たとおり, 集合の集まりとして絶対的ではありません.

3.3 ボレル集合のベールのカテゴリーの絶対性

ボレル集合のベールのカテゴリーについても, 測度と同様の結果が成り立ちます.

補題 36. (ベールのカテゴリーの絶対性) $\boldsymbol{B}$-コード c の述語としての $B_c \in \mathcal{M}$ は **ZF+DC** から冪集合の公理を除いた集合論の任意の推移的モデルに対して絶対的である． □

ただし, $\boldsymbol{B}$-コードから測度を直接に定義する手続きが与えられていたのと比較すると, 疎集合であることの証拠となる いたるところ非稠密な閉集合の可算列による被覆を見つけないといけないぶん, 補題 36 の証明は測度にかんする補題 35 の場合より多少やっかいです.

3.4 ランダム実数

ここでは, M を冪集合の公理を含む **ZF+DC** の, (必ずしも集合とは限らない) 推移的モデルとします．冪集合の公理を除いた集合論のモデルへここでの結果を拡張することも難しくはないのですが, 個々のボレル集合を集合として扱えないためすべてを $\boldsymbol{B}$-コードによる記述に置き換える必要があり, 少しばかり面倒です.

ボレル集合族およびその測度は, 補題 35 で見たとおり, M に対して絶対的です．したがって, M に属する $\boldsymbol{B}$-コードをもつようなボレル集合が零集合であるかどうかは, M で考えても $\mathbf{V}$ で考えても, あるいはその中間にあるどのモデルで考えても, 同じことになります.

次の定義は, ブール代数の理論における測度ブール代数の定義とは, 最大要素 $\mathbb{1}_{\mathbb{B}}$ の測度が ∞ になってしまう点で一致しませんので注意が必要です.

定義 23. ボレル集合族 $\boldsymbol{B}$ を, 同値関係 $A \triangle B \in \mathcal{N}$ で割って得られるブール代数を $\mathbb{B}$ と書き, これを**測度代数** (measure algebra) とよぶ. □

モデル M における測度代数 $(\mathbb{B})^M$ から最小要素を除いた $(\mathbb{B})^M \setminus \{\mathbf{0}_{\mathbb{B}}\}$ を, M をジェネリック拡大する半順序として用いることができます．すこし杜撰な記号法ですが, この半順序のことも $\mathbb{B}$ と書きます．もう少し簡単に,

$$\mathbb{B} = \boldsymbol{B} \setminus \mathcal{N},$$
$$A \leq_{\mathbb{B}} B \iff A \subseteq B$$

と定義しても, ジェネリック拡大の意味で同等な半順序が得られます.

次の補題 37 において, モデル M に属するボレル集合は, それと同じ $\boldsymbol{B}$-コードで記述される $\mathbf{V}$ におけるボレル集合と同一視されています．これは記号の濫用ですが, $B_c = B_d$ の絶対性 (補題 34) によって, 同じボレル集合をどの $\boldsymbol{B}$-コードで記述しているかは問題にならないことや, どのモデルでそのボレル集合を考えているのかは文脈から判断できることなどから, 混乱を生じることはないはずです.

補題 37. G を M 上の $\mathbb{B}$-ジェネリック集合とすると, G に属するボレル集合全体の共通部分[*12]はただひとつの実数からなり, いまそれを r と書くならば,

$$B \in G \iff r \in B$$

が成立するという意味で, G は r によって決まる. (したがって $M[G] = M[r]$ が成立する.)

[証明] 正の測度をもつ有界閉集合の全体が測度代数の稠密部分集合になっていることに注意すると, G の共通部分が空でないことがわかる. ε を正の有理数とするとき, 集合としての直径が ε 以下である集合が測度代数の稠密部分集合になることから, G の共通部分の直径は ε でなければならない. ε は任意であるから, G の共通部分の直径はゼロ, したがって G の共通部分はただひとつの実数からなる. この実数を r とすると, あきらかに $\{ B \in \mathbb{B}^M \ : \ r \in B \} \supset G$ である. 逆向きの包含を示すために $B_1 \in \mathbb{B}^M$ かつ $r \in B_1$ としよう. $D = \{ B \in \mathbb{B}^M : B \cap B_1 = \emptyset \vee B \subseteq B_1 \}$ とおくと, $D \in M$, かつ, D は $\mathbb{B}^M$ の稠密部分集合であるから $D \cap G \neq \emptyset$. いっぽう, すべての $B \in G$ に対して $r \in B \cap B_1 \neq \emptyset$ である. したがって, $B \subseteq B_1$ かつ $B \in G$ となる B が存在し $B_1 \in G$ が従う. □

定義 24. 補題 37 によって M 上の $\mathbb{B}$-ジェネリック集合に対応して求まるような実数を M **上のランダム実数** (random real over M) と呼ぶ. □

補題 38. 実数 r が M 上のランダム実数であるためには, M に属するいかなる測度ゼロのボレル集合にも r が属さないこと, つまり

$$r \in \boldsymbol{R} \setminus \bigcup \{ B_c : c \in M \wedge B_c \in \mathcal{N} \}$$

となることが必要かつ十分である.

[証明] まず r を M 上のランダム実数とし対応するジェネリック集合を G とする. $B_c \in \mathcal{N}$ かつ $c \in M$ であれば, $\{\boldsymbol{R} \setminus B_c\}$ は M に属する $\mathbb{B}^M$ の前稠密部分集合なので, $\boldsymbol{R} \setminus B_c \in G$ したがって, $r \in \boldsymbol{R} \setminus B_c$ となるから $r \notin B_c$ である.

逆に, 実数 r が M に属する測度ゼロのいかなるボレル集合にも属さないとしよう. D を $\mathbb{B}^M$ のパーティションで M に属するものとする. パーティションであることは絶対的な性質なので, M においても D は $\mathbb{B}$ のパーティションである. 互いに交わりのない正測度の可測集合の族は高々可算なので, D のメンバー(の代表元) の和集合 B_1 は, また M に $\boldsymbol{B}$-コードを持つボレル集合である. D の反鎖としての極大性から $\boldsymbol{R} \setminus B_1 \in \mathcal{N}$ であるから, 仮定から $r \in B_1$. したがって, D のあるメンバー B について $r \in B$ となる. したがって, $G = \{ B \in \mathbb{B}^M \ : \ r \in B \}$ によって $\mathbb{B}^M$ のフィルター G を定義すれば, これは M 上 $\mathbb{B}^M$-ジェネリックである. したがって, r は M 上のランダム実数である. □

3.5 コーエン実数

測度代数 $\mathbb{B}$ のジェネリック集合からランダム実数が得られたのと同様の手順で, コーエン半順序 $\mathbb{C}$ から得られるのが, コーエン実数です. このサブセクションではコーエン実数についての基本的な結果を証明なしで述べます.

[*12] 測度ブール代数のフィルターという文脈では, G 要素である同値類に属するすべてのボレル集合の共通部分

補題 39. (1) 有理数を端点とする開区間の全体の集合を包含関係で順序づけた半順序を $\mathbb{C}'$ とすると, $\mathbb{C}'$ はコーエン半順序 $\mathbb{C}$ と同等である. また, 実数の疎でないボレル集合の全体の集合 $\boldsymbol{B} \setminus \mathcal{M}$ を包含関係で順序づけた半順序 $\mathbb{C}''$ も, (稠密な部分集合として $\mathbb{C}'$ を含むため) $\mathbb{C}$ と同等である.

(2) G を M 上の $\mathbb{C}'$-ジェネリック集合とするとき, その共通部分はただ一つの実数からなる集合である. いまその実数を c と書くと,

$$I \in G \iff c \in I \quad (I \text{ は有理開区間})$$

が成立するという意味で, G は c によって定まる. したがって, $M[G] = M[c]$ である. □

定義 25. 補題 39 の意味で, M 上の $\mathbb{C}'$-ジェネリック集合から定まる実数 c を M 上の**コーエン実数** (Cohen reals over M) と呼ぶ. □

補題 40. 実数 c が M 上のコーエン実数であるためには, M に属するどんな疎なボレル集合にも c が属さないこと, つまり

$$c \in \boldsymbol{R} \setminus \bigcup \{\, B_c : c \in M \wedge B_c \in \mathcal{M} \,\}$$

となることが必要かつ十分である.

これらの補題から, コーエン実数がランダム実数とよく似た性質をもつものという印象をもったかもしれませんが, 実はそうではありません. 補題 39 から 40 まででは, ジェネリック拡大によって実数を定める方法の記述という観点からだけ見たので両者の類似性だけが強調されていますが, 本当はコーエン実数とランダム実数は大変異なった性質をもちます. たとえば, 補題 5 で与えた A と B を考えると, コーエン実数はすべて集合 A に属し, ランダム実数はすべて集合 B に属します.

このあとの議論と関係はありませんが, 無理数のディオファントス近似に関連して, ランダム実数とコーエン実数の違いを示す結果をふたつ引用しておきます. これらは, 該当する数論の結果の "ほとんどすべての実数について" と "高々疎集合を除くすべての実数について" という量化子を, それぞれ "すべてのランダム実数について" と "すべてのコーエン実数について" に書き直しただけですから, このような結果は実は枚挙にいとまなく存在するのです.

命題 41. M を, **ZF** から冪集合の公理を削除した集合論[*13]の推移的モデルとする. このとき,

(1) r が M 上のランダム実数であれば, どんなに小さい正の数 ε についても, 不等式

$$\left| r - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}$$

は, 高々有限個の分数 p/q によってしか満たされない. [Khinchin]

(2) M 上のコーエン実数はすべて**リウーヴィユ数** (Liouville number) である. すなわち, c が M 上のコーエン実数であれば, どんなに大きな正の数 R についても, 不等式

$$\left| c - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^R}$$

が無限個の分数 p/q によって満たされる. [Liouville, のちに Erdős] □

[*13] 本当はもっと控えめに, M が ω の部分集合の算術的定義のもとで閉じてさえいればいいので, 構成可能的階層の $L_{\omega+1}$ でも十分です.

命題 42. M を命題 41 と同様のモデルとするとき,

(1) r が M 上のランダム実数であれば, M に属する自然数の任意の狭義単調増大列 $\{a_n\} \in \omega^{\nearrow\omega}$ について, 数列 $\{a_n r\}$ は 1 を法として一様分布する. すなわち, 単位閉区間上の任意の実数値連続関数 $f(x)$ について,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} f(\widetilde{a_n r}) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

が成立する. ここで, $\widetilde{x}$ は x の小数部分 $x-[x]$ を意味する. [Weyl]

(2) c が M 上のコーエン実数であれば, 数列 $\{2^n c\}$ は (1) の意味で 1 を法として一様分布しない. [Erdős, のちに Lyons] □

4 Levy の半順序と Levy-Solovay モデル

定理 2 のモデルは, 強到達不可能基数の存在する集合論のモデルを次に定義する Levy の半順序によってジェネリック拡大することで得られます. Levy の半順序は第 2 節で検討した崩潰半順序を無限個 “束ねた” ものだといえます.

4.1 Levy の半順序

定義 26. 無限順序数 λ に対して, $\mathbb{P}_\lambda$ を次の条件をみたす p 全体の集合とする:

$$p : \mathrm{dom}(p) \to \kappa, \quad \mathrm{dom}(p) \subseteq \kappa\times\omega, \quad |p| < \omega, \quad \text{かつ}$$
$$\forall\langle\xi, n\rangle \in \mathrm{dom}(p)[\, p(\langle\xi, n\rangle) < \xi\,].$$

また, $p, q \in \mathbb{P}_\lambda$ のとき $p \le_{\mathbb{P}_\lambda} q \iff p \supset q$ と定める. □

こうして得られる半順序 $(\mathbb{P}_\lambda, \le_{\mathbb{P}_\lambda})$ のことを, **Levy 崩潰半順序** (Levy collapse), あるいは単に **Levy の半順序**と呼びます. すぐにわかるとおり, λ が M に属する順序数であれば $(\mathbb{P}_\lambda, \le_{\mathbb{P}_\lambda}) \in M$ となります. 空な関数 $\varnothing$ が $\mathbb{P}_\lambda$ の最大要素です.

補題 43. 任意の無限順序数 λ に対して, $|\mathbb{P}_\lambda| = |\lambda|$.

[証明] $\mathbb{P}$ の要素は $(\lambda\times\omega)\times\lambda$ の有限部分集合なので, $\mathbb{P}_\lambda \subseteq [(\lambda\times\omega)\times\lambda]^{<\omega}$ である. □

補題 44. λ が不可算正則基数のとき, $\mathbb{P}_\lambda$ は **λ-鎖条件**をみたす. すなわち, $\mathbb{P}_\lambda$ の反鎖の濃度は λ 未満である.

[証明] A を $\mathbb{P}_\lambda$ の反鎖だとする. ツォルンの補題を用いて, 極大な反鎖にまで A をあらかじめ拡大してあったとすると, $\mathbb{P}_\lambda$ の各要素は少なくとも一つの A の要素と両立可能であると仮定しても一般性は損なわれない.

$\xi_0 = \omega$ とおく. ξ_n が定まったとして, $\mathbb{P}_{\xi_n}$ の各要素 p に対して, それと両立可能な A の要素 $q(p)$ をとる. そして, ξ_{n+1} を ξ_n より大きな順序数 ξ のうち $\mathbb{P}_{\xi_n}$ のすべての要素 p について $q(p) \in \mathbb{P}_\xi$ となるような最小のものとする. 補題 43 から $|\mathbb{P}_{\xi_n}| = |\xi_n|$ であり, λ は正則基数であるから, $\xi_n < \lambda$ なら $\xi_{n+1} < \lambda$ である. これで各自然数 n に対して ξ_n が定まる. $\xi_\omega = \sup_{n\in\omega} \xi_n$ とおくと, $\xi_\omega < \lambda$ である.

このとき $A \subseteq \mathbb{P}_{\xi_\omega}$ となることを背理法で示す. そうでなかったとして, $A \setminus \mathbb{P}_{\xi_\omega}$ の要素 q_0 をとる. q_0 は $A \cap \mathbb{P}_{\xi_\omega}$ のすべての要素と両立不可能である. $p \in \mathbb{P}_{\xi_\omega}$ のとき, p と q_0 が両立不可能であることの証拠となる

のは, $\xi_\omega \times \omega$ のある要素 $\langle \eta, k \rangle$ における p と q_0 との値の不一致である．ということは, $q_1 = q_0 \restriction (\xi_\omega \times \omega)$ とおけば, q_1 が $A \cap \mathbb{P}_{\xi_\omega}$ のすべての要素と両立不可能であるはずだ．ところが, q_1 はある n について $\mathbb{P}_{\xi_n}$ に属し, $A \cap \mathbb{P}_{\xi_{n+1}}$ のある要素が q_1 と両立可能になっている．これは矛盾である．

したがって, $\mathbb{P}_\lambda$ の反鎖はすべて λ 未満の順序数 ξ に対する $\mathbb{P}_\xi$ に含まれる．補題 43 から $|\mathbb{P}_\xi| = |\xi| < \lambda$ であるから, 反鎖の濃度は λ 未満である．□

補題 45. λ を任意の不可算正則基数とするとき, $\varnothing \Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} \lambda = \omega_1$ である．

[証明] 補題 44 により, $\mathbb{P}_\lambda$ が λ-鎖条件をみたすので, λ 以上の共終数と基数は保持される．したがって $\varnothing \Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} \lambda \geq \omega_1$ である．いっぽう, G を $\mathbb{P}_\lambda$-ジェネリックな集合として, λ 未満の各順序数 α に対して, 関数 $g_\alpha : \omega \to \alpha$ を

$$g_\alpha = \{\, \langle n, \eta \rangle : \{\langle \langle \alpha, n \rangle, \eta \rangle\} \in G \,\}$$

と定義すると, g_α が ω から α の上への写像になることが容易に確かめられるので, $\mathbb{P}_\lambda$-ジェネリック拡大においては, α は可算順序数となる．したがって, $\varnothing \Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} \lambda \leq \omega_1$ である．□

補題 46. λ が強到達不可能基数 (→サブセクション 4.2), δ を λ より小さい順序数とするとき $\varnothing \Vdash_{\mathbb{P}_\delta}$ ($\check{\lambda}$ は強到達不可能基数である)．

[証明] ここではもう少し一般的に議論して, λ を M の強到達不可能基数, P を M の半順序で $|P|^M < \lambda$ となるものとし, λ が P によるジェネリック拡大にさいして強到達不可能基数にとどまることを証明する．

まず $\beta = (\mathrm{cf}(\lambda))^{M[G]}$ として, 非有界な関数 $f : \beta \to \lambda$ をとる．このとき M に関数 $F : \beta \to \mathcal{P}(\lambda)$ が存在して,

$$\forall \xi < \beta\, [\, |F(\xi)|^M \leq \delta \wedge f(\xi) \in F(\xi)\,]$$

となる．$g(\xi) = \sup F(\xi)$ とおくと, M における λ の正則性から $g(\xi) < \lambda$ である．g は M に属する関数 $g : \beta \to \lambda$ で, $f(\xi) \leq g(\xi)$ が成立するから非有界関数である．ふたたび M における λ の正則性から $\beta = \lambda$ である．したがって κ は $M[G]$ においても正則である．

つぎに, $\kappa < \lambda$ とし $M[G]$ における任意の部分集合 $X \subseteq \kappa$ を考える．$\dot{X} \in M^P$ を $\dot{X}_G = X$ となるようにとる．

$$Y = \{\, \langle \check{\xi}, p \rangle : p \Vdash \check{\xi} \in \dot{X} \,\}$$

とおくと $Y \in M^P$ かつ $Y_G = \dot{X}_X$ となるので, $M[G]$ における κ の部分集合はすべて M における $\{\, \check{\xi} : \xi < \kappa \,\} \times \mathbb{P}_\delta$ の部分集合の G-解釈として得られる．そこで, $M[G]$ における写像

$$\pi_G : (\mathcal{P}(\{\, \check{\xi} : \xi < \kappa \,\} \times P)^M \to (\mathcal{P}(\kappa))^{M[G]}\,; \\ Y \mapsto Y_G$$

は全射である．M において $|\mathcal{P}(\{\, \check{\xi} : \xi < \kappa \,\} \times P| < \lambda$ であるから, $M[G]$ において $|\mathcal{P}(\kappa)| < \lambda$ であり, λ は $M[G]$ において強極限基数である．□

補題 47. (弱一様性) 任意の無限順序数 λ について, $\mathbb{P}_\lambda$ は弱一様性を持つ．

[証明] 任意の要素 p と q をとり, $a = \mathrm{dom}(p)$, $b = \mathrm{dom}(q)$ とおく．a も b も $\lambda \times \omega$ の有限部分集合であることから, ω 上の置換 π を

$$\{\, \langle \xi, \pi^{-1}(n) \rangle : \langle \xi, n \rangle \in a \,\} \cap b = \emptyset$$

となるようにとれる. $h : \mathbb{P}_\lambda \to \mathbb{P}_\lambda$ を,

$$\mathrm{dom}(h(r)) = \{\, \langle \xi, n \rangle : \langle \xi, \pi(n) \rangle \in \mathrm{dom}(r) \,\}$$
$$h(r)(\langle \xi, n \rangle) = r(\xi, \pi(n))$$

によって定義すれば, 補題は容易に検証できる. □

4.2 中間拡大補題

もしも λ が基数でないなら, $\mathbb{P}_\lambda$ によるジェネリック拡大は, 基数 $|\lambda|$ を可算にするので, λ を可算順序数にしてしまいます. また, λ が特異基数である場合にも, $\mathbb{P}_\lambda$ によるジェネリック拡大は λ を可算順序数にしてしまいます. これらの場合に Levy の半順序を用いるのは得策ではありません. というのも, 同等な半順序 $\mathrm{Coll}(\lambda)$ を使って, 同じ効果がもっと簡単に得られるからです (→補題 31). また, $\lambda = \kappa^+$ の場合には $\mathrm{Coll}(\kappa)$ を用いることができます.

つまり, $\mathbb{P}_\lambda$ が本領を発揮するのは, λ が不可算で正則な極限基数である場合に限られるわけです. 不可算で正則な極限基数は**弱到達不可能基数** (weakly inaccessible cardinal) と呼ばれます. より強く, 基数 λ が不可算かつ正則で, しかも

$$\forall \kappa\, (\kappa < \lambda \implies 2^\kappa < \lambda)$$

という条件をみたすならば, λ は**強到達不可能基数** (strongly inaccessible cardinal) と呼ばれます. 弱到達不可能基数の存在する集合論のモデルがあれば, それをもとに強到達不可能基数の存在する集合論のモデルを作ることができるので, 両者は無矛盾等価 (equiconsistent) です. Solovay の結果は, 強到達不可能基数 λ に対する $\mathbb{P}_\lambda$ によるジェネリック拡大の特徴を巧みに用いて証明されます.

これ以後は, λ は M に属する順序数で (λ は強到達不可能基数 $)^M$ が成立しているものと仮定し, いちいちそのことを断りません.

次の補題は, M の $\mathbb{P}_\lambda$-ジェネリック拡大モデル $M[G]$ における順序数の可算列 s について, $M[G]$ は $M[s]$ の $\mathbb{P}_\lambda$-ジェネリック拡大モデルとも解釈できるということを意味しており, 定理 1 と定理 2 の証明において鍵になる, 重要な補題です.

補題 48. (中間拡大補題) G を M 上の $\mathbb{P}_\lambda$-ジェネリック集合として, $s \in ({}^\omega\mathbf{ON})^{M[G]}$ とする. このとき

(a) λ より小さなある順序数 δ について $s \in M[G \cap \mathbb{P}_\delta]$ が成立する;
(b) (λ は強到達不可能基数$)^{M[s]}$ である;
(c) $M[s]$ 上の $\mathbb{P}_\lambda$-ジェネリック集合 H で

$$M[G] = M[s][H]$$

をみたすものが存在する.

この中間拡大補題の証明のためには, あと少し補題が必要です.

補題 49. κ を不可算正則基数, G を M 上の $\mathbb{P}_\kappa$-ジェネリック集合とし, $s \in ({}^\omega\mathbf{ON}) \cap M[G]$ とするとき, κ より小さい順序数 δ で, $s \in M[G \cap \mathbb{P}_\delta]$ をみたすものが存在する.

[証明] まず, s の M に属する $\mathbb{P}_\kappa$-名前 $\dot{s}$ を固定して, M 内で議論する. 各自然数 n について, 集合 A_n を

$$A_n \subseteq \{\, p \in \mathbb{P}_\kappa \ :\ \exists \xi\, [\, p \Vdash \dot{s}(\check{n}) = \check{\xi}\,]\,\}$$

かつ, A_n が右辺の集合のパーティションになるようにとる. $\mathbb{P}_\kappa$ が κ-鎖条件をみたすことから, $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ のサイズは κ より小さい. したがって, κ より小さなある δ について $\bigcup_{n\in\omega} A_n \subseteq \mathbb{P}_\delta$ となる. このとき, $M[G]$ において

$$s(n) = \xi \iff \exists!\, p \in A_n \cap (G \cap \mathbb{P}_\delta)\ [\ (p \Vdash_{\mathbb{P}_\kappa} \dot{x}(\check{n}) = \check{\xi})^M\ ]$$

なので, s は M の要素に加えて $G \cap \mathbb{P}_\delta$ があれば再構成できる. □

補題 50. λ が M における到達不可能基数とし, G を M 上の $\mathbb{P}_\lambda$-ジェネリック集合とする. $s \in ({}^\omega\mathbf{ON}) \cap M[G]$ のとき λ は $M[s]$ においても到達不可能基数である. □

[証明] 補題 46 と補題 49 により明らか. □

補題 51. δ を無限順序数とするとき $\mathrm{Coll}(\delta)$ と $\mathbb{P}_{\delta+1}$ はジェネリック拡大の意味で同等である.

[証明] まず δ が可算である場合には, $\mathbb{P}_{\delta+1}$ は無原始的で可算な半順序だから, 補題 25 によって, コーエンの半順序と同型である. 同じ理由で $\mathrm{Coll}(\delta)$ もコーエンの半順序と同等である.

次に δ が不可算である場合, $\mathbb{P}_{\delta+1}$ は $(|\check{\delta}| = \omega)^{M[\dot{G}]}$ を強制するサイズ $|\delta|$ の半順序であるから, 補題 30 によって, ${}^{<\omega}|\delta|$ と同型な稠密部分集合を含む. 同じ理由で, $\mathrm{Coll}(\delta)$ も ${}^{<\omega}|\delta|$ と同型な稠密部分集合を含む. □

中間拡大補題 (補題 48) の証明. $\omega \times \mathbf{ON}$ と $\mathbf{ON}$ のあいだの一対一対応 $\langle n, \alpha \rangle \mapsto \omega\alpha + n$ を利用すると, $M[G]$ に属する順序数の可算列 s に対して, $M[G]$ における順序数の可算集合 S が存在して $M[s] = M[S]$ となっている. 補題 49 によって, λ より小さな順序数 δ で $s, S \in M[G \cap \mathbb{P}_\delta]$ となるものが存在する.

同等関係 $\mathbb{P}_{\delta+1} \sim \mathrm{Coll}(\delta)$ によって $G \cap \mathbb{P}_{\delta+1}$ に対応する M 上の $\mathrm{Coll}(\delta)$-ジェネリック集合を G_1 とおこう. すると, $S \in M[G_1]$ かつ $G_1 \notin M[S]$ である. そこで補題 21 によって, M に $\mathrm{Coll}(\delta)$ の完備部分半順序 P が存在して $M[S] = M[G_1 \cap P]$ となる. $G_2 = G_1 \cap P$, $Q = \mathrm{Coll}(\delta)/G_2$ とおこう. 補題 20 によって, G_1 は $M[G_2]$ 上 Q-ジェネリックで, $\mathrm{Coll}(\delta)$ による M のジェネリック拡大としての $M[G_1]$ は Q による $M[G_2]$ のジェネリック拡大 $M[G_2][G_1]$ に一致する.

さて, $M[G_1] = M[G \cap \mathbb{P}_{\delta+1}]$ であった, いま

$$\mathbb{P}' = \left\{\ p \in \mathbb{P}_\lambda\ :\ \mathrm{dom}(p) \cap ((\delta+1) \times \omega) = \emptyset\ \right\}$$

とおくと, M における自然な同型 $\mathbb{P}_\lambda \simeq \mathbb{P}_{\delta+1} \times \mathbb{P}'$ によって, G は $(G \cap \mathbb{P}_{\delta+1}) \times (G \cap \mathbb{P}')$ に対応する. このとき

$$M[G] = M[G \cap \mathbb{P}_{\delta+1}][G \cap \mathbb{P}'] = M[G_2][G_1][G \cap \mathbb{P}'] = M[S][G_1][G \cap \mathbb{P}']$$

であるから, $M[G]$ は $M[S]$ の $(\mathrm{Coll}(\delta)/G_2) \times \mathbb{P}'$ によるジェネリック拡大である.

したがって, あとは $M[S]$ において $(\mathrm{Coll}(\delta)/G_2) \times \mathbb{P}'$ が $\mathbb{P}_\lambda$ とジェネリック拡大の意味で同等になることを示せばよい. ところが, あきらかに $M[S]$ において $|\,\mathrm{Coll}(\delta)/G_2| \leq |\,\mathrm{Coll}(\delta)| = |\delta| < \lambda$ であるから, $\mathbb{P}'$ と $\mathbb{P}_\lambda$ が同等であることがいえれば, 補題 32 によって証明は完了する.

そのために, 補題 28 と補題 29 から $\mathrm{Coll}(\delta+1) \simeq \mathrm{Coll}(\delta) \times \mathrm{Coll}(\delta+1)$ となることに注意する．また, 定義域に $\{\delta+1\} \times \omega$ の要素を含む関数を $\mathbb{P}'$ から取り除いて

$$\mathbb{P}'' = \left\{\, p \in \mathbb{P}_\lambda \;:\; \mathrm{dom}(p) \cap ((\delta+2) \times \omega) = \emptyset \,\right\}$$

を考えると, $\mathbb{P}' \simeq \mathrm{Coll}(\delta+1) \times \mathbb{P}''$ である．そこで,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}' &\simeq \mathrm{Coll}(\delta+1) \times \mathbb{P}'' \\ &\simeq \mathrm{Coll}(\delta) \times \mathrm{Coll}(\delta+1) \;\times \mathbb{P}'' \\ &\sim \mathbb{P}_{\delta+1} \times \mathbb{P}' \\ &\simeq \mathbb{P}_\lambda \end{aligned}$$

となって求める結果が得られる．□

4.3 Levy 拡大における定義可能な集合の表現

対称性補題 16 から, $\mathbb{P}_\lambda$-ジェネリック拡大において定義可能な実数の集合が, ある特殊な形式の定義をもつことが導かれます.

補題 52. $\in$-式 $\varphi(\mathtt{u}, \mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_n)$ は $\mathtt{u}$ と $\mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_n$ 以外には自由変数を持たないものとする．このとき $\in$-論理式 $\tilde{\varphi}$ が存在して, M の任意の要素 $a_1,\ldots,a_n$ に対して

$$\forall x \in \boldsymbol{R}^{M[G]} \left[\; (\varphi(x, a_1, \ldots, a_n))^{M[G]} \iff (\tilde{\varphi}(x, a_1, \ldots, a_n))^{M[x]} \;\right]$$

をみたす.[*14]

[証明] M の要素 $a_1,\ldots,a_n$ を固定して考えよう．x を $M[G]$ に属する任意の実数とする．中間拡大補題 48 によれば, (λ は強到達不可能 $)^{M[x]}$ であり, しかも $M[x]$ 上 $\mathbb{P}_\lambda$-ジェネリックな集合 H が存在して $M[G] = M[x][H]$ となっている．そこで, もしも $(\varphi(x, a_1, \ldots, a_n))^{M[G]}$ であれば, H のある要素 p について $(p \Vdash \varphi(\check{x}, \check{a}_1, \ldots, \check{a}_n))^{M[x]}$ となっている．補題 16 を M のかわりに $M[x]$ に適用することによって, このとき $(\varnothing \Vdash \varphi(\check{x}, \check{a}_1, \ldots, \check{a}_n))^{M[x]}$ となることがわかる．同様にして, もしも $(\neg\varphi(x, a_1, \ldots, a_n))^{M[G]}$ であれば, $(\varnothing \Vdash \neg\varphi(\check{x}, \check{a}_1, \ldots, \check{a}_n))^{M[x]}$ が成立し, このことからただちに $\neg(\varnothing \Vdash \varphi(\check{x}, \check{a}_1, \ldots, \check{a}_n))^{M[x]}$ が導かれる．したがって, いま

$$\varnothing \Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} \varphi(\check{\mathtt{u}}, \check{\mathtt{v}}_1, \ldots, \check{\mathtt{v}}_n)$$

を意味する $\in$-式を $\tilde{\varphi}(\mathtt{u}, \mathtt{v}_1, \ldots, \mathtt{v}_n)$ とすれば, 求める結論が得られる．□

4.4 定理 2 の証明 (前半)

では, G を M 上の $\mathbb{P}_\lambda$-ジェネリック集合として, $M[G]$ が定理 2 の (a')–(d') のモデルになっていることを証明しましょう.

最初に連続体仮説 **CH** はつぎのことからわかります．(i) M における連続体の濃度 $|\boldsymbol{R}|^M$ よりも λ が真に大きいこと．(ii) $M[G]$ に新たに付け加わった実数はすべて, λ より小さい δ に対する $M[G \cap \mathbb{P}_\delta]$ に属してお

[*14] 実はこの表現には少しごまかしがあります．証明からわかるとおり, $\tilde{\varphi}$ にはパラメータとして λ を含める必要があります.

り, この中間のモデルでは依然として λ が到達不可能基数で $|\boldsymbol{R}|^{M[G\cap\mathbb{P}_\delta]} < \lambda$ であること. (iii) そのいっぽうで, $(\lambda = \omega_1)^{M[G]}$ であること. 以上のことから, $M[G]$ においては $\boldsymbol{R}$ は ω_1 個の可算集合 $\boldsymbol{R} \cap M[G\cap\mathbb{P}_\delta]$ の和集合になっており. $(|\boldsymbol{R}| = \omega_1)^{M[G]}$ となります.

つぎに $M[G]$ において順序数の可算列をパラメータとして定義可能な $\boldsymbol{R}$ の部分集合がルベーグ可測でベールの性質を持つことを示します.

A を $M[G]$ に属する $\boldsymbol{R}$ の部分集合で, $M[G]$ において $({}^{\omega}\mathbf{ON})^{M[G]}$ の要素 s をパラメータとして定義可能であるものとします. すなわち, ちょうど 2 つの自由変数 $\mathtt{u}$ と $\mathtt{v}$ だけを含む $\in$-論理式 $\varphi(\mathtt{u},\mathtt{v})$ が存在して,

$$A = \{\, x \in \boldsymbol{R}^{M[G]} : (\varphi(x,s))^{M[G]} \,\}$$

となっているものとします. 中間拡大補題 48 によれば, このとき λ は $M[s]$ においてもやはり強到達不可能で, さらに, $M[s]$ 上 $\mathbb{P}_\lambda$-ジェネリックな集合 H が存在して, $M[G] = M[s][H]$ となります. そこで, はじめから $M = M[s]$, $G = H$ だったと考えても差し支えありません. すなわち, 一般性を損なうことなく, $s \in M$ であると仮定できます.

補題 52 から, $\in$-式 $\tilde{\varphi}(\mathtt{u},\mathtt{v})$ が存在して $(\varphi(x,s))^{M[G]} \iff (\tilde{\varphi}(x,s))^{M[s][x]}$ となります. したがって,

$$A = \{\, x \in \boldsymbol{R}^{M[G]} : (\tilde{\varphi}(x,s))^{M[x]} \,\}$$

です.

$\mathbb{B}^M$ を, M における $\boldsymbol{R}$ 上の標準的な測度ブール代数とします. ジェネリックなランダム実数の標準的な名前を $\dot{r}$ としましょう. そして, (完備ブール代数 $)^M$ としての $\mathbb{B}^M$ における上限

$$\bigvee\{\, \mathbf{b} \in \mathbb{B}^M : (\mathbf{b} \Vdash_{\mathbb{B}} \tilde{\varphi}(\dot{r},\check{s}))^M \,\}$$

すなわちブール値 $[\![\, \tilde{\varphi}(\dot{r},\check{s}) \,]\!]$ の代表元となるようなボレル集合 B を考え, その $\boldsymbol{B}$-コード c をひとつ固定します. B は M のボレル集合なので, $c \in M$ となるようにとることができます. $M[G]$ において同じ $\boldsymbol{B}$-コード c によって記述される $M[G]$ のボレル集合を $\hat{B}$ と呼びましょう. このとき, 第 3 節の結果によれば, r を $M[G]$ に属する M 上のランダム実数とするとき,

$$r \in \hat{B} \iff (\tilde{\varphi}(r,s))^{M[r]} \iff r \in A$$

となります. そこで, $M[G]$ における M 上のランダム実数全体のクラスを $\mathrm{Ra}(M)$ と書くならば,

$$(\, A \cap \mathrm{Ra}(M) = \hat{B} \cap \mathrm{Ra}(M) \,)^{M[G]} \tag{$\star$}$$

が成立しています. ところが, $M[G]$ において $\boldsymbol{R}^M$ は可算集合に過ぎませんから, ルベーグ測度の意味でほとんどすべての実数は M 上のランダム実数です. つまり, $(\boldsymbol{R} \setminus \mathrm{Ra}(M) \in \mathcal{N})^{M[G]}$ となっています. このことと $(\star)$ から, $(A \triangle \hat{B} \subseteq \boldsymbol{R} \setminus \mathrm{Ra}(M) \in \mathcal{N})^{M[G]}$ が成立し, $M[G]$ において A はルベーグ可測です.

ランダム実数のかわりにコーエン実数を使えば, $A \triangle B' \in \mathcal{M}$ となるようなボレル集合 B' を見いだすことができ, $M[G]$ において A がベールの性質をもつことが示されます. □

4.5 定理 2 の証明 (後半), 完全集合について

ここでも A を $M[G]$ において ${}^{\omega}\mathbf{ON}$ の要素をパラメータとして定義可能な, $\boldsymbol{R}$ の部分集合とします. 補題 52 によって, 順序数の可算列 s と $\in$-論理式 $\tilde{\varphi}(\mathtt{u},\mathtt{v})$ が存在して,

$$A = \left\{\, x \in \boldsymbol{R} \cap M[G] \;:\; (\varphi(x,s))^{M[s][x]} \,\right\}$$

となっています．補題 48 により，$s \in M$ と仮定しても一般性は損なわれません．以下ではそのように仮定し，s は書かずに済ませてしまいます．

さて，いま A が $M[G]$ において不可算であったとします．$\boldsymbol{R} \cap M$ は $M[G]$ においては可算なので，M に属さない A の要素 a が存在します．この実数 a の名前を $\dot{a}$ としましょう．極大原理によって，$\dot{a}$ は

$$\varnothing \Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} \dot{a} \in (\boldsymbol{R} \setminus M) \wedge (\varphi(\dot{a}))^{M[\dot{a}]}$$

をみたすようにとれます．さらに，順序数 δ を，$|\boldsymbol{R}|^M < \delta < \lambda$ かつ $\dot{a} \in M^{\mathbb{P}_\delta}$ となるようにとりましょう．

このとき $M[G]$ においては $\mathbb{P}_\delta$ の稠密開集合のうち M に属するものは高々可算個しか存在しないので，それらをすべて数え上げて $\langle X_n : n \in \omega \rangle$ という列に並べます．また，$\mathbb{P}_\delta \times \mathbb{P}_\delta$ の稠密開集合のうち M に属するものを同様に $\langle Y_n : n \in \omega \rangle$ と並べます．

次のように関数 $f : {}^{<\omega}2 \to \mathbb{P}_\delta$ を定めます．まず $f(\varnothing) = \varnothing$ とします．長さ n の二進列 s に対する $f(s)$ が見いだされたとしましょう．$f(s)$ を含む $\mathbb{P}_\delta$-ジェネリック集合 F_s をひとつ固定して $\dot{a}_{F_s}$ を考えると，これはひとつの実数をあらわします．この実数を含む，長さ $1/n$ 未満の有理開区間 I_s を選び，F_s に属し $f(s)$ を拡大する q_s を $q_s \Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} \dot{a} \in \check{I}_s$ となるようにとります．このとき，I_s は，長さ n の相異なる二進列 s と t について $\overline{I_s} \cap \overline{I_t} = \emptyset$ が成立するようにとってあるものとします．このように $\{ q_s : s \in {}^n2 \}$ が選ばれたとして，つぎに，q_s の延長 $p_{s^\frown 0}$ と $p_{s^\frown 1}$ を

$$\forall s, t \in {}^n2 \, \forall i, j \in \{0, 1\} \left[s^\frown i \neq t^\frown j \implies \langle p_{s^\frown i}, p_{t^\frown j} \rangle \in \bigcap_{k<n} \big(Y_k \cap (X_k \times X_k) \big) \right]$$

となるようにとります．そうしておいて $f(s^\frown i) = p_{s^\frown i}$ とおきます．

この要領で関数 f が定められたとして，${}^\omega 2$ の任意の要素 σ に対して，

$$F_\sigma = \big\{ \, p \in \mathbb{P}_\delta : \exists n \in \omega \, (\, f(\sigma|n) \leq p \,) \big\}$$

と定めます．すると，F_σ は M 上 $\mathbb{P}_\delta$-ジェネリックであり，また，σ と τ を ${}^\omega 2$ の相異なる二つの要素とするとき，$F_\sigma \times F_\tau$ は M 上 $\mathbb{P}_\delta \times \mathbb{P}_\delta$-ジェネリックになっています．関数 $h : {}^\omega 2 \to \boldsymbol{R}$ を

$$h(\sigma) = \dot{a}_{F_\sigma}$$

と定めましょう．q_s の取り方から，$h(\sigma) \in I_{\sigma|n}$ であり，$I_{\sigma|n}$ の長さは $1/n$ 未満ですから，h はカントール空間 ${}^\omega 2$ から $\boldsymbol{R}$ への連続写像になっています．

さて，$\varnothing \Vdash_{\mathbb{P}_\delta} \dot{a} \notin M$ だったことを思い出しましょう．もしも $\sigma \neq \tau$ なのに $h(\sigma) = h(\tau)$ となったとしたら，$\dot{a}_{F_\sigma} = \dot{a}_{F_\tau}$ かつ $F_\sigma \times F_\tau$ は M 上 $\mathbb{P}_\delta \times \mathbb{P}_\delta$-ジェネリックなので，補題 14 により，$\dot{a}_{F_\sigma} \in M$ となってしまいますが，これは $\varnothing \Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} \dot{a} \notin M$ と矛盾します．というのも，$\mathbb{P}_\delta \subseteq_c \mathbb{P}_\lambda$ なので，補題 20 により，任意の $\mathbb{P}_\delta$-ジェネリック集合 F に対して，$\mathbb{P}_\lambda$-ジェネリック集合 F^* が存在して $F = F^* \cap \mathbb{P}_\lambda$ となるからです．$\dot{a} \in M^{\mathbb{P}_\delta}$ なので，$\dot{a}_F = \dot{a}_{F^*}$ が成立しています．だから，h は単射であり，その値域 $\mathrm{ran}(h)$ は ${}^\omega 2$ と位相同型，したがって完全集合です．

最後に，$\varnothing \Vdash_{\mathbb{P}_\lambda} (\varphi(\dot{a}))^{M[\dot{a}]}$ より，$(\varphi(h(\sigma)))^{M[h(\sigma)]}$，したがって $h(\sigma) \in A$ が成立します．こうして，A が完全集合 $\mathrm{ran}(h)$ を含むことが証明されました．□

5　内部モデル

定理 1 のモデルは, 第 4 節で得られた定理 2 のモデルの**内部モデル** (inner model) を取り出すことで得られます. 内部モデルとは, $\in$-論理式 $\varphi(\mathrm{u}, \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$ と集合 $a_1, \ldots, a_n$ から

$$\mathbf{M} = \{\, x : \varphi(x, a_1, \ldots, a_n) \,\}$$

によって定義されるクラス $\mathbf{M}$ が, 関係 $\in$ の普通どおりの解釈のもとで集合論の公理をみたしている場合をいいます. 代表的な例として, 遺伝的に順序数定義可能な集合のクラス $\mathbf{HOD}$ や構成可能的集合のクラス $\mathbf{L}$ があります.

原論文において Solovay は $\mathbf{HOD}$ の定義を変形した 順序数の可算列から遺伝的に定義可能な集合のクラス $\mathbf{HOD}({}^{\omega}\mathbf{ON})$ を用いました. この講義ではそれ以外に, 近年一般的となっている方法にしたがって, $\mathbf{L}$ の定義を変形した 実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ から構成可能的な集合のクラス $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ を用います. 内部モデル $\mathbf{HOD}({}^{\omega}\mathbf{ON})$ が構造の理論といえるものを欠いているのと比較して, $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ には (Jensen とその学派による) $\mathbf{L}$ の微細構造理論 (fine structure theory) にもとづく構造分析の方法があり, とくに決定公理 (Axiom of Determinacy) との関係で詳しく調べられています.

内部モデル $\mathbf{HOD}({}^{\omega}\mathbf{ON})$ と $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ の定義を述べるにあたって, まず定義の発想の源泉となっている遺伝的順序数定義可能な集合のクラス $\mathbf{HOD}$ と構成可能的集合のクラス $\mathbf{L}$ のことを復習しましょう.

5.1　$\mathbf{L}$ と $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$

構成可能的集合のクラス $\mathbf{L}$ の定義はかなり複雑ですが, その複雑さの大部分は, 式

$$X \in \mathrm{Def}(A)$$

のきちんとした定義を書き下すところにあります. この式は, $X \subseteq A$ で, しかも X が構造 $(A, \in)$ においてなんらかの $\in$-論理式によって A の要素をパラメータとして定義されること, つまり,

$$X = \left\{\; a \in A \;:\; (\varphi(a, a_1, \ldots, a_n))^A \;\right\}$$

をみたす $\in$-論理式 $\varphi(\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$ と A の要素 a_1, ..., a_n が存在することを意味します. すべての $\in$-論理式にわたって φ が動くので, この式 $X \in \mathrm{Def}(A)$ をひとつの $\in$-論理式で書き下してしまえるというのは自明なことではありません. しかし, その証明については [7] か [10] で確認してもらうことにして, ここでは, $\mathrm{Def}(A)$ は集合論の形式化された言語における式で表現できる (しかもその定義はいわゆる $\Delta_1^{\mathbf{ZF}}$ で, $\mathbf{ZF}$ 集合論の任意の推移的モデルに対して絶対的である) ということを承認して先へ進みます.

構成可能的階層 (constructible hiearchy) $\langle \mathbf{L}_\alpha : \alpha \in \mathbf{ON} \rangle$ と**構成可能的集合の宇宙** (constructible universe) $\mathbf{L}$ は次のように再帰的に定義されます.

(1) $\mathbf{L}_0 = \emptyset$.
(2) $\mathbf{L}_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(\mathbf{L}_\alpha)$.
(3) δ が極限順序数のとき $\mathbf{L}_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} \mathbf{L}_\alpha$.
(4) $\mathbf{L} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} \mathbf{L}_\alpha$.

あきらかに $\mathbf{L}_\alpha \subset \mathbf{V}_\alpha$ となっています. 各 $\mathbf{L}_\alpha$ は推移的集合で, $\mathbf{L}_\alpha \cap \mathbf{ON} = (\mathbf{ON})^{\mathbf{L}_\alpha} = \alpha$ なので, $\alpha \in \mathbf{L}_{\alpha+1}$ となり, したがって, $\mathbf{ON} \subset \mathbf{L}$ です.

構成可能的集合の宇宙 $\mathbf{L}$ は, 最初 Gödel によって選択公理 $\mathbf{AC}$ と一般連続体仮説 $\mathbf{GCH}$ の $\mathbf{ZF}$ 集合論との無矛盾性の証明のために考案されました. Gödel の論法は, まず選択公理のない $\mathbf{ZF}$ 集合論において, $\mathbf{L}$ が $\mathbf{ZF}$ のモデルであること, すなわち $(\mathbf{ZF})^{\mathbf{L}}$ を証明し, ついで, $\mathbf{L}$ が**構成可能公理** (Axiom of Constructibility) $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ をみたすことを証明し, 最後に $\mathbf{ZF} + (\mathbf{V} = \mathbf{L})$ から $\mathbf{AC}$ と $\mathbf{GCH}$ を証明する, というものでした. この Gödel の議論のうち, $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ から $\mathbf{V}$ を整列する定義可能な順序づけの存在を示す部分は, われわれの議論にも関係があります.

定義可能部分集合全体の集合 $\mathrm{Def}(A)$ のひとつひとつの要素は, $\in$-論理式と A に属するパラメータによって決定されています. そこで, $\in$-論理式をたとえば単なる文字列とみなして自然数で表現してしまえば, 定義可能な全射

$$\theta_A : \omega \times {}^{<\omega}A \to \mathrm{Def}(A)$$

を与えることができます. しかも θ_A の定義は A によらない一様な定義にできます. さて, $\mathbf{L}_\alpha$ の整列順序づけ $<_\alpha$ が与えられているとしたら, それをもちいて, $\omega \times {}^{<\omega}\mathbf{L}_\alpha$ の整列順序づけ $<^*_\alpha$ を定義できます. $\mathbf{L}_\alpha$ の要素を $<_\alpha$ で整列させたあとへ, $\mathbf{L}_{\alpha+1} \setminus \mathbf{L}_\alpha$ の要素を, $<^*_\alpha$ と $\theta_{\mathbf{L}_\alpha}$ の組み合わせで整列させて並べれば, $<_\alpha$ から $\mathbf{L}_{\alpha+1}$ の整列順序づけ $<_{\alpha+1}$ を作り出す一様な手続きが与えられることになります. 極限順序数 δ の段階では, それより前の段階にある $\mathbf{L}_{\alpha+1} \setminus \mathbf{L}_\alpha$ を $<_{\alpha+1}$ で整列させれば, $\mathbf{L}_\delta$ の整列順序づけ $<_\delta$ が定義できます. こうして得られたすべての $<_\alpha$ の和を $<_L$ とすると, これが $\mathbf{L}$ 全体を整列させる順序づけになっていて, 各 $\mathbf{L}_\alpha$ は $<_L$ にかんする $\mathbf{L}$ の始切片になっていることがわかります. こうして, $\mathbf{ZF} + (\mathbf{V} = \mathbf{L})$ からはすべての集合が整列可能であることが導かれ,

$$\mathbf{V} = \mathbf{L} \implies \mathbf{AC}$$

が示されることになります.

構成可能的階層 $\langle \mathbf{L}_\alpha : \alpha \in \mathbf{ON} \rangle$ や順序づけ $<_L$ が, 絶対的な概念だけを用いて証明されていたことから, 次のことが導かれます.

補題 53.

(1) M を $\mathbf{ZF}$ 集合論の任意の推移的モデルとするとき,
 (a) $(\langle \mathbf{L}_\alpha : \alpha \in \mathbf{ON} \rangle)^M = \langle \mathbf{L}_\alpha : \alpha \in \mathbf{ON} \cap M \rangle$ かつ
 (b) $(\mathbf{L})^M = \mathbf{L} \cap M$
 が成立する.
(2) 推移的クラス $\mathbf{M}$ が $\mathbf{ON} \subseteq \mathbf{M}$ をみたし, $\mathbf{ZF}$ のモデルになっているならば,
 (a) $(\langle \mathbf{L}_\alpha : \alpha \in \mathbf{ON} \rangle)^{\mathbf{M}} = \langle \mathbf{L}_\alpha : \alpha \in \mathbf{ON} \rangle$ かつ
 (b) $(\mathbf{L})^{\mathbf{M}} = \mathbf{L}$ が成立する.
 (c) したがって, このとき $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{M}$ である.
 いいかえれば, $\mathbf{L}$ は最小の内部モデルである. □

実数全体の集合から構成可能的な集合の階層 $\langle \mathbf{L}_\alpha(\boldsymbol{R}) : \alpha \in \mathbf{ON} \rangle$ は, 構成可能的階層を次のように少しだけ変形することによって得られます.

(1) $\mathbf{L}_0 = \mathrm{TC}(\{\boldsymbol{R}\})$, (すなわち $\boldsymbol{R} \in A$ をみたす最小の推移的集合 A)*15.
(2) $\mathbf{L}_{\alpha+1}(\boldsymbol{R}) = \mathrm{Def}(\mathbf{L}_\alpha(\boldsymbol{R}))$.
(3) δ が極限順序数のとき $\mathbf{L}_\delta(\boldsymbol{R}) = \bigcup_{\alpha<\delta} \mathbf{L}_\alpha(\boldsymbol{R})$.
(4) $\mathbf{L}(\boldsymbol{R}) = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}} \mathbf{L}_\alpha(\boldsymbol{R})$.

このとき, $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ は **ZF** 集合論の推移的モデルであり, $\mathbf{ON} \cup \{\boldsymbol{R}\}$ を含んでいて, しかもそのようなもののうち最小のクラスになっています. すなわち,

(1) $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ は **ZF** 集合論をみたす.
(2) $\boldsymbol{R} \in \mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ である.
(3) $\mathbf{ON} \subset \mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ である.
(4) クラス $\mathbf{M}$ が **ZF** の推移的モデルで, $\mathbf{ON} \cup \{\boldsymbol{R}\} \subset \mathbf{M}$ となるなら, $\mathbf{L}(\boldsymbol{R}) \subseteq \mathbf{M}$ である.

$\mathbf{L}$ における整列順序づけに対応するものとしては, 全射

$$\mathbf{F} : \mathbf{ON} \times \boldsymbol{R} \to \mathbf{L}(\boldsymbol{R})$$

が $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ において定義可能です. しかしながら, たとえ **AC** を仮定しても, $\boldsymbol{R}$ の整列順序づけが $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ 内に存在する保証はないので, $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ は一般に選択公理 **AC** のモデルにはなりません. (→ [10] 第 VII 章演習問題 (E1)–(E4))

余談ながら, $\mathbf{ON} \times \boldsymbol{R}$ から $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ への全射 $\mathbf{F}$ を, $\mathbf{L}$ における整列順序づけ $<_L$ のさきほどの定義に倣って定めたとすると, ざっと計算したところで, $\beta_\alpha = \omega^{\omega\alpha} + \omega$, 極限順序数 δ に対しては $\beta_\delta = \omega^{\omega\delta}$ ととれば, $\mathbf{L}_\alpha(\boldsymbol{R}) \subseteq \mathbf{F}``(\beta_\alpha \times \boldsymbol{R})$ となります. したがって, $\alpha$ が $\alpha = \omega^\alpha$ をみたす, いわゆる $\varepsilon$-数である場合には, $\mathbf{L}_\alpha(\boldsymbol{R}) = \mathbf{F}``(\alpha \times \boldsymbol{R})$ となっていると仮定してさしつかえありません. とすると, ($\omega\alpha = \alpha$ をみたす) いわゆる分解不可能順序数に対する $\mathbf{L}_\alpha$ が $\mathbf{L}$ の微細構造論において重要な役割を果たすように, ε-数 α に対する $\mathbf{L}_\alpha(\boldsymbol{R})$ が, $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ の構造を解析するにあたって重要になるのかもしれません.

5.2 HOD と HOD($^\omega$ON)

構成可能的階層が, **ON** だけを所与として, $\mathrm{Def}(A)$ を繰り返し適用して, それまでに構成された集合から定義可能なものだけを付け加えて, いわば無から必要最小限の集合からなる世界を作り出していったのと比較して, 順序数定義可能な集合のクラスの定義は, すべての集合のクラス $\mathbf{V}$ での定義可能性に積極的に言及します.

集合 X が**順序数定義可能** (ordinal-definable) であるとは, なんらかの $\in$-論理式によって有限個の順序数をパラメータとして定義されること, つまり,

$$a = X \iff \varphi(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

をみたす $\in$-論理式 $\varphi(\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$ と順序数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が存在することを意味します. この場合, φ が集合論の宇宙全体 $(\mathbf{V}, \in)$ において解釈されていることに注意してください. 真理概念の形式的定義不可能性にか

*15 各段階で $\mathbf{L}_\alpha(\boldsymbol{R})$ が推移的集合になることを保証したいので $\mathbf{L}_0(\boldsymbol{R})$ はこのように定義されています. この集合 $\mathrm{TC}(\{\boldsymbol{R}\})$ が正体不明で気持ち悪いという人は, ω の冪集合 $\mathcal{P}(\omega)$ を代わりに用いてもよいでしょう. というのも, $\boldsymbol{R}$ と集合論的にはほぼ同値で, しかもそれ自身がひとつの推移的集合になっているからです.

んする Tarski の定理によれば, 集合論の言語の構文論をその言語の内部でどんなふうに定式化したとしても,

$$\mathbf{ZFC} \vdash \big(\varphi \iff \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)\big)$$

をすべての論理式 φ について成立させるような単一の式 ψ は存在しません[*16]. したがって, “順序数定義可能である” ということを集合論の $\in$-論理式で合法的に記述できるかどうかという点は, 前のサブセクションでの $\mathrm{Def}(A)$ の定義可能性にもまして, 疑わしく思えます.

しかしながら, Levy の**反映原理** (Reflection Principle) によれば, 有限個の式 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ を任意に固定すれば, これらの式が $\mathbf{V}_\alpha$ に対して絶対的となるような順序数 α が, $\mathbf{ON}$ 内に非有界に存在します. したがって, 特定の式 $\varphi(\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n)$ と特定の順序数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ にかんしては, (それらが与えられるたびに), 十分大きな順序数 α を固定して, $\alpha > \max(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, かつ

$$\forall a \in \mathbf{V}_\alpha \,\big(\, \varphi(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \iff \varphi(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{\mathbf{V}_\alpha} \big)$$

となっているようにできるわけです. したがって, 順序数定義可能という性質を “なんらかの $\mathbf{V}_\alpha$ において順序数をパラメータとして定義可能” という意味に解釈し直せば, これを単一の $\in$-論理式で表現することは可能になります. このように修正された意味で順序数定義可能な集合全体のクラスを $\mathbf{OD}$ と書きます. 順序数をパラメータに用いることを認めたおかげで, Tarski の定理から来る困難が回避できたわけで, パラメータなしの ($\mathbf{V}$ での) 定義可能性を単一の $\in$-論理式で定式化することは決してできません.

たとえば, あきらかに $\mathcal{P}(\omega) \in \mathbf{OD}$ ですが, ω のすべての部分集合が順序数定義可能であるという保証など, どこにもありません. この意味で, クラス $\mathbf{OD}$ は一般には推移的ではありません.

そこで, $X \in \mathbf{OD}$ かつ $\mathrm{TC}(X) \subset \mathbf{OD}$ となるような集合 X の全体のなすクラスを考え, それを $\mathbf{HOD}$ と書いて**遺伝的に順序数定義可能** (hereditarily ordinal-definable) な集合のクラスと呼びます. これは定義により推移的なクラスで, すべての順序数を含み, $\mathbf{ZFC}$ 集合論のモデルになります. $\mathbf{OD}$ 全体を整列させる順序づけが定義可能で, それは $\mathbf{HOD}$ に属する個々の集合の上に制限すれば $\mathbf{HOD}$ において定義可能となるので, $\mathbf{HOD}$ が選択公理 $\mathbf{AC}$ のモデルであることを, $\mathbf{ZF}$ の範囲内で証明することができます. (→ [7] 第 13 節および [10] 第 V 章第 2 節)

クラス $\mathbf{HOD}$ には, 補題 53 のような絶対性を示す結果はありません. というのも, 定義が累積階層 $\langle\, \mathbf{V}_\alpha : \alpha \in \mathbf{ON} \,\rangle$ 全体に依存していることから予想されるとおり, $\mathbf{OD}$ は絶対的でないからです. 累積階層や構成可能的階層が, なにもないところから一歩一歩集合が構成されていくプロセスを表現しているのに比べて, $\mathbf{OD}$ や $\mathbf{HOD}$ は, 順序数定義可能であるという条件をみたす集合を, しらみつぶし的に $\mathbf{V}$ 全体をくまなく探しまわって集めたとしか考えられないところがあり, たいへん超越的なものといえます.

さて, $\mathbf{OD}$ の定義が理解できれば, パラメータとして順序数の可算列をもちいることを認めた $\mathbf{OD}({}^\omega\mathbf{ON})$ の定義も難なく理解できます. $\in$-論理式 $\varphi(\mathrm{u}, \mathrm{v})$ と ${}^\omega\mathbf{ON}$ の要素 s が与えられたとき, $s \in \mathbf{V}_\alpha$ かつ

$$\forall a \in \mathbf{V}_\alpha \,\big(\, \varphi(a, s) \iff \varphi(a, s)^{\mathbf{V}_\alpha} \big)$$

をみたすような順序数 α は, 反映原理により, $\mathbf{ON}$ 内に非有界に存在します. 上の式に順序数のパラメータを有限個含めてもよいのですが, それらのパラメータは s の最初のいくつかの項にくりこんでしまえるので, そのような変更は実質的になんの違いも生みません.

[*16] ここで $\ulcorner\varphi\urcorner$ というのは, 集合論の言語の内部でその言語自身を形式化した際に, $\in$-論理式 φ に対応すると解釈できるオブジェクト, いわゆる φ のゲーデル数を意味します.

ともあれ, クラス $\mathbf{OD}({}^{\omega}\mathbf{ON})$ を, なんらかの $\mathbf{V}_\alpha$ において ${}^{\omega}\alpha$ の要素をパラメータとして定義可能であるような集合の全体と定義します. さらに, $X \in \mathbf{OD}({}^{\omega}\mathbf{ON})$ かつ $\mathrm{TC}(X) \subset \mathbf{OD}({}^{\omega}\mathbf{ON})$ となるような集合 X の全体のなすクラスを考え, それを $\mathbf{HOD}({}^{\omega}\mathbf{ON})$ と書きます. すると, $\mathbf{HOD}({}^{\omega}\mathbf{ON})$ はすべての順序数とすべての実数を含む推移的クラスで, **ZF** 集合論のモデルになっています. したがって, $\mathbf{L}(\boldsymbol{R}) \subseteq \mathbf{HOD}({}^{\omega}\mathbf{ON})$ が成立し, $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ に属する集合はすべて, なんらかの順序数の可算列をパラメータとして定義可能であることになります.

5.3 定理 1 の証明

第 4 節での定理 2 の証明において構成されたモデル $M[G]$ の内部モデル $(\mathbf{HOD}({}^{\omega}\mathbf{ON}))^{M[G]}$ と $(\mathbf{L}(\boldsymbol{R}))^{M[G]}$ が, 定理 1 で要求されているモデルになっていることを証明します.

以下, 定理 1 の証明が終わるまで, $M[G]$ の中で議論します.

定理 2 により, $\mathbf{HOD}({}^{\omega}\mathbf{ON})$ に属する実数の集合は, ルベーグ可測でベールの性質を持ち, もしも可算でなければ完全集合を含みます. これらの性質がすべて, 量化子 $\exists$ と $\forall$ の範囲が ω や $\boldsymbol{R}$ や ${}^{\omega}\omega$ に限定された式, すなわち射影的 (projective) な式によって記述されることに注意してください. たとえば “A はルベーグ可測である” は,

$$\begin{aligned}\exists c_0, c_1 \in {}^{\omega}\omega\ \big[\, & c_0, c_1 \in \mathbf{BC} \\ & \wedge \forall x \in \boldsymbol{R}\,[\, x \in B_{c_0} \implies x \in A \wedge x \in A \implies x \in B_{c_1}\,] \\ & \wedge \mathrm{meas}(B_{c_1} \setminus B_{c_0}) = 0 \,\big]\end{aligned}$$

であり, $c_0, c_1 \in \mathbf{BC}$ や $\mathrm{meas}(B_{c_1} \setminus B_{c_0}) = 0$ は, $\exists$ と $\forall$ の範囲を ω あるいは ${}^{\omega}\omega$ に限定した式で記述されています. ところが, あきらかに $\boldsymbol{R}, {}^{\omega}\omega \in \mathbf{HOD}({}^{\omega}\mathbf{ON})$ です. したがって, すべての射影的な式, とくに “A がルベーグ可測である”, “A がベールの性質を持つ”, “A は可算集合である”, “A は完全集合を含む” といった式は, $\mathbf{HOD}({}^{\omega}\mathbf{ON})$ に対して絶対的です. したがって, $\mathbf{HOD}({}^{\omega}\mathbf{ON})$ に属する任意の実数の集合 A は (ルベーグ可測 $)^{\mathbf{HOD}({}^{\omega}\mathbf{ON})}$ で (ベールの性質をもち $)^{\mathbf{HOD}({}^{\omega}\mathbf{ON})}$, (不可算であれば完全集合を含む $)^{\mathbf{HOD}({}^{\omega}\mathbf{ON})}$ ことになります.

サブセクション 5.2 においてみたとおり, $\mathbf{L}(\boldsymbol{R}) \subseteq \mathbf{HOD}({}^{\omega}\mathbf{ON})$ となっています. また, $\boldsymbol{R}, {}^{\omega}\omega \in \mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ であることもあきらかです. したがって, $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ に属する任意の実数の集合は (ルベーグ可測 $)^{\mathbf{L}(\boldsymbol{R})}$ で (ベールの性質を持ち $)^{\mathbf{L}(\boldsymbol{R})}$, (不可算であれば完全集合を含みます $)^{\mathbf{L}(\boldsymbol{R})}$.

以上で, $\mathbf{HOD}({}^{\omega}\mathbf{ON})$ や $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ においてはすべての集合がルベーグ可測でベールの性質を持ち, 可算であるかまたは完全集合を含むことが, “おおむね” 証明されています. ただし, ルベーグ測度やベールの性質や完全集合定理について $\mathbf{HOD}({}^{\omega}\mathbf{ON})$ や $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ で議論ができるためには, これらの内部モデルが従属選択の公理 **DC** を満たしていることが前提条件になっていることに注意しましょう. ですから, 従属選択の公理 **DC** が $\mathbf{HOD}({}^{\omega})$ と $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ において成立していることの証明が必要です.

命題 54.

$$\mathbf{ZF} + \mathbf{DC} \vdash (\mathbf{DC})^{\mathbf{L}(\boldsymbol{R})}.$$

[証明] クラス $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ に属する二項関係 r が (整礎的でない $)^{\mathbf{L}(\boldsymbol{R})}$ ものとする. このとき r は真の宇宙 $\mathbf{V}$ においても整礎的でない. したがって, r-無限下降列 $\boldsymbol{x} = \langle x_n : n \in \omega \rangle$ が存在する. この無限下降列 $\boldsymbol{x}$ が $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$

に属するなら世話はないが, そうは問屋が卸すかどうかわからないので, $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ に属する r-無限下降列を別に調達する必要がある. うまいぐあいに, $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ 上で定義可能な全射 $\mathbf{F}:\mathbf{ON}\times\boldsymbol{R}\to\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ が存在する. そして, 先ほどの列 $\boldsymbol{x}$ の各項 x_n は $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ の要素には違いないので, $\mathbf{V}$ で成立している可算選択公理により, 実数列 $\langle\, a_n : n\in\omega\,\rangle$ と順序数列 $\langle\, \xi_n : n\in\omega\,\rangle$ を, $x_n=\mathbf{F}(\xi_n,a_n)$ となるようにとれる. すると, 順序数列はともかく, 実数列 $\langle\, a_n : n\in\omega\,\rangle$ は一つの ${}^\omega\omega$ の要素をもちいて表示できるので, $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ に属する. そこで, $\mathbf{ON}\times\omega$ 上の二項関係 s を,

$$\langle\, \langle\xi,m\rangle,\langle\eta,n\rangle\,\rangle\in s \iff n=m+1\wedge\langle\,\mathbf{F}(\xi,a_m),\mathbf{F}(\eta,a_n)\,\rangle\in r$$

によって定義すると, $s\in\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ であり, s は 無限下降列 $\langle\,\langle\xi_n,n\rangle : n\in\omega\rangle$ をもつから整礎的でない. 整礎的であるという性質はすべての順序数を含むような任意の推移的モデルに対して絶対的だから, (s は整礎的でない $)^{\mathbf{L}(\boldsymbol{R})}$. しかも, s の定義域 $\mathbf{ON}\times\omega$ は選択公理を用いるまでもなく整列可能である. したがって, $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ において s-無限下降列 $\langle\,\langle\eta_n,i_n\rangle : n\in\omega\,\rangle$ を, 選択公理を用いずに見いだすことができる. このとき, $\langle\,\mathbf{F}(\eta_n,i_n) : n\in\omega\,\rangle$ は, $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ に属する r-無限下降列になっている. □

補題 55. 順序数の可算列全体のクラス ${}^\omega\mathbf{ON}$ から $\mathbf{OD}({}^\omega\mathbf{ON})$ の上への定義可能な写像が存在する.

[証明] 文献 [10] の第 V 章第 1 節では, 任意の集合 A について, 構造 $(A,\in)$ において (パラメータなしで) 定義可能な A 上の n 項関係すべてを数え上げる列 $\langle\,\mathrm{En}(m,A,n) : m\in\omega\,\rangle$ が定義されている. [10] ではこれをクラス $\mathbf{OD}$ の定式化に利用するのだが, そこでの議論を少し変形して, 写像 $\mathbf{E}:{}^\omega\mathbf{ON}\to\mathbf{OD}({}^\omega\mathbf{ON})$ を次のように定義することができる: $f\in{}^\omega\mathbf{ON}$ だとする. もしも $f=(\beta,m)^\frown f'$, つまり, $f(0)=\beta$, $f(1)=m$, $\forall k\,[\,f'(k)=f(k+2)]$ で, $m\in\omega$, $f'\in{}^\omega\beta\cap\mathbf{V}_\beta$, かつ $\mathbf{V}_\beta$ の要素 a が存在して

$$\forall x\in\mathbf{V}_\beta\ \ (\,\langle x,f'\rangle\in\mathrm{En}(m,\mathbf{V}_\beta,2)\iff x=a\,)$$

となっているならば (そのような a はただ一つに定まるので) $\mathbf{E}(f)=a$ とする. この条件をみたさない f については $\mathbf{E}(f)=\emptyset$ とする. この定義で定まる $\mathbf{E}$ が ${}^\omega\mathbf{ON}$ から $\mathbf{HOD}({}^\omega\mathbf{ON})$ の上への写像になることは, [10] の第 V 章の方法でチェックできる. □

したがって, $\mathbf{HOD}({}^\omega\mathbf{ON})$ の要素のあいだには, 一般には定義可能な整列順序づけはありませんが, ${}^\omega\mathbf{ON}$ の要素による, ある種の “番号づけ” は存在します. いっぽう, ${}^\omega({}^\omega\mathbf{ON})$ と ${}^\omega\mathbf{ON}$ のあいだには定義可能な全単射が存在しますから, 次の補題が成立します. これには $\mathbf{V}$ での可算選択公理が必要です.

補題 56. 内部モデル $\mathbf{HOD}({}^\omega\mathbf{ON})$ は可算列について閉じている. すなわち, f を $\mathbf{HOD}({}^\omega\mathbf{ON})$ の要素の任意の可算列とすれば, $f\in\mathbf{HOD}({}^\omega\mathbf{ON})$ である. □

この補題と, 命題 54 の証明の中で論じた, 関係の整礎性が絶対的であることから, 次の命題が導かれます.

命題 57.

$$\mathbf{ZF}+\mathbf{DC}\vdash(\mathbf{DC})^{\mathbf{HOD}({}^\omega\mathbf{ON})}.\ \square$$

以上で定理 1 の証明が完了しました.

なお, $\mathbf{ZF}$ と決定公理 $\mathbf{AD}$ からは, $\mathbf{V}$ で $\mathbf{DC}$ が成立しているかどうかにかかわらず, $(\mathbf{DC})^{\mathbf{L}(\boldsymbol{R})}$ が導かれることも知られています (Kechris [9] による). いっぽう, $\mathbf{ZF}$ と $\mathbf{AD}$ から $\mathbf{DC}$ を導くことはできません (Solovay と Woodin による). Kechris はこのことを, $\mathbf{ZF}+\mathbf{AD}$ と $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ の関係が $\mathbf{ZF}$ と $\mathbf{L}$ の関係に相当すると, 言い表しています.

6　関連する話題とその後の展開

ここでは原論文で言及されたさまざまな結果と予想の, その後の展開についてお話ししましょう.

6.1　到達不可能基数の仮定について

到達不可能基数の存在という仮定は本当に必要なのでしょうか. 定理 1 と定理 2 は完全集合に関連する主張を含んでいます. そして, “すべての不可算な $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が完全集合を含む” という仮説から, $\mathbf{V}$ での最初の不可算基数 ω_1 が $\mathbf{L}$ から見ると到達不可能基数になっていることが導かれる (→文献 [18]) ので, これらの定理においては到達不可能基数の存在の仮定は本質的に必要です. そのことを述べたあと, Solovay はこう続けます.

> ただし, $\mathbf{ZF{+}DC{+}LM}$ の推移的モデルの存在が, $\mathbf{ZFC}$ 集合論のもとで, $\mathbf{ZFC}$ の推移的モデルの存在から導かれるというのは, 正しいように思われる. (原論文 p.1)

ところが, そうではありませんでした. 1984 年に発表された論文 [16] において, S.Shelah は, $\mathbf{ZF{+}DC{+}LM}$ だけから, $\mathbf{V}$ での ω_1 が $\mathbf{L}$ において到達不可能基数になっていることを導きました. つまり, ルベーグ可測性と到達不可能基数の存在は無矛盾性の意味で等価になっているわけです. Shelah のこの結果の組み合わせ論的な証明が, 同じ雑誌の同じ号に掲載された Raisonnier の論文 [14] にあります.

6.2　決定公理について

定理 1 で与えられたモデルでは, “$\boldsymbol{R}$ のあらゆる部分集合が高々 ω_1 個のボレル集合の和に分解される” ということを, Levy と Solovay は証明しました. 決定公理 $\mathbf{AD}$ と $\mathbf{DC}$ があれば, ω_1 個のボレル集合の和は $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合になることが示されるので, Solovay のモデルでは $\mathbf{AD}$ は成立していません.

Solovay はこのことについて次のように述べます:

> この結果は, しかるべき巨大基数公理から $\mathbf{AD}^{\mathbf{L}(\boldsymbol{R})}$ が導かれるだろうという著者の予想に冷水を浴びせるかと思われた. しかしもっと詳しく検討すると, 今回の結果とこの予想の間には, なんら衝突がないことがわかる. (原論文 p.2)

このように, 1970 年の時点で Solovay は巨大基数公理が $\mathbf{AD}$ の無矛盾性を導くことを予想していたわけです. 1980 年代後半になって, この予想は Martin, Steel, Woodin といった人たちによって確かめられました. 最初は超コンパクト基数の存在から $(\mathbf{AD})^{\mathbf{L}(\boldsymbol{R})}$ が導かれ, 最終的には, 無限個のウディン基数とそれらすべてより大きな可測基数が存在すれば $(\mathbf{AD})^{\mathbf{L}(\boldsymbol{R})}$ が成立すること, そして, $\mathbf{AD}$ の無矛盾性は無限個のウディン基数の存在の無矛盾性と等価であることが示されました. (このあとのサブセクション 6.6 も参照してください)

6.3　ポテンシャル論との関連

Solovay のモデルにおいて, 3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の任意の点集合が逆二乗ポテンシャルの意味で**容量可能** (capacitable) であることが, J.Mycielski によって指摘されました.

物理学からのイメージで説明すれば, 3 次元の点集合 E の**容量** (capacity) とは, E 内に電荷を分布させることがその周囲の電場にどれだけの電位差を生み出すかを, 電位と電荷の比で表したものです. しかしながら, こんにちでは容量の理論はこうした物理学的イメージを離れて G.Choquet による抽象的な一般論として展開されており, 容量可能性はその文脈で定義されます. 容量は測度ではありませんが, 測度に似た性質を持ち, 可測性と類比的な “容量可能性”(可容性) を, 点集合の性質として考えることができます. 容量可能性は解析集合

($\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合) の特質のひとつですが, 3 次元空間での逆二乗ポテンシャルから導かれる容量などの特別な容量に関しては, このようにすべての点集合に容量可能性を拡張することが可能なわけです. いっぽう, 3 次元空間の補解析集合 ($\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合) で逆二乗ポテンシャルの意味で容量可能でないものがある, という命題が構成可能公理 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ から導かれます.

Mycielski の指摘の要点は, Solovay のモデルにおいて次の命題が成立していることにありました.

命題 58. 定理 1 の Solovay のモデルにおいて, **測度的一意化原理** (Measure Uniformization Principle, **MUP**) と呼ばれる次の命題が成立する: 数直線 $\boldsymbol{R}$ 上の二項関係 r が

$$\forall x \in \boldsymbol{R} \exists y \in \boldsymbol{R}\ \langle x, y\rangle \in r$$

をみたしているとき, ボレル可測関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が存在して,

$$\{\, x \in \boldsymbol{R} : \langle x, f(x)\rangle \notin r \,\} \in \mathcal{N}$$

をみたす. □

この命題 **MUP** が, Choquet の文献 [2] の用語で次数 ∞ の交代関数であるような容量にかんする, 任意の集合の容量可能性と同値であることが, D.Busch らによって確認されました. この命題 **MUP** は, **ZF+DC** のもとで決定公理 **AD** から導かれることや, 同じく **ZF+DC** のもとで完全集合定理 **PS** を導くこと (→文献 [15]) が知られており, それ自身大変興味深いものです.

6.4 マーティンの公理との関連

原論文の p.3 において, 定理 2 での (a') すなわち連続体仮説 **CH** を, その他の仮説, たとえば $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ などに置き換えられることが指摘されています. Solovay はそれに続いて, 同様のモデルで **CH** の否定に加えてマーティンの公理 **MA** をみたすものが作れるかと自問し, 自ら次のように答えています.*17

> そのようなモデルは, Kunen のあるリマークを利用して得ることができるけれども, 基礎モデルの巨大基数として, たんなる強到達不可能基数でなく弱コンパクト基数をもちいる必要がある. 基数に関するこの仮定は, もっと弱められるように思われる. (原論文 p.4)

ところが, 1985 年の論文 [5] で L.Harrington と S.Shelah が示したところによると, **ZFC** に **CH** の否定と **MA** と, “すべての射影集合はルベーグ可測である” との仮説を付け加えたものが, 弱コンパクト基数の存在と無矛盾性の意味で等価になります. つまり, Kunen と Solovay の結果における弱コンパクト基数の存在の仮定は, Solovay の予想に反して, 少しも弱めることができないのです.

6.5 自然数の無限集合の組み合わせ論

自然数の集合 (ω の部分集合) a に対して, $[a]^\omega$ を a の無限部分集合全体の集合とします. 次の命題を $\omega \to (\omega)^\omega$ と略記します: $[\omega]^\omega = \mathcal{A}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_n$ と有限個の部分集合に $[\omega]^\omega$ を分割したとき, ω の無限部分集合 a が存在して, $[a]^\omega$ がどれかひとつの $\mathcal{A}_i$ に含まれる. 選択公理 **AC** があれば, $\omega \to (\omega)^\omega$ の反例を簡単に作ることができます. というのも, $[\omega]^\omega$ をカントール空間 ${}^\omega 2$ の部分集合と思って位相を与え (可分な完備距

*17 引用文中にいう Kunen のリマークとは, λ が弱コンパクト基数であれば, $\mathbb{P}_\lambda$ によるジェネリック拡大のあとに続けて ccc 半順序によるジェネリック拡大をおこなって得られたモデルにおいては, $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ がサブセクション 6.6 で定義される意味においてソロヴェイモデルである, というものです.

離空間になります), ベルンシュタイン集合を考えればよいのです. 選択公理がなければ $\omega \to (\omega)^\omega$ の反例は構成できないことが, 文献 [12] において, A.R.D. Mathias によって指摘されました.

命題 59. 定理 1 の Solovay のモデルにおいて, $\omega \to (\omega)^\omega$ が成立する. □

自然数の集合 a と b について, $a \cap b$ が有限集合であるならば, a と b は**ほとんど交わりがない** (almost disjoint) といわれます. $\mathcal{A} \subset [\omega]^\omega$ で, $\mathcal{A}$ のどの二つの要素もほとんど交わりがないとき, そのような $\mathcal{A}$ のことを **a.d. 族** (almost disjoint family) と呼びます. 無限個の要素からなる (包含関係の意味で) 極大な **a.d. 族**のことを **m.a.d. 族** (maximal almost disjoint family) と呼びます. $2^{\aleph_0}$ 個の要素を持つ a.d. 族を作ることは簡単にできます. ツォルンの補題を用いれば, どんな a.d. 族も m.a.d. に拡張できますが, 選択公理のない集合論ではこのことは必ずしも可能ではありません. Mathias は m.a.d. 族について次の結果を出しました.(→ [12] の第 5 節)

命題 60. 基礎モデルの強マーロ基数から出発して作られた Solovay のモデルにおいては, m.a.d. 族は存在しない. □

この結果での強マーロ基数の仮定も, 弱めることはできないようです.

6.6 ひとつの集合論的仮説としての "$\mathrm{L}(\boldsymbol{R})$ は Solovay のモデルである"

現在では, Solovay の原論文が書かれた時期 (1960 年代後半〜1970 年頃) と比較して, 巨大基数の研究が著しく発展しています. その概要は Kanamori の [8] や松原の [20] で見ることができます. この発展の嚆矢となったのは Woodin の次の結果でした.

命題 61. κ を超コンパクト基数とするとき, 初等的埋め込み

$$j : (\mathbf{L}(\boldsymbol{R}))^{\mathbf{V}} \to (\mathbf{L}(\boldsymbol{R}))^{\mathbf{V}^{\mathbb{P}_\kappa}}$$

が存在する. □ (→ [7] p.650, 定理 34.6)

超コンパクト基数 (supercompact cardinal) の存在のもとでは, $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ が定理 1 のモデルと初等的に同値になっていることになります. つまり, 超コンパクト基数の存在から, しかるべく定義可能な実数の集合 (たとえば射影集合など) はすべてルベーグ可測でベールの性質を持つ, ということが導かれるのです. この命題の超コンパクト基数は, のちに超強基数 (superstrong cardinal) へ弱められ, これをさらに小さな基数によって置き換える努力の中から, 今日ウディン基数と呼ばれる基数の概念が見いだされたそうです.

この発見のインパクトを正しく評価するには, たとえば可測基数のような, もっと弱い巨大基数公理の場合には, $\mathbf{L}[\mu]$ とか Jensen のコアモデル $\mathbf{K}$ のように, 構成可能的集合の宇宙 $\mathbf{L}$ と多少なりとも類比的な微細構造理論を有する "適切な内部モデル" が存在し, そこでは巨大基数公理と, 連続体の定義可能な整列順序づけが共存している, ということ, そして, 各々の巨大基数公理にたいしてそのような "適切な内部モデルの理論" を見いだすことが, 1970 年代から 80 年代にかけての, 巨大基数公理研究のひとつの指導原理となっていた, という状況を理解する必要があります. 超コンパクト基数についても, 当然そのことは試みられていたのですが, Woodin の発見は, 超コンパクト基数の内部モデルをそれまでと同じような形で得ることは難しいことを, 端的に示しているわけです.

この発見がその後, 超コンパクト基数のもとで $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ が $\mathbf{AD}$ をみたす, という Martin と Steel と Woodin の結果につながっていくことは, すでにサブセクション 6.2 で述べたとおりです. またそれとは別に, 巨大基数の仮定のもとでの $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ が, ジェネリック拡大をするまでもなく, あらかじめ Solovay の定理 1 のモデルと同様なものになっているという観点から, 一般概念としての "Solovay のモデル" が論じられるようにもなりました.

定義 27. M と N が $\mathbf{ZFC}$ 集合論の推移的モデルで, $M \subseteq N$ だったとする. ω_1^N を λ と書くとき, (λ が強到達不可能基数 $)^M$ であり, M 上のある $\mathbb{P}_\lambda$-ジェネリック集合 G について $\boldsymbol{R} \cap M[G] = \boldsymbol{R} \cap N$ が成立するとき, (いいかえれば, N での $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ が M を基礎モデルとして作られた定理 1 のモデルと一致するとき), N における $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ は M 上の**ソロヴェイモデル** (a Solovay model over M) であるといわれる. □

この定義はここまでの話の流れから言えば自然なものですが, N において成立する命題を, M 上の $\mathbb{P}_\lambda$-ジェネリック集合という, 一般には N からはみ出すであろう対象を媒介として述べている点に不満が残ります. たとえば, 真の宇宙 $\mathbf{V}$ において $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ が $\mathbf{L}$ 上のソロヴェイモデルであるかどうかを, どうやって検証すればいいかがわからないのです. この定義と同等で, N の外にある対象に訴えない特徴づけが, 次の命題で与えられます.

命題 62. $M \subseteq N$ で, M と N は集合論の推移的モデルだとする. $(\mathbf{L}(\boldsymbol{R}))^N$ が, M 上のソロヴェイモデルであるためには, 次の (1) と (2) の成立が必要かつ十分である:

(1) N における任意の実数 x について, ω_1^N は (強到達不可能基数 $)^{M[x]}$ である.
(2) N における任意の実数は, N において可算であるような M の半順序による M のジェネリック拡大に属する.

[証明] 条件の必要性は明らか. 十分性をいう. つまり, 条件 (1) と (2) を仮定して, N における $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ が M 上のソロヴェイモデルになっていることを証明する. $\lambda = \omega_1^N$ とおく. いま, N において, 半順序 Q を

$$Q = \left(\bigcup_{\alpha<\lambda} \left\{\, q \subseteq \mathbb{P}_\alpha \,:\, q \text{ は } M \text{ 上 } \mathbb{P}_\alpha\text{-ジェネリック} \,\right\} \right)^N$$

と定義する. N においては $\lambda = \omega_1$ であり, M においては λ は強到達不可能であるから, λ より小さなどの α についても, M における $\mathbb{P}_\alpha$ の冪集合 $\mathcal{P}(\mathbb{P}_\alpha) \cap M$ は N において可算である. したがって, M 上 $\mathbb{P}_\alpha$-ジェネリックなフィルターは N にたしかに存在するので, Q は空ではない.

集合 Q を $q \leq_Q q' \iff q \supseteq q'$ によって順序づけよう. H を N 上の Q-ジェネリック集合とし, $G = \bigcup H$ とする. このとき $G \in \mathrm{filt}(\mathbb{P}_\lambda)$ となることは容易に確かめられる. $D \in \mathrm{den}(\mathbb{P}_\lambda) \cap M$ としよう. すると, 集合

$$C = \{\, \alpha < \lambda \,:\, D \cap \mathbb{P}_\alpha \in \mathrm{den}(\mathbb{P}_\alpha) \,\}$$

は λ の非有界な部分集合である. $\gamma < \alpha < \lambda$ のとき $\mathbb{P}_\gamma \subseteq_c \mathbb{P}_\alpha$ なので, 補題 20 により,

$$\mathcal{D} = \left\{\, q \in Q \,:\, \exists \alpha \in C\, [\, q \in \mathbb{P}_\alpha \,] \,\right\}$$

が Q において稠密であることがわかる. したがって, $H \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. この共通部分から要素 g をとれば $g \cap D \neq \emptyset$ なので, $G \cap D \neq \emptyset$ となる. こうして, G は M 上 $\mathbb{P}_\lambda$-ジェネリックである.

あとは $\boldsymbol{R}\cap M[G]=\boldsymbol{R}\cap N$ がいえればよい．まず，$x\in\boldsymbol{R}\cap N$ だったとする．Q の部分集合

$$E_x=\{\, q\in Q\ :\ x\in M[q]\,\}$$

とおくとき $E_x\in\mathrm{den}(Q)$ となることを示そう．そうすれば，$q\in H\cap E_x$ をとって $x\in M[q]\subseteq M[G]$ とできる．

そのために，Q の任意の要素 q_0 が与えられたとする．q_0 は M 上 $\mathbb{P}_{\alpha_0}$-ジェネリックだったとする．$\alpha_0\geq\omega$ だったと仮定しても一般性は損なわれない．そこで，M において全射 $f_0\colon\alpha_0\to\mathbb{P}_{\alpha_0}$ が存在し，q_0 はこの f_0 によって α の部分集合 $f_0^{-1}``q_0$ で表示される．ところが，$N$ において $\alpha_0$ は可算順序数であるから，$f_0^{-1}``q_0$ は N の実数でコード化できる．そこで，N に実数 y が存在して，$x,q_0\in M[y]$ となっている．仮定により，N において可算な M の半順序 P と，M 上の P-ジェネリック集合 g がとれて，$y\in M[g]$ となる．λ 未満の順序数 α_1 をじゅうぶん大きくとれば，$\alpha_0<\alpha_1$ かつ M において $|P|<|\alpha_1|$ となる．このとき $(P\times\mathbb{P}_\alpha\sim\mathbb{P}_{\alpha_1})^M$ であるから M において P から $\mathbb{P}_{\alpha_1}$ への完備埋め込みがある．したがって最初から $P=\mathbb{P}_{\alpha_1}$ だったと仮定しても一般性は損なわれない．この意味で g のことを q_1 と書こう．q_1 は M 上 $\mathbb{P}_{\alpha_1}$-ジェネリックで，$q_0,x\in M[q_1]$ となっている．中間拡大補題 48 の証明の方法で，

$$\mathbb{P}'=\left\{\, p\in\mathbb{P}_{\alpha_1}\ :\ \mathrm{dom}(p)\cap(\alpha_0\times\omega)=\emptyset\,\right\}$$

とおけば，$\mathbb{P}_{\alpha_1}\simeq\mathbb{P}_{\alpha_0}\times\mathbb{P}'$ と M において因数分解され，$M[q_0]$ 上 $\mathbb{P}'$-ジェネリックな q' がとれて，$M[q_1]=M[q_0][q']$ が成立する．このとき $q_0\cup q'$ の生成する $\mathbb{P}_{\alpha_1}$ のフィルターを q_2 とすれば $M[q_2]=M[q_1]$ であり，$q_2\leq_Q q_0$ かつ $x\in M[q_2]$ となる．すなわち，q_2 は E_x に属する q_0 の拡大である．

逆に $\boldsymbol{R}\cap M[G]$ の要素 x が与えられたとして，$x\in N$ となることを示す．補題 49 により，このとき λ より小さな順序数 α が存在して，$x\in M[G\cap\mathbb{P}_\alpha]$ となる．ここで，α 以上 λ 未満の順序数 β について M 上 $\mathbb{P}_\beta$-ジェネリックとなる Q の要素の全体を考えると，それは先ほどと同様の議論により Q において稠密である．この集合と H との共通部分から要素 q をとれば $G\cap\mathbb{P}_\alpha\subset q$ であるから，$x\in M[q]$ であるが，$q\in N$ であるから結局 $x\in N$ である．□

したがって，内部モデル $\mathbf{M}$ と真の宇宙 $\mathbf{V}$ とのあいだに，命題 62 における条項 (1) と (2) が成立しているならば，$\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ は $\mathbf{M}$ 上のソロヴェイモデルだと主張してよいことになります．

さて，$\mathbf{M}$ を含む内部モデルが複数あるとすれば，それぞれに $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ が相対化されますから，“俺は $\mathbf{M}$ 上のソロヴェイモデルだぞ” と思っている[*18]ような内部モデルが複数個存在しうることになります．面白いことに，ω_1 を共有する限り，それらのモデルは初等的同値になります．

命題 63. 集合論の推移的モデル M, N_0, N_1 が

(i) $M\subseteq N_0\subseteq\mathbf{N_1}$.
(ii) $\omega_1^{N_0}=\omega_1^{N_1}$.
(iii) $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})^{N_0}$ と $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})^{N_1}$ がいずれも M 上のソロヴェイモデルである．

という条件をみたしたとすると，$(\mathbf{L}(\boldsymbol{R}))^{N_0}$ から $(\mathbf{L}(\boldsymbol{R}))^{N_1}$ への初等的埋め込みが存在する．

[*18] もっとも，一般に $\mathbf{M}\subset\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ とはならないでしょうから，この言い方には少し問題がありそうです．完全に $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ 内部の対象だけに言及しながら $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ が Solovay のモデルであることを特徴づけするような方法がないものでしょうか．

[証明] $\lambda = \omega_1^{N_0} = \omega_1^{N_1}$ とおき，M 上 $\mathbb{P}_\lambda$-ジェネリックな G_0 と G_1 を $(\mathbf{L}(\boldsymbol{R}))^{N_0} = (\mathbf{L}(\boldsymbol{R}))^{M[G_0]}$, $(\mathbf{L}(\boldsymbol{R}))^{N_1} = (\mathbf{L}(\boldsymbol{R}))^{M[G_1]}$, となるようにとる．このとき $\boldsymbol{R} \cap M[G_0] = \boldsymbol{R} \cap N_0 \subseteq \boldsymbol{R} \cap N_1 = \boldsymbol{R} \cap M[G_1]$ となる．

サブセクション 5.1 で述べた定義可能な全射 $\mathbf{F} : \mathbf{ON} \times \boldsymbol{R} \to \mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ を考えよう．$\xi, \eta \in \mathbf{ON} \cap M$ かつ $x, y \in \boldsymbol{R} \cap M[G_0]$ で，$(\mathbf{F}(\xi, x) = \mathbf{F}(\eta, y))^{M[G_0]}$ となっていたとする．中間拡大補題により，G_0' を $M[x,y][G_0'] = M[G_0]$ となるような $M[x,y]$ 上の $\mathbb{P}_\lambda$-ジェネリック集合とし，同様に G_1' をとる．すると，G_0' のある要素 p について

$$\left(p \Vdash \mathbf{F}(\check{\xi}, \check{x}) = \mathbf{F}(\check{\eta}, \check{y})\right)^{M[x,y]}$$

が成立するが，ここで強制されているのは基礎モデル $M[x,y]$ の要素だけに関する命題だから，対称性補題 16 により，最大要素 $\mathbb{1}$ が同じ式を強制する．したがって $M[x,y][G_1']$，すなわち $M[G_1]$ においても，$(\mathbf{F}(\xi, x) = \mathbf{F}(\eta, y))^{M[G_1]}$ となることがわかる．

したがって，$(\mathbf{L}(\boldsymbol{R}))^{M[G_0]}$ の要素 $(\mathbf{F}(\xi, x))^{M[G_0]}$ に $(\mathbf{L}(\boldsymbol{R}))^{M[G_1]}$ の要素 $(\mathbf{F}(\xi, x))^{M[G_1]}$ を対応させる写像を定義できる．この写像を j とすれば，等号が保たれることを示した先ほどの議論と同様にして，実数と順序数だけに言及する $\in$-式の真偽値は，すべて写像 j によって保たれることがわかる．ところが，$\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$ に起こるすべてのことは，$\mathbf{F}$ を媒介として順序数と実数にかんする命題に書き換えられる．したがって，j は初等的埋め込み写像である．$\square$

参考文献

[1] J. Bagaria and R. Bosch, *Proper forcing extensions and Solovay models*, Arch. Math. Logic, **43** (2004) pp.739–750.

[2] G. Choquet, *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier, **5**. (1955), pp.131–292.

[3] C.A. Di Prisco and S. Todorcevic, *Perfect-Set Properties in $L(\mathbb{R})[U]$*, Adv. Math., **139** (1998), pp.240–259.

[4] M. Foreman, M. Magidor, and S. Shelah, *Martin's Maximum, saturated ideals, and non-regular ultrafilters. Part I*, Ann. Math., **127** (1988), pp.1–47.

[5] L. Harrington and S. Shelah, *Some Exact Equiconsistency Results in Set Theory*, Notre Dame Journal of Formal Logic, **26**-2. (1985), pp.178–188.

[6] T. Jech, Set Theory (2nd Ed.), Springer (1997)

[7] —, Set Theory (3rd Ed.), Springer (2003)

[8] A. Kanamori, The Higher Infinite (2nd Ed.), Springer (2003). 邦訳: 『巨大基数の集合論』 (渕野 昌 訳) シュプリンガーフェアラーク東京 (2001)

[9] A.S. Kechris, *The Axiom of Determinancy Implies Dependent Choices in* $\mathbf{L}(\boldsymbol{R})$, The Journal of Symbolic Logic, **49**-1. (1984), pp.161-173.

[10] K. Kunen, Set Theory – an introduction to independence proofs, North-Holland (1980), 邦訳: (藤田 訳) 刊行準備中

[11] H. Lebesgue, *Intégrale, Longueur, Aire*, 邦訳: 『ルベーグ 積分・長さおよび面積』 (吉田耕作&松原稔 訳) 共立出版 (1969)

[12] A.R.D. Mathias, *Happy families*, Ann. Math. Logic, **1** (1977), pp.59–111.

[13] J.C. Oxtoby, MEASURE AND CATEGORY (second edition), Springer (1980).

[14] J. Raisonnier, *A mathematical proof S.Shelah's theorem on the measure problem and related results*, Israel J. Math., **48**-1 (1984), pp.48–56.

[15] J. Raisonnier and J. Stern, *The strength of measurability hypotheses*, Israel J. Math., **50**-4 (1985), pp.337–349.

[16] S. Shelah, *Can you take Solovay's inaccessible away?*, Israel J. Math., **48**-1 (1984), pp.1–47.

[17] S. Shelah and H. Woodin, *Large cardinals imply that every reasonably definable set of reals is Lebesgure measurable*, Israel J. Math., **70**-3 (1990), pp.381–394.

[18] R.M. Solovay, *On the cardinality of* Σ^1_2 *sets of reals*, in FOUNDATIONS OF MATHEMATICS (Symposium Commemorating Kurt Gdel, Columbus, Ohio, 1966) pp. 58–73, Springer (1969).

[19] S. Wagon, THE BANACH-TARSKI PARADOX, Cambridge UP.

[20] 松原 洋, 「集合論の発展 — ゲーデルのプログラムの視点から」, シリーズ『ゲーデルと 20 世紀の論理学』第 4 巻, 東京大学出版会 (2007), pp.149–225.