玄妙基数と精妙基数

藤田 博司

更新:2009 年 4 月 6 日*

概要

弱コンパクト基数より強いけれど $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ とは両立するような, 二つの巨大基数概念, 玄妙基数 (ineffable cardinals) と 精妙基数 (subtle cardinals) についての概説です. 新しいオリジナルな結果はありません.

はじめに

in·ef·fa·ble *adj.*
too great or extreme to be expressed or described in words: *the ineffable natural beauty of the Everglades.*
• not to be uttered: *the ineffable Hebrew name that gentiles write as Jehovah.*

—New Oxford American Dictionary

2008 年に翻訳出版したキューネンの『集合論・独立性証明への入門』(日本評論社) に, 玄妙基数という珍妙な訳語で登場したのは, 原文では ineffable cardinal と記されている巨大基数概念です. この ineffable というのは「言いあらわしようがない」という意味の形容詞です. 「神さま仏さまの, いわく言いようのない崇高さ. ああ, ありがたやアリガタヤ. . . 」というような場合に使う言葉のようです. もっと普通に「言表不能基数」と直訳してもよかったのですが, huge, supercompact, strong 等々の, ミもフタもない用語が多い巨大基数概念のなかにあって, ineffable や subtle といった言葉が放つほのかな文化の香りのようなものを少しでも表現したくて, ineffable を「玄妙」 subtle を「精妙」と訳すことにしました. といっても, subtle cardinal はキューネンの本では定義すらされていませんし, ineffable cardinal にしても, 第 VI 章の演習問題ですこし触れられているだけです. そこで, このノートでは, これらの基数の定義と基本的な属性を, わたくしの知りえた範囲でまとめておくことにします. ネタの仕入れ元については, 文献リストをご覧ください.

姉妹編のノート『基数と定常集合』([19]) や『弱コンパクト基数』([20]) を必要に応じて引用しますので, そちらもぜひご用意ください。

謝辞 このノートで引用したいろいろな結果に関連して, 薄葉季路さん (東北大学) にいろいろとご教示いただきました. ここに記して, 感謝の意を表します.

* 起稿:2009 年 1 月 19 日, 脱稿:2009 年 3 月 13 日, 最終組版日 2009 年 4 月 6 日 (`time: 791`)

1　玄妙基数と精妙基数

漸通玄妙理、
(ようやく玄妙の理を通じ)
深得坐忘心。
(深く坐忘の心を得る)

— 孟浩然*1

定義 1.1　無限基数 κ が **概玄妙** (almost ineffable) であるとは次の条件をみたすことである．集合の列 $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ が $\forall\alpha < \kappa(A_\alpha \subset \alpha)$ となるように与えられたとき, κ の部分集合 S を

$$\forall\alpha, \beta \in S\Big(\alpha < \beta \longrightarrow A_\alpha = A_\beta \cap \alpha\Big) \tag{I}$$

かつ,

$$|S| = \kappa$$

となるようにとれる．◀

定義 1.2　無限基数 κ が **玄妙** (ineffable) であるとは, 集合の列 $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ が $\forall\alpha < \kappa(A_\alpha \subset \alpha)$ となるように与えられたとき, 定義 1.1 における条件 (I) をみたす集合 S を κ の定常部分集合としてとれる場合にいう．◀

定義 1.3　無限基数 κ が **精妙** (subtle) であるとは次の条件をみたすことである．集合の列 $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ が $\forall\alpha < \kappa(A_\alpha \subset \alpha)$ となるように与えられたとき, κ の任意の club 部分集合 C から,

$$\alpha, \beta \in C, \quad \alpha < \beta, \quad A_\alpha = A_\beta \cap \alpha$$

をみたす二つの要素 α と β を取り出せる．◀

　これらの定義から, 玄妙基数が概玄妙であると同時に精妙であることは明らかです．実は概玄妙基数も精妙基数になります．

補題 1.4　概玄妙基数は精妙である．

[証明]　集合列 $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \in \prod_{\alpha<\kappa} \mathcal{P}(\alpha)$ と κ の club 部分集合 C が与えられたとしよう．いま, $\alpha \in C$ のとき $B_\alpha = A_\alpha$, $\alpha \notin C$ のとき $B_\alpha = \{\sup(C \cap \alpha)\}$ として集合列 $\langle B_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ を定めれば, $S \subset \kappa$ を $\alpha, \beta \in S$, $\alpha < \beta$ のとき $B_\alpha = B_\beta \cap \alpha$ で, $|S| = \kappa$ となるようにとれる．このとき

$$\forall\alpha, \beta \in S \setminus C\Big[\alpha < \beta \;\longrightarrow\; \sup(C \cap \alpha) = \sup(C \cap \beta)\Big]$$

となる．つまり, α と β の間に C の要素が全然ないことになるが, C は κ において共終だから, $S \setminus C$ は κ において有界となるはずだ．いっぽう $|S| = \kappa$ より S は κ において共終であり, したがって $S \cap C$ のほうが κ において共終である．いまここから二つの要素 α と β (ただし $\alpha < \beta$) をとれば, $A_\alpha = A_\beta \cap \alpha$ となっている．◀

　玄妙基数 (と, 概玄妙基数) の条件を次のように書き換えておくと便利です．

*1 **孟浩然** (もう こうねん, 689–740) 盛唐の詩人．引用文は五言律詩『遊精思題觀主山房』から．「春眠不覚暁」で始まる五言絶句『春暁』はあまりに有名．また, 彼の『宿業師山房期丁大不至』が、ハンス・ベートゲにインスピレーションを与え, グスタフ・マーラーの『大地の歌』第 6 楽章の歌詞の元になったと伝えられています．

補題 1.5 無限基数 κ が玄妙基数であるためには次のことが必要かつ十分である: 集合の列 $\left\langle A_\alpha \;\middle|\; \alpha < \kappa \right\rangle$ が $\forall\alpha < \kappa(A_\alpha \subset \alpha)$ となるように与えられたとき, κ の部分集合 A が存在して

$$\left\{ \alpha < \kappa \;\middle|\; A \cap \alpha = A_\alpha \right\}$$

が κ の定常部分集合になる.

[証明] 定義 1.1 の式 (I) が成立するような定常部分集合 S について $A = \bigcup\{ A_\alpha \mid \alpha \in S \}$ とすればよい. ◀

補題 1.6 無限基数 κ が概玄妙基数であるためには次のことが必要かつ十分である: 集合の列 $\left\langle A_\alpha \;\middle|\; \alpha < \kappa \right\rangle$ が $\forall\alpha < \kappa(A_\alpha \subset \alpha)$ となるように与えられたとき, κ の部分集合 A が存在して

$$\left| \left\{ \alpha < \kappa \;\middle|\; A \cap \alpha = A_\alpha \right\} \right| = \kappa$$

となる.

[証明] 補題 1.5 の証明と同様. ◀

2 精妙イデアル $\mathcal{I}^{\mathrm{Sbtl}}$

> 花を研究してその本性を明にするというは、自己の主観的臆断をすてて、花其物の本性に一致するの意である。理を考えるという場合にても、理は決して我々の主観的空想ではない、理は万人に共通なるのみならず、また実に客観的実在がこれに由りて成立する原理である。動かすべからざる真理は、常に我々の主観的自己を没し客観的となるに由って得らるるのである。これを要するに我々の知識が深遠となるというは即ち客観的自然に合するの意である。
>
> — 西田幾多郎*2

イデアルとフィルターについての基本的なことは, ノート [19] にまとめてあります. 不可算正則基数 κ 上の club フィルター NS^*_κ と, 可測基数上の正規超フィルターが正規フィルターの例として与えられていました. ここではさらに, 精妙フィルターおよび玄妙フィルターという二種類の正規フィルター (の候補) を導入します.

Club フィルターに先立って定常集合の概念が提示されたように, まず精妙集合の定義から出発します.

定義 2.1 基数 κ の部分集合 S が κ **において精妙である** (subtle in κ) , あるいは κ の**精妙部分集合**であるとは次のことである: κ の club 部分集合 C と, 各 α の部分集合 A_α を選んで作った集合列 $\left\langle A_\alpha \;\middle|\; \alpha \in S \right\rangle \in \prod_{\alpha \in S} \mathcal{P}(\alpha)$ が任意に与えられたとき, これに対して

$$\alpha, \beta \in C \cap S, \quad \alpha < \beta, \quad A_\alpha = A_\beta \cap \alpha \tag{1}$$

をみたす順序数 α と β が, 必ず存在する. ◀

次の補題はこの定義からすぐにわかります.

補題 2.2 (i) κ の精妙部分集合がひとつでも存在すれば, κ は精妙基数である. (ii) κ が精妙基数であれば, κ の club 部分集合はすべて κ の精妙部分集合である. (iii) A が κ の精妙部分集合で, $A \subset B \subset \kappa$ であれば, B

*2 **西田幾多郎** (にしだ きたろう, 1870–1945) 近代日本を代表する哲学者. みずからの参禅体験を西洋哲学の論理と対決させ独自の「西田哲学」を構築. 引用文は [17] 第二篇第 9 章からの抜書きです. 単に「イデアル」の洒落を探していただけのつもりが, こちらの身に不相応な深遠なエピグラフになってしまいました.

もまた κ の精妙部分集合である．(iv) κ の精妙部分集合は κ において定常である．(v) A が κ の精妙部分集合, C が κ の club 部分集合であれば, $A \cap C$ は κ の精妙部分集合である．◀

次の補題はこれほど簡単ではありませんが, このあとくり返し使われる重要なものです．これにより, 精妙部分集合の族が定常部分集合の族とよく似た振る舞いをすることがわかります．

補題 2.3 κ を精妙基数, X をその精妙部分集合とする．$f : X \to \kappa$ が退歩的 (regressive) な関数であれば, ある順序数 γ について, $f^{-1}``\{\gamma\}$ すなわち $\left\{\, \alpha \in X \;\middle|\; f(\alpha) = \gamma \,\right\}$ が, κ の精妙部分集合となる．

[証明] 背理法によることとし, どの順序数 $\gamma < \kappa$ についても $f^{-1}``\{\gamma\}$ が $\kappa$ において精妙でなかったとしよう．すると, 各 $\gamma$ ごとに, $\kappa$ の club 部分集合 $C_\gamma$ と集合列 $\langle\, A^\gamma_\alpha \mid \alpha \in f^{-1}``\{\gamma\} \,\rangle$ を, $f^{-1}``\{\gamma\}$ の精妙さの反例となるようにとれる．このとき,

$$\forall \gamma < \kappa \forall \alpha, \beta \in C_\gamma \cap f^{-1}``\{\gamma\} \Big(\alpha < \beta \;\to\; A^\gamma_\alpha \neq A^\gamma_\beta \cap \alpha \Big) \tag{1}$$

となっている．この仮定から矛盾が導かれることを示そう．

そのためまず $C = \triangle_{\gamma<\kappa} C_\gamma$ とおく．これは κ の club 部分集合である．

全単射 $\pi : \kappa \to \kappa{\times}\kappa$ を任意に固定し, $D = \{\, \alpha < \kappa \mid \pi``\alpha = \alpha \times \alpha \,\}$ とする．D は κ の club 部分集合である．

ここで, X が κ の精妙部分集合であることにより, 集合列 $\big\langle\, \pi^{-1}``(\{f(\alpha)\} \times A^{f(\alpha)}_\alpha) \mid \alpha \in X \,\big\rangle$ と club 集合 $C \cap D$ に対して,

$$\alpha, \beta \in C \cap D \cap X, \quad \alpha < \beta, \quad \pi^{-1}``(\{f(\alpha)\} \times A^{f(\alpha)}_\alpha) = \pi^{-1}``(\{f(\beta)\} \times A^{f(\beta)}_\beta) \cap \alpha \tag{2}$$

をみたす順序数 α と β がとれる．ここで α と β は D の要素だから順序数のペアリング関数 π のもとで閉じており, したがって $\{f(\alpha)\} \times A^{f(\alpha)}_\alpha = (\{f(\beta)\} \times A^{f(\beta)}_\beta) \cap (\alpha \times \alpha)$ となっている．とくに $f(\alpha) = f(\beta)$ である．この値を γ とすると, $\alpha, \beta \in C$ かつ $\gamma < \alpha < \beta$ より $\alpha, \beta \in C_\gamma$ であって,

$$\alpha, \beta \in C_\gamma \cap f^{-1}``\{\gamma\}, \quad A^\gamma_\alpha = A^\gamma_\beta \cap \alpha \tag{3}$$

となっている．これは式 (1) と矛盾である．◀

そこで, 定常部分集合に対するイデアル NS_κ の精妙部分集合バージョンとなるイデアルを考えましょう．

定義 2.4 精妙基数 κ の部分集合の集合 $\mathcal{I}^{\mathrm{Sbtl}}_\kappa$ と $\mathcal{F}^{\mathrm{Sbtl}}_\kappa$ を,

$$\mathcal{I}^{\mathrm{Sbtl}}_\kappa = \left\{\, X \subset \kappa \;\middle|\; X \text{ は } \kappa \text{ において精妙でない} \,\right\}, \quad \mathcal{F}^{\mathrm{Sbtl}}_\kappa = \left\{\, X \subset \kappa \;\middle|\; \kappa \setminus X \in \mathcal{I}^{\mathrm{Sbtl}}_\kappa \,\right\}$$

によって定める．◀

まず, $\mathcal{I}^{\mathrm{Sbtl}}$ が本当にイデアルになることを確認します．定義からあきらかに $\emptyset \in \mathcal{I}^{\mathrm{Sbtl}}$ です．κ が精妙基数であれば少なくとも κ 自身は κ において精妙ですから, $\kappa \notin \mathcal{I}^{\mathrm{Sbtl}}$ です．精妙でない集合の部分集合も精妙でないので, $\mathcal{I}^{\mathrm{Sbtl}}$ は包含関係 $\subset$ のもとで下向きに閉じています．もうひとつは, $\mathcal{I}^{\mathrm{Sbtl}}$ が和集合のもとで閉じていることですが,

補題 2.5 κ を精妙基数とする．κ の部分集合 X と Y が κ において精妙でないとすると, 和集合 $X \cup Y$ も κ において精妙でない．

[証明] まず, $X \cap Y = \emptyset$ であると仮定しても一般性は損なわれない．また, 補題 2.3 の証明のときのように全単射 $\pi : \kappa \to \kappa \times \kappa$ を固定する．

集合 X と Y がいずれも κ の精妙部分集合でないという仮定により, κ の club 部分集合 C と D, それと集合列 $\langle A_\alpha \mid \alpha \in X \rangle$ と $\langle B_\alpha \mid \alpha \in Y \rangle$ を

$$\forall\alpha, \beta \in X \cap C\big(\alpha < \beta \rightarrow A_\alpha \neq A_\beta \cap \alpha\big),$$
$$\forall\alpha, \beta \in Y \cap D\big(\alpha < \beta \rightarrow B_\alpha \neq B_\beta \cap \alpha\big)$$

となるようにとれる. C と D は $\pi``\alpha = \alpha \times \alpha$ をみたす順序数 $\alpha$ のみからなると仮定しても一般性は損なわれない. そこで, $\alpha \in X$ のとき $E_\alpha = \pi^{-1}``(\{0\} \times A_\alpha)$, $\alpha \in Y$ のとき $E_\alpha = \pi^{-1}``(\{1\} \times B_\alpha)$ とおいて集合列 $\langle E_\alpha \mid \alpha \in X \cup Y \rangle$ を考えると, これと $C \cap D$ が $X \cup Y$ の精妙さへの反例となる. ◀

同様の論法で $\mathcal{I}^{\mathrm{Sbtl}}_\kappa$ が κ-加法的であることも示せます. しかし, 実際にはもう少し強く, $\mathcal{I}^{\mathrm{Sbtl}}_\kappa$ は正規イデアルとなります.

念のため定義を確認します. 基数 κ 上のイデアル $\mathcal{I}$ が正規イデアルであるとは, それが自明でなく $\big(\kappa \notin \mathcal{I}\big)$, すべての有界集合を含み $\big(\forall\alpha < \kappa(\alpha \in \mathcal{I})\big)$, さらに, 対角和のもとで閉じている:

$$\Big\langle X_\alpha \;\Big|\; \alpha < \kappa \Big\rangle \in {}^\kappa\mathcal{I} \rightarrow \Big\{\beta < \kappa \;\Big|\; \exists\alpha < \beta\big(\beta \in X_\alpha\big)\Big\} \in \mathcal{I}$$

ということでした. この集合 $\{\beta < \kappa \mid \exists\alpha < \beta\big(\beta \in X_\alpha\big)\}$ を集合列 $\langle X_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ の **対角和** (diagonal union) と呼び, $\bigtriangledown_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ と書きます.

ノート [19] で示しているとおり, κ 上の 正規イデアルは必然的に κ-加法的になります.

補題 2.6 κ を精妙基数とする. このとき $\mathcal{I}^{\mathrm{Sbtl}}_\kappa$ は正規イデアル, $\mathcal{F}^{\mathrm{Sbtl}}_\kappa$ は正規フィルターである.

[証明] 有界集合が精妙でないことはあきらかなので, $\mathcal{I}^{\mathrm{Sbtl}}_\kappa$ が対角和のもとで閉じていることを確認すればよい. そのためには, 集合列 $\langle X_\alpha \rangle$ の対角和 $X = \bigtriangledown_{\alpha<\kappa} X_\alpha$ が精妙集合であると仮定して, どれかの X_α が精妙集合であることを示せばよい. もしも $\beta \in X$ なら β より小さいどれかの α について $\beta \in X_\alpha$ となる. そこで, そのような α のうち最小のものを $f(\beta)$ と書くことにすると, 関数 $f : X \rightarrow \kappa$ は X 上で退歩的である. この関数に補題 2.3 を使うと, どれかの γ で $f^{-1}``\{\gamma\}$ が κ の精妙部分集合となる. このとき X_γ は精妙である. ◀

* * *

つぎに, 玄妙基数の定義に関連してあらわれるイデアルとフィルターを考えます. 概玄妙基数についても同様のものが考えられますが, だいたい並行した議論になるので, ここではとりあげません.

定義 2.7 基数 κ の部分集合 E が **κ において玄妙である** (ineffable in κ) , あるいは κ の玄妙部分集合であるとは次のことである: κ の club 部分集合 C と, 各 α の部分集合 A_α を選んで作った集合列 $\big\langle A_\alpha \;\big|\; \alpha \in E \big\rangle \in \prod_{\alpha\in E} \mathcal{P}(\alpha)$ が任意に与えられたとき, κ において定常な集合 S を,

$$S \subset E \cap C, \;\; \forall\alpha, \beta \in S\Big(\alpha < \beta \rightarrow A_\alpha = A_\beta \cap \alpha\Big)$$

となるようにとれる. ◀

精妙集合の場合と同様に, 次のことがすぐにわかります.

補題 2.8 (i) κ の玄妙部分集合がひとつでも存在すれば, κ は玄妙基数である. (ii) κ が玄妙基数であれば, κ の club 部分集合はすべて κ の玄妙部分集合である. (iii) A が κ の玄妙部分集合で, $A \subset B \subset \kappa$ であれば, B もまた κ の玄妙部分集合である. (iv) κ の玄妙部分集合は κ において精妙, したがって κ において定常である. (v) A が κ の玄妙部分集合, C が κ の club 部分集合であれば, $A \cap C$ は κ の玄妙部分集合である. ◀

次の補題も, 精妙集合について同様のことを述べた補題 2.3 の論法で証明できます.

補題 2.9 κ を玄妙基数, X をその玄妙部分集合とする. $f : X \to \kappa$ が退歩的 (regressive) な関数であれば, ある順序数 γ について, $f^{-1}``\{\gamma\}$ が κ の玄妙部分集合となる. ◀

先ほど精妙でない集合のなすイデアルを考えたように, 玄妙でない部分集合の全体がなすイデアルを定義します.

定義 2.10 玄妙基数 κ の部分集合の集合 $\mathcal{I}_\kappa^{\mathrm{Inef}}$ と $\mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{Inef}}$ を,

$$\mathcal{I}_\kappa^{\mathrm{Inef}} = \left\{ X \subset \kappa \;\middle|\; X \text{ は } \kappa \text{ において玄妙でない} \right\}, \quad \mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{Inef}} = \left\{ X \subset \kappa \;\middle|\; \kappa \setminus X \in \mathcal{I}_\kappa^{\mathrm{Inef}} \right\}$$

によって定める. ◀

さっそく, これらがイデアルとフィルターになっていることを検証しましょう.

補題 2.11 基数 κ の二つの部分集合 X と Y のどちらも κ において玄妙でないとしたら, $X \cup Y$ も κ において玄妙でない.

[証明] 補題 2.5 の証明と同様. 一般性を損なうことなく $X \cap Y = \emptyset$ と仮定する. X と Y の玄妙さにたいする反例となる club 集合 C と D, それと集合列 $\langle A_\alpha \mid \alpha \in X \rangle$ と $\langle B_\alpha \mid \alpha \in Y \rangle$ をとる. 共通部分 $X \cap Y$ に属する各順序数 α に対して

$$E_\alpha = \begin{cases} A_\alpha, & (\alpha \in X) \\ B_\alpha, & (\alpha \in Y) \end{cases}$$

と定めて得られる集合列 $\langle E_\alpha \mid \alpha \in X \cup Y \rangle$ を考える. もしもある定常集合 $S \subset X \cup Y$ について

$$\forall \alpha, \beta \in S \Big(\alpha < \beta \;\to\; E_\alpha = E_\beta \cap \alpha \Big)$$

となっていたら, $S \cap X \cap C$ か $S \cap Y \cap D$ のすくなくとも一方は定常集合のはずなので, A_α, B_α, C, D の取りかたと矛盾する. ◀

補題 2.9 と補題 2.11 から, ただちに次のことがわかります.

補題 2.12 κ が玄妙基数のとき, $\mathcal{I}_\kappa^{\mathrm{Inef}}$ は正規イデアル, $\mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{Inef}}$ は正規フィルターである. ◀

この節のしめくくりにこれらのイデアルとフィルターの大きさを比較してみます. 精妙集合は定常なので, 定常でない集合は精妙でなく $\mathcal{I}_\kappa^{\mathrm{Sbtl}}$ に属します. 玄妙集合は精妙なので, 精妙でない集合は $\mathcal{I}_\kappa^{\mathrm{Inef}}$ に属します. このことから,

補題 2.13 (i) κ が精妙基数のとき $\mathrm{NS}_\kappa \subset \mathcal{I}_\kappa^{\mathrm{Sbtl}}$, したがって $\mathrm{NS}_\kappa^* \subset \mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{Sbtl}}$. (ii) κ が玄妙基数のとき $\mathcal{I}_\kappa^{\mathrm{Sbtl}} \subset \mathcal{I}_\kappa^{\mathrm{Inef}}$, したがって $\mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{Sbtl}} \subset \mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{Inef}}$. ◀

あとの補題 3.4 で, 精妙でない定常集合の例を述べます.

3　精妙基数の大きさ

The subtlety of nature is greater many times over than the subtlety of the senses and understanding.

— Sir Francis Bacon[*3]

ここでは, 精妙基数がマーロ基数や弱コンパクト基数と比較してずっと大きな基数概念であることを示します.

補題 3.1　精妙基数は正則である.

[証明]　基数 κ が特異基数だったとして $\gamma = \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$ とおく. このとき関数 $f : \gamma \to \kappa$ を

(1) $f(0) = \gamma$,
(2) $f(\xi + 1) > f(\xi)$,
(3) $\delta < \gamma$ かつ δ が極限順序数のときは $f(\delta) = \sup f``\delta$,
(4) $\sup f``\gamma = \kappa$

となるようにとれる. そこで, $\gamma \leq \alpha < \kappa$ をみたす順序数 α は, それぞれただひとつの $\xi < \gamma$ について $f(\xi) \leq \alpha < f(\xi + 1)$ をみたす. この ξ を $g(\alpha)$ と書こう. そして,

(4) $\alpha < \gamma$ のときは $A_\alpha = \emptyset$,
(5) $\gamma \leq \alpha < \kappa$ のときは $A_\alpha = \{g(\alpha)\}$.

と A_α を定めよう. ここで $C = \left\{ f(\xi) \;\middle|\; \xi < \gamma \right\}$ とおけば C は κ の club 部分集合だけれども, $\alpha, \beta \in C$, $\alpha < \beta$ のとき $f(g(\alpha)) = \alpha < \beta = f(g(\beta))$ であるから $g(\alpha) \neq g(\beta)$ で,

$$A_\alpha = \{g(\alpha)\} \neq \{g(\beta)\} = A_\beta \cap \alpha$$

である. したがって κ は精妙でない. ◀

補題 3.2　精妙基数は強極限基数である.

[証明]　基数 κ が強極限基数でなかったとすると, κ より小さいある基数 γ について $2^\gamma \geq \kappa$ となるので, 1 対 1 写像 $f : \kappa \to \mathcal{P}(\gamma)$ がとれる. そこで, $\alpha < \gamma$ のときは $A_\gamma = \emptyset$, $\alpha \geq \gamma$ のときは $A_\alpha = f(\alpha)$ と A_α を定めよう. そして $C = \kappa \setminus \gamma$ とおけば C は κ の club 部分集合だけれども, $\alpha, \beta \in C$, $\alpha < \beta$ のとき

$$A_\alpha = f(\alpha) \neq f(\beta) = A_\beta = A_\beta \cap \alpha$$

となる. したがって κ は精妙でない. ◀

これら二つの補題から直ちに, 次の定理が得られます.

定理 3.3　精妙基数は強到達不能基数である. ◀

しかしながら, 玄妙基数や精妙基数は単に強到達不能というだけでなく, もっと強い性質を持っています. 精妙基数がひとつでも存在すれば, それより小さな強到達不能基数が無数に存在するのです.

[*3] **フランシス・ベーコン** (1561–1626), 同姓同名の画家もいますが, こちらはルネサンス期イギリスの哲学者にして政治家. 典拠主義や臆断を廃し, 経験に立脚した知識を重んじるべきことを説いて, イギリス経験主義哲学と実証科学の祖となりました. 著書『ノヴム・オルガヌム』, 『ニュー・アトランティス』など.

補題 3.4 κ を精妙基数とする．このとき λ を κ より小さい任意の正則基数とする．このとき $\alpha < \kappa$ と $\mathrm{cf}(\alpha) = \lambda$ をみたす順序数 α 全体のなす集合 E^κ_λ は, κ において精妙でない.

[証明] 各 $\alpha \in E^\kappa_\lambda$ に対し, $A_\alpha \subset \alpha$ を α において共終で順序型 λ をもつ部分集合とすると, $\alpha, \beta \in E^\kappa_\lambda$ かつ $\alpha < \beta$ のとき $A_\beta \cap \alpha$ の順序型は λ 未満であるから $A_\alpha \neq A_\beta \cap \alpha$ である. ◀

この補題と, 精妙でない部分集合のイデアル $\mathcal{I}^{\mathrm{Sbtl}}_\kappa$ が正規イデアルであることから, 次の定理が得られます.

定理 3.5 κ を精妙基数とするとき, κ 未満の正則基数の全体のなす集合 $\mathbf{REG} \cap \kappa$ は, フィルター $\mathcal{F}^{\mathrm{Sbtl}}_\kappa$ に属する．したがって, κ の任意の精妙部分集合は正則基数を含む. ◀

[証明] 補集合 $\kappa \setminus \mathbf{REG}$ が κ において精妙であったと仮定しよう．この集合上で関数 $\alpha \mapsto \mathrm{cf}(\alpha)$ を考えると, 補題 2.3 により, ある正則基数 $\gamma < \kappa$ について, 集合 $E^\kappa_\gamma = \{\, \alpha < \kappa \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \gamma \,\}$ が κ において精妙となるはずだ, しかし, これは補題 lem:singulars-are-nonsubtle に矛盾する．したがって, $\kappa \setminus \mathbf{REG} \in \mathcal{I}^{\mathrm{Sbtl}}_\kappa$ である. ◀

強極限基数の全体は club であることにより, κ 未満の強到達不能基数の全体もフィルター $\mathcal{F}^{\mathrm{Sbtl}}_\kappa$ に属することになります．したがって, 精妙基数 κ の任意の精妙部分集合は, 精妙でない部分集合を取り去ることによって, 強到達不能基数ばかりからなる精妙集合へと「磨き上げ」られることがわかります．また, 精妙集合は定常集合なので,

定理 3.6 精妙基数は強マーロ基数である. ◀

精妙基数の大きさは, 弱コンパクト基数の大きさをはるかにしのいでいます．次にこのことを証明しましょう．ノート [20] の第 4 節で述べた記述不能性が鍵になります.

定理 3.7 Σ を (一般に高階の) 集合論の式の集合とし, Σ に属するすべての式は, 自由変数としてクラス変数 (2 階の変数) X のみをもつと仮定する．κ を精妙基数とするとき, Σ に属する式で記述可能な順序数 $\alpha < \kappa$ 全体の集合は κ において精妙でない．とくに, 任意の番号 m と n について, κ 未満の Π^m_n-記述不能基数全体の集合は $\mathcal{F}^{\mathrm{Sbtl}}_\kappa$ に属する.

[証明] κ 未満の順序数のうち Σ の式で記述可能なもの全体の集合を W とするとき, W が κ において精妙であったと仮定すると矛盾が導かれることを示す．各 $\alpha \in W$ に対して, Σ に属する式 $\varphi_\alpha(X)$ と集合 $A_\alpha \subset V_\alpha$ を,

$$\langle V_\alpha, \in, A_\alpha \rangle \models \varphi_\alpha(A_\alpha),\ \text{しかし}\ \forall\gamma < \alpha\Big(\langle V_\gamma, \in, A_\alpha \cap V_\gamma \rangle \not\models \varphi_\alpha(A_\alpha \cap V_\gamma) \Big) \tag{1}$$

となるようにとれる．全単射 $\pi : \kappa \to V_\kappa$ について $\pi``\alpha = V_\alpha$ をみたす $\alpha < \kappa$ 全体の集合を $C$ とすると, これは $\kappa$ の club 部分集合である．したがって, 集合列 $\langle \pi^{-1}``(\{\varphi_\alpha\} \times A_\alpha) \mid \alpha \in W \rangle$ に対し, W が精妙集合であるとの仮定を使うと,

$$\alpha < \beta,\quad \varphi_\alpha = \varphi_\beta,\quad A_\alpha = A_\beta \cap V_\alpha$$

をみたす $\alpha, \beta \in W$ が見出される．このとき, 式 (1) から, 一方では

$$\langle V_\alpha, \in, A_\alpha \rangle \models \varphi_\beta(A_\beta \cap V_\alpha),$$

であり, また他方で

$$\forall\gamma < \beta\Big(\langle V_\gamma, \in, A_\beta \cap V_\gamma \rangle \not\models \varphi_\beta(A_\beta \cap V_\gamma) \Big)$$

となり, 矛盾が生じる. ◀

基数が弱コンパクトであるためには Π^1_1-記述不能であることが必要かつ十分ですから, κ が精妙基数であったならば, κ 未満の弱コンパクト基数の全体はフィルター $\mathcal{F}^{\mathrm{Sbtl}}_\kappa$ に属することになります．ですから κ の精妙

部分集合が任意に与えられたとして云々, という議論をするときには, その精妙部分集合の要素が弱コンパクト基数ばかりからなると仮定しても一般性を損なわない場合が多いわけです．この意味で, 精妙基数は弱コンパクト基数よりはるかに大きいのですが, それでも, 精妙基数がすべて弱コンパクト基数になるわけではありません.

定理 3.8 最小の精妙基数は弱コンパクト基数ではない.

[証明] 最小の精妙基数 κ について考える．κ が精妙基数であるための条件は,

$$\forall\langle A_\alpha \mid \alpha<\kappa\rangle \in \prod_{\alpha<\kappa}\mathcal{P}(\alpha)\forall C\in \mathrm{Club}_\kappa\Big(\big\langle V_\kappa,\in,\langle A_\alpha\rangle,C\big\rangle \models \exists\alpha,\beta\big(\alpha,\beta\in C \wedge A_\alpha = A_\beta\cap\alpha\big)\Big)$$

のように, V_κ 上 Π^1_1-式で表現できる．したがって, 最小の精妙基数 κ は Π^1_1-記述可能である．ところが Π^1_1-記述不能であることが弱コンパクトであることの条件であるから (→ [20] 第 4 節) κ は弱コンパクトでない. ◀

4 玄妙基数の大きさ

No! No! Life is woe.
Thou dost not know
How ineffably great
Is the weight of Fate.

— Aleister Crowley[*4]

今度は, 玄妙基数が精妙基数と比較してずっと大きな基数概念であることを示します.

定理 4.1 概玄妙基数は弱コンパクトである.

[証明] ([7] の演習問題へのヒントから借用) κ が概玄妙基数だったとして, 分割の性質 $\kappa\to(\kappa)^2_2$ を導く．任意の 2-彩色 $F:[\kappa]^2\to\{0,1\}$ が与えられたとしよう．$\alpha<\kappa$ のとき $A_\alpha=\big\{\,\xi<\alpha \;\big|\; F(\{\xi,\alpha\})=1\,\big\}$ とおくと, $S\subset\kappa$ を

$$\forall\alpha,\beta\in S\Big(\alpha<\beta\longrightarrow A_\alpha=A_\beta\cap\alpha\Big)$$

かつ $|S|=\kappa$ となるようにとれる．$A=\bigcup_{\alpha\in S}A_\alpha$ とおこう．$\alpha,\beta\in S\cap A$ かつ $\alpha<\beta$ のとき, $\alpha\in A$, $\beta\in S$ より $\alpha\in A_\beta$ したがって $F(\{\alpha,\beta\})=1$ となる．また, $\alpha,\beta\in S\setminus A$ かつ $\alpha<\beta$ のときは, $\alpha\notin A$, $\beta\in S$ より $\alpha\notin A_\beta$, したがって $F(\{\alpha,\beta\})=0$ となる．このように $S\cap A$ と $S\setminus A$ はいずれも単色集合であるが, すくなくとも一方は濃度 κ を有する. ◀

定理 4.2 κ を概玄妙基数とする．このとき κ 未満の精妙基数の全体は κ の定常部分集合をなす．とくに, κ は κ 番目の精妙基数である.

[証明] 定理 3.8 の証明において, “κ は精妙基数である” と主張する V_κ 上の Π^1_1 式を提示した．この式を ϕ と書けば,

$$\kappa \text{ が精妙基数} \;\leftrightarrow\; \langle V_\kappa,\in\rangle\models\phi.$$

いま κ を概玄妙基数とし, $C\subset\kappa$ を任意の club 部分集合としよう．補題 1.4 により概玄妙基数は精妙基数であるから

$$\big\langle V_\kappa,\in,C\big\rangle\models\phi\wedge \text{“}C \text{ は club”}$$

[*4] **アレイスター・クロウリー** (1875–1947) 近代イギリスの神秘主義者, 占星術師で, 自称「魔術師」．若くして近代西洋儀式魔術の秘密結社「黄金の夜明け団」に参加し, 後に独立．一説によると, 第 2 次世界大戦の初期には, 政府の委嘱をうけて (?) イギリス中の魔女を集めてヒトラー退散の秘儀を行なったそうです．また, チャーチル首相に「V サイン」を教えたのは自分だと, 本人は言っています．引用文は *The Blind Prophet, a Ballet* から.

となる．定理 4.1 により概玄妙基数は弱コンパクト，したがって Π^1_1-記述不能であるから，ある $\alpha < \kappa$ について

$$\left\langle V_\alpha, \in, C \cap \alpha \right\rangle \models \phi \wedge \text{“}C \cap \alpha \text{ は club)}$$

が成立する．$\langle V_\alpha, \in \rangle \models \phi$ だから α は精妙基数である．$C \cap \alpha \in \mathrm{Club}_\alpha$ であるから $\alpha = \sup(C \cap \alpha)$，したがって $\alpha \in C$ となる．こうして κ の任意の club 部分集合が精妙基数を含むことが示された*5．◀

次の補題は，補題 3.7 の証明のさいに用いた論法を取り出して玄妙基数の場合に応用したものです．

補題 4.3 無限基数 κ が玄妙基数であるためには次のことが必要かつ十分である: 集合の列 $\left\langle A_\alpha \;\middle|\; \alpha < \kappa \right\rangle$ が $\forall \alpha < \kappa (A_\alpha \subset V_\alpha)$ となるように与えられたとき，V_κ の部分集合 A が存在して

$$\left\{ \alpha < \kappa \;\middle|\; A \cap V_\alpha = A_\alpha \right\}$$

が κ の定常部分集合になる．

[証明] 条件が十分であることはあきらか．必要性をいう．κ を玄妙基数とすれば，κ は強到達不能基数であるから，全単射 $\pi : \kappa \to V_\kappa$ がある．$\pi\text{“}\alpha = V_\alpha$ をみたす α の全体を C とすれば，C は κ の club 部分集合である．$\alpha \in C$ のとき $B_\alpha = \pi^{-1}\text{“}A_\alpha$ とし，$\alpha \notin C$ のとき $B_\alpha = \emptyset$ としよう．補題 1.5 により，$B \subset \kappa$ が存在して，集合

$$E = \left\langle \alpha < \kappa \;\middle|\; B \cap \alpha = B_\alpha \right\rangle$$

が κ の定常部分集合になる．$A = \pi\text{“}B$ とおこう．π が全単射であることにより，$\alpha \in C \cap E$ のとき

$$A \cap V_\alpha = (\pi\text{“}B) \cap (\pi\text{“}\alpha) = \pi\text{“}(B \cap \alpha) = \pi\text{“}(B_\alpha) = A_\alpha.$$

となる．したがって条件は必要である．◀

定理 4.4 玄妙基数は Π^1_2-記述不能である．

[証明] ([3] 第 VII 章定理 2.3) κ を玄妙基数とし $A \subset V_\kappa$ を任意の部分集合とする．ϕ を 2 階集合論の Π^1_2-式としよう．このときクラス量化子をもたない式 ψ によって

$$\phi \;\equiv\; \forall X \exists Y \psi(X, Y)$$

となっている．

いま，$\langle V_\kappa, \in, A \rangle \models \phi(A)$ なのに，どんな $\alpha < \kappa$ にもこの事実が反映されなかったと仮定しよう．このとき，$\alpha < \kappa$ に対して $X_\alpha \subset V_\alpha$ が存在して，

(1) $$\langle V_\alpha, \in, A \cap V_\alpha, X_\alpha \rangle \not\models \exists Y\, \psi(A \cap V_\alpha, X_\alpha, Y)$$

となっている．ここで κ が玄妙基数であることにより，集合列 $\left\langle X_\alpha \;\middle|\; \alpha < \kappa \right\rangle$ に補題 4.3 をもちいると，ある $X \subset V_\kappa$ について，集合

(2) $$S = \left\{ \alpha < \kappa \;\middle|\; X \cap V_\alpha = X_\alpha \right\}$$

が κ の定常部分集合となる．いっぽう，仮定より $\langle V_\kappa, \in, A \rangle \models \phi(A)$ なので，なにか $Y \subset V_\kappa$ がとれて $\langle V_\kappa, \in, A, X, Y \rangle \models \psi(A, X, Y)$ となっている．κ は強到達不能基数なので，集合

(3) $$C = \left\{ \alpha < \kappa \;\middle|\; \langle V_\alpha, \in, A \cap V_\alpha, X \cap V_\alpha, Y \cap V_\alpha \rangle \models \psi(A \cap V_\alpha, X \cap V_\alpha, Y \cap V_\alpha) \right\}$$

*5 この論法については [20] の補題 4.5 も見てください．

は κ の club 部分集合になっている．そこで $\alpha \in S \cap C$ なる α が存在することになるが, そうすると式 (1)–(3) から矛盾が出る．◀

定理 4.5 κ を玄妙基数とする．このとき κ 未満の概玄妙基数の全体は κ の定常部分集合をなす．とくに, κ は κ 番目の概玄妙基数である．

[証明] 不可算基数 κ が概玄妙基数であることの定義を素直に書けば Π^1_2-式で表現できる．あとは玄妙基数が Π^1_2-記述不能な概玄妙基数であることを用いて, 定理 4.2 と同様に議論すればよい．◀

この節の最後に, 本題から少し外れてしまいますが, 玄妙基数のもうひとつの特徴づけが弱コンパクト性を次のように強化したものによって与えられることを証明します．

定理 4.6 無限基数 κ が玄妙基数であるためには次の条件が必要かつ十分である: 2-彩色 $F : [\kappa]^2 \to 2$ が任意に与えられたとき F にかんして単色な κ の定常部分集合が存在する．

[証明] ([3] 第 VII 章定理 2.1) 条件が必要であることは定理 4.1 の証明と同様にすれば示される．

条件が十分であることを示すために, 集合列 $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \in \prod_{\alpha<\kappa} \mathcal{P}(\kappa)$ が任意に与えられたとしよう．各 α ごとに $f_\alpha \in {}^{\alpha}2$ を $f_\alpha(\xi) = 0 \;\leftrightarrow\; \xi \in A_\alpha$ で定義する．そうすると, ある関数 $f \in {}^{\kappa}2$ について $\{\, \alpha < \kappa \mid f_\alpha = f \restriction \alpha \,\} \in \mathrm{Stat}_\kappa$ となることがいえれば目的は果たされる．

${}^{<\kappa}2$ 上に次の順序づけ $<_*$ を与えよう[*6]:

$$f <_* g \;\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\; (g \prec f) \;\vee\; \exists \xi \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \big(f \restriction \xi = g \restriction \xi \;\wedge\; f(\xi) < g(\xi) \big).$$

そして, 2-彩色 $F : [\kappa]^2 \to 2$ を, $\alpha < \beta$ かつ $f_\alpha <_* f_\beta$ のとき $F(\{\alpha, \beta\}) = 0$, $\alpha < \beta$ かつ $f_\beta <_* f_\alpha$ のとき $F(\{\alpha, \beta\}) = 1$ となるように定める．仮定により, κ の定常部分集合 S で F にかんして単色なものが存在する．以下, $F``[S]^2 = \{0\}$ すなわち $\{\, f_\alpha \mid \alpha \in S \,\}$ が $<_*$ に関して単調増加である場合を証明するが, $<_*$ に関して単調減少である場合も同様である．

定常集合 S から増加列

$$\gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_\xi < \cdots \quad (\xi < \kappa)$$

を次の要領で選び出そう: γ_ξ は $\gamma \geq \sup_{\eta<\xi}(\gamma_\eta + 1)$ かつ

$$\forall \alpha \geq \gamma \Big(f_\alpha \restriction \xi = f_\gamma \restriction \xi \Big)$$

をみたす最小の S の要素だとする．このような γ_ξ が存在することは, ([20] の補題 2.5 で示しているとおり) ${}^{\xi}2$ 上の辞書式順序 $\leq_{\mathrm{lex}}$ にかんする整列鎖の長さが ξ^+ 未満であることよって保証される．γ_ξ の最小性から, ξ が極限順序数で $\sup_{\eta<\xi} \gamma_\eta \in S$ のときは $\gamma_\xi = \sup_{\eta<\xi} \gamma_\eta$ となることに注意しよう．ここで

$$C = \Big\{\, \alpha < \kappa \;\Big|\; \alpha \in \mathrm{Lim}(\kappa) \;\wedge\; \forall \xi < \alpha \big(\gamma_\xi < \alpha \big) \Big\}.$$

とすれば[*7], C は κ の club 部分集合である．したがって $S \cap C$ は κ の定常部分集合であり, $\alpha \in S \cap C$ のとき $\gamma_\alpha = \alpha$ となる．このことと γ_ξ の選び方により

$$\alpha, \beta \in S \cap C \;\wedge\; \alpha < \beta \;\to\; f_\beta \restriction \alpha = f_{\gamma_\alpha} \restriction \alpha = f_\alpha$$

[*6] ここで $g \prec f$ は g が f の始切片であること, つまり $\mathrm{dom}(g) < \mathrm{dom}(f)$ かつ $g = f \restriction \mathrm{dom}(g)$ となることを意味するものとします．[20] の定理 2.9 でもこの順序づけを利用しました．

[*7] $\mathrm{Lim}(\kappa)$ は κ 未満の極限順序数の全体．より一般に, 順序数のクラス $\mathbf{C}$ に対して $\mathrm{Lim}(\mathbf{C})$ とは $\alpha \in \mathbf{C}$ かつ $\alpha = \sup(\alpha \cap \mathbf{C})$ をみたす順序数 α 全体のクラス．

となるので, いま $f = \bigcup\{ f_\alpha \mid \alpha \in S \cap C \}$ とおけば $f \in {}^\kappa 2$ かつ

$$S \cap C \subset \left\{ \alpha < \kappa \;\middle|\; f_\alpha = f \restriction \alpha \right\} \in \mathrm{Stat}_\kappa$$

となって, 期待どおりの結果が得られる. ◀

この定理の結果からは, なにか

$$\text{玄妙基数} = \frac{\text{弱コンパクト基数}}{\text{共終集合}} \times \text{定常集合}$$

という印象を受けますが, 定義からは,

$$\frac{\text{玄妙基数}}{\text{定常集合}} \times \text{共終集合} = \text{概玄妙基数}$$

となってしまうのが面白いところです. 概玄妙基数が弱コンパクト基数よりはるかに強力な巨大基数であることを考えると, このことはおそらく, $[\kappa]^n$ の彩色にかんする単色集合の存在よりも集合列のなかのコヒーレントな部分列の存在のほうがはるかに強力な原理であることを意味するのでしょう.

5 玄妙基数, 精妙基数と構成可能的集合の世界

I personally find it a very attractive axiom. Nevertheless, it has been rejected by the majority of set theorists, beginning with Gödel himself.

— Ronald Jensen[*8]

ここでは玄妙基数の存在が構成可能性公理 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ と矛盾しないことを証明します. これには玄妙基数が弱コンパクト基数であることと, 次の補題を利用します.

補題 5.1 κ を弱コンパクト基数とし, $A \subset \kappa$ とする. もしも κ 未満のすべての順序数 α について $A \cap \alpha \in \mathbf{L}$ であるならば, $A \in \mathbf{L}$ である.

この補題の証明は [20] の第 3 節 (補題 3.6) にあります.

定理 5.2 κ が玄妙基数であれば (κ は玄妙基数である)$^{\mathbf{L}}$.

[証明] 長さ κ の集合列であることも α 番目の項目が α の部分集合であることも, $\mathbf{V}$, $\mathbf{L}$ に対して絶対的な性質であるから,

$$\Bigl(\prod_{\alpha<\kappa} \mathcal{P}(\alpha)\Bigr)^{\mathbf{L}} = \Bigl(\prod_{\alpha<\kappa} \mathcal{P}(\alpha)\Bigr) \cap \mathbf{L}$$

である. いま, この集合に属する集合列 $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ が任意に与えられたとしよう. すると κ が玄妙基数であることから, 集合 $A \subset \kappa$ が存在して, 集合

$$E = \{ \alpha < \kappa \mid A_\alpha = A \cap \alpha \}$$

が κ において定常となる. とくに E は κ の共終部分集合である. 任意の $\alpha < \kappa$ に対して $\beta \in E$ を $\alpha < \beta$ となるようにとれば,

$$A \cap \alpha = (A \cap \beta) \cap \alpha = A_\beta \cap \alpha \in \mathbf{L}$$

*8 **ロナルド・イエンセン**, 集合論関係者にはいまさら紹介するまでもない, fine structure theory の生みの親. 引用文は [8] からの抜書き.

となる．したがって補題 5.1 により, $A \in \mathbf{L}$ となる．このことから $E \in \mathbf{L}$ もいえる．C を κ の任意の (club 部分集合)$^{\mathbf{L}}$ としよう．すると, 閉部分集合であることも共終であることも $\mathbf{V}$, $\mathbf{L}$ に対して絶対的な性質であるから, C は κ の club 部分集合であり, $E \cap C \neq \emptyset$ となる．E は κ の任意の (club 部分集合)$^{\mathbf{L}}$ と交わるから (κ の定常部分集合)$^{\mathbf{L}}$ である．こうして, κ が玄妙基数であることを保証する条件が $\mathbf{L}$ に相対化されるので, (κ は玄妙基数である)$^{\mathbf{L}}$. ◀

したがって, 玄妙基数の存在はそれ自体が集合論の公理と矛盾しないかぎりは, $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ とも矛盾しません. 定理 5.2 と同様にして, 概玄妙基数も $\mathbf{L}$ に相対化されます.

定理 5.3 κ が概玄妙基数であれば (κ は概玄妙基数である)$^{\mathbf{L}}$. ◀

これらにくらべて, 精妙基数の場合はいくぶん話が単純になります.

定理 5.4 κ が精妙基数であれば (κ は精妙基数である)$^{\mathbf{L}}$.

[証明] シンプルな絶対性の論法で証明できる．任意の基数 κ について

$$\Big(\prod_{\alpha<\kappa} \mathcal{P}(\alpha)\Big)^{\mathbf{L}} = \Big(\prod_{\alpha<\kappa} \mathcal{P}(\alpha)\Big) \cap \mathbf{L}$$
$$(\mathrm{Club}_\kappa)^{\mathbf{L}} = \mathrm{Club}_\kappa \cap \mathbf{L}$$

となる．そこで $\mathbf{L}$ において集合列 $\langle A_\alpha \rangle$ と club 集合 C が与えられたら, それらを $\mathbf{V}$ へ持ち出して, κ が $\mathbf{V}$ の精妙基数であることをもちいて $\alpha, \beta \in C$, $\alpha < \beta$, $A_\alpha = A_\beta \cap \alpha$ をみたす α と β を見出す．そしてこの事実を $\mathbf{L}$ に持ち帰ればよい. ◀

いっぽう, 可測基数は $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ とは相いれないので, $\mathbf{L}$ において可測基数は存在せず, (κ は可測基数ではない)$^{\mathbf{L}}$ ことになります．しかし, 次節で示すとおり, 可測基数は玄妙基数なので, κ が可測基数であれば (κ は玄妙基数)$^{\mathbf{L}}$ にはなります．それだけでなく, 可測基数が (あるいはもっと弱く $0^\sharp$ が) 存在するならば, $\mathbf{V}$ の不可算基数はすべて (玄妙基数)$^{\mathbf{L}}$ になってしまうのです.

6　可測基数は玄妙である

In sales, showing measurable results helps persuade customers.

— Casey Hibbard*9

定理 6.1　可測基数は玄妙基数である. ◀

可測基数 κ 上の正規超フィルター $\mathcal{D}$ を考えます. 集合列 $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \in \prod_{\alpha<\kappa} \mathcal{P}(\alpha)$ が与えられたとして, 集合 $A \subset \kappa$ を $\{ \alpha < \kappa \mid A \cap \alpha = A_\alpha \} \in \mathcal{D}$ となるように取れることを示せばよろしい. というのも, 正規フィルターの要素は必ず定常集合であるからです.

さて, $\xi < \kappa$ に対して

$$\begin{aligned} B_\xi^+ &= \{ \alpha < \kappa \mid \alpha > \xi \ \wedge \ \xi \in A_\alpha \}, \\ B_\xi^- &= \{ \alpha < \kappa \mid \alpha > \xi \ \wedge \ \xi \notin A_\alpha \} \end{aligned}$$

と定義します. $B_\xi^+ \cap B_\xi^- = \emptyset$ かつ $B_\xi^+ \cup B_\xi^- = \kappa \setminus (\xi{+}1)$ なので, B_ξ^+ と B_ξ^- のどちらか一方だけが $\mathcal{D}$ に属することになります. $\mathcal{D}$ に属するほうを B_ξ としましょう. そして $B = \triangle_{\xi<\kappa} B_\xi$ とおきます. このとき $B \in \mathcal{D}$ です. 以上の定義から,

$$\alpha \in B \ \leftrightarrow \ \forall \xi < \alpha \Big(\xi \in A_\alpha \ \leftrightarrow \ B_\xi^+ \in \mathcal{D} \Big)$$

となるので, $A = \{ \xi < \kappa \mid B_\xi^+ \in \mathcal{D} \}$ とおけば求める結果が得られます. これで定理 6.1 が証明できました.

可測基数は玄妙基数なので, 精妙フィルター, 玄妙フィルターが存在します. また, 可測基数には正規超フィルターが (一般には複数) 存在します. ここにいくつかの正規フィルターが見出されるわけですが, それらの関係はどうなっているでしょうか.

定理 6.2　κ を可測基数とし, $\mathcal{D}$ を κ 上の正規超フィルターとする. このとき $\mathcal{F}^{\mathrm{Inef}} \subset \mathcal{D}$ である.

[証明]　定理 6.1 の証明により, フィルター $\mathcal{D}$ の要素はすべて κ の玄妙部分集合である. したがって, 非玄妙集合のなすイデアル $\mathcal{I}_\kappa^{\mathrm{Inef}}$ は $\mathcal{D}$ の補集合 $\mathcal{P}(\kappa) \setminus \mathcal{D}$ に含まれるが, $\mathcal{D}$ は超フィルターなので, $\mathcal{P}(\kappa) \setminus \mathcal{D}$ は $\mathcal{D}$ に双対なイデアル $\mathcal{D}^*$ に一致する. $\mathcal{I}_\kappa^{\mathrm{Inef}} \subset \mathcal{D}^*$ であるから両辺の双対フィルターをかんがえて $\mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{Inef}} \subset \mathcal{D}$ を得る. ◀

こうして,

$$\mathrm{NS}_\kappa^* \subset \mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{Sbtl}} \subset \mathcal{F}_\kappa^{\mathrm{Inef}} \subset \bigcap \big\{ \mathcal{D} \ \big| \ \mathcal{D} \text{ は正規超フィルター} \big\}$$

というフィルターの階層関係が得られることになります.

*9 **ケーシィ・ヒバート**, Compelling Cases Inc. の創立者にして社長. 企業の customer stories, つまり顧客サクセスストーリー作りの支援が仕事だそうです. 世の中, いろんな仕事があるもんだなあ. 著書に『Stories That Sell』. 引用文は [6] なるインターネットマガジンの論説の書き出し.

7 ダイヤモンド原理

ああ揺れないでメモリーズ
時の流れが傷つけても
傷つかない心は
小さなダイアモンド

— 松本隆[*10]

不可算基数 κ の定常部分集合全体の族を Stat_κ と書くことにすると, κ が玄妙基数であることは

$$\forall\left\langle A_\alpha \;\middle|\; \alpha<\kappa\right\rangle \in \prod_{\alpha<\kappa}\mathcal{P}(\alpha)\,\exists A\subset\kappa\Big(\left\{\alpha<\kappa \;\middle|\; A\cap\alpha=A_\alpha\right\}\in\mathrm{Stat}_\kappa\Big)$$

の成立することと同値でした. この条件の $\forall$ と $\exists$ をそっくりひっくり返した命題 $\diamondsuit_\kappa$

$$\exists\left\langle A_\alpha \;\middle|\; \alpha<\kappa\right\rangle \in \prod_{\alpha<\kappa}\mathcal{P}(\alpha)\,\forall A\subset\kappa\Big(\left\{\alpha<\kappa \;\middle|\; A\cap\alpha=A_\alpha\right\}\in\mathrm{Stat}_\kappa\Big)$$

は, 不可算基数の組み合わせ論において, たいそう重要な役割を果たすものです.

定義 7.1 κ を無限基数とする. 条件

$$\forall A\subset\kappa\Big(\left\{\alpha<\kappa \;\middle|\; A\cap\alpha=A_\alpha\right\}\in\mathrm{Stat}_\kappa\Big)$$

をみたす集合列 $\left\langle A_\alpha \;\middle|\; \alpha<\kappa\right\rangle\in\prod_{\alpha<\kappa}\mathcal{P}(\alpha)$ を κ におけるダイヤモンド列, 略して **$\diamondsuit_\kappa$-列** ($\diamondsuit_\kappa$-sequence) と呼ぶ. “$\diamondsuit_\kappa$-列が存在する” という命題を **κ におけるダイヤモンド原理** (Diamond Principle for κ) といい, これを記号 $\diamondsuit_\kappa$ であらわす. ◀

さて, 玄妙基数と $\diamondsuit_\kappa$ の関係は, たんに定義の類似だけでしょうか? そうではありません. この節では κ が玄妙基数, あるいは精妙基数でありさえすれば, $\diamondsuit_\kappa$ が成立すること, およびそれに関連したいくつかの結果を示します.

補題 7.2 無限基数 κ が精妙基数であるためには次のことが必要かつ十分である: 集合の列 $\left\langle X_\alpha \;\middle|\; \alpha<\kappa\right\rangle$ が $\forall\alpha<\kappa(X_\alpha\subset V_\alpha)$ となるように与えられたとき, κ の任意の club 部分集合 C から, $\alpha,\beta\in C$ を

$$\alpha<\beta\ \wedge\ X_\alpha=X_\beta\cap V_\alpha$$

となるようにとれる.

[証明] 補題 4.3 の証明と同様. ◀

定理 7.3 κ を精妙基数とするとき, $\diamondsuit_\kappa$ が成立する.

[証明] [*11] 集合列 $\left\langle A_\alpha \;\middle|\; \alpha<\kappa\right\rangle$ と $\left\langle C_\alpha \;\middle|\; \alpha<\kappa\right\rangle$ とを次のように再帰的に選ぼう. $\left\langle A_\xi \;\middle|\; \xi<\alpha\right\rangle$ と $\left\langle C_\xi \;\middle|\; \xi<\alpha\right\rangle$ とがすでに選ばれているものとして, 次に A_α と C_α を選ぶ. もしも $\alpha\in\mathrm{Lim}(\kappa)$ で, しかも $\left\langle A_\xi \;\middle|\; \xi<\alpha\right\rangle$ が $\diamondsuit_\alpha$-列で <u>なかった</u> としたら, すなわち,

$$A_\alpha\subset\alpha\ \wedge\ C_\alpha\in\mathrm{Club}_\alpha\ \wedge\ \forall\xi\in C_\alpha\big(A_\xi\neq A_\alpha\cap\xi\big)$$

---

*10 **松本隆** (まつもと たかし, 1949–), 1980–90 年代の歌謡界に一時代を築いた作詞家. 引用文は『瞳はダイアモンド』(作詞：松本隆, 作曲：呉田軽穂, 歌：松田聖子).

*11 元ネタはデブリン本 [3] 第 VII 章定理 2.4 ですが, そこでの証明は, おそらく誤植のため, 理解不能な部分があります. その点を解明するにあたって, かがみさんの集合論雑記 [16] を参考にさせていただきました.

となるような (A_α, C_α) があれば (以後この状況を, 順序数 α のところで ダイヤモンドが傷ついている[*12]と表現することにする), それをとる. それ以外の場合は $A_\alpha = C_\alpha = \emptyset$ としてしまう.

こうやって選ばれた列 $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ が $\diamondsuit_\kappa$-列になることを背理法で示そう. もしも $A \subset \kappa$ で $\{\alpha < \kappa \mid A_\alpha = A \cap \alpha\}$ が κ の定常部分集合に ならない ものがあったとしたら, κ の club 部分集合 C を

$$\forall \alpha \in C\Big(A_\alpha \neq A \cap \alpha \Big)$$

となるようにとれるだろう. すると, もしも $\delta \in \mathrm{Lim}(C)$ ならば,

$$C \cap \delta \in \mathrm{Club}_\delta \ \wedge \ \forall \alpha \in C \cap \delta \big(A_\alpha \neq A_\delta \cap \alpha \big)$$

となるので, κ の club 部分集合 $\mathrm{Lim}(C)$ のすべての要素のところでダイヤモンドが傷ついている. ここで, $X_\alpha = A_\alpha \times C_\alpha$ とおいて補題 7.2 を使えば, $\alpha, \beta \in \mathrm{Lim}(C)$ を

(1) $$\alpha < \beta \ \wedge \ A_\alpha = A_\beta \cap \alpha \ \wedge \ C_\alpha = C_\beta \cap \alpha$$

となるようにとれることがわかる. このとき α と β のところでダイヤモンドが傷ついているので, $C_\alpha \in \mathrm{Club}_\alpha$ かつ $C_\beta \in \mathrm{Club}_\beta$ であり

$$\alpha = \sup C_\alpha = \sup(C_\beta \cap \alpha) \in C_\beta$$

したがって, C_β と A_β の選び方により

$$A_\alpha \neq A_\beta \cap \alpha$$

である. これは式 (1) と矛盾する. ◀

あとで (→定理 7.7) 示すとおり, この定理 7.3 はもう少し精密化することができます. その準備と動機づけも兼ねて, ここで, ダイヤモンド原理についてもう少し調べてみます.

定義 7.4 κ を無限基数, $E \subset \kappa$ をその部分集合とする. 集合列 $\langle A_\alpha \mid \alpha \in E \rangle \in \prod_{\alpha \in E} \mathcal{P}(\alpha)$ が, 条件

$$\forall A \subset \kappa \Big(\{ \alpha \in E \mid A \cap \alpha = A_\alpha \} \in \mathrm{Stat}_\kappa \Big)$$

をみたすとき, この集合列を $\diamondsuit_\kappa(E)$**-列** ($\diamondsuit_\kappa(E)$-sequence) と呼ぶ. “$\diamondsuit_\kappa(E)$-列が存在する” という命題を記号 $\diamondsuit_\kappa(E)$ であらわす. ◀

集合 E がどの基数の部分集合と考えられているかが文脈からあきらかな場合は, 添え字 κ を省いて $\diamondsuit(E)$ と書かれることもあります. 上の定義からわかるとおり, $\diamondsuit_\kappa(E)$ が成立するような E はそれ自身が κ の定常部分集合でなければなりません. また, $\diamondsuit_\kappa(E)$ が成立していて $E \subset F \subset \kappa$ であれば $\diamondsuit_\kappa(F)$ が成立することもあきらかです. したがって, 個々の定常部分集合に対する $\diamondsuit_\kappa(E)$ は, もとの $\diamondsuit_\kappa$ を精密化・強化したものといえます.

次の定理は, $\diamondsuit_\kappa$ の成立・不成立が基数のたんなる指数演算の振舞いの問題に還元されてしまう場合があることを教えてくれます.

定理 7.5 (グレゴリーの定理) λ が正則基数で, κ は $\kappa^\lambda = \kappa$ と $2^\kappa = \kappa^+$ をみたす無限基数だとする. $E^{\kappa^+}_\lambda$ を, $\alpha < \kappa^+$ かつ $\mathrm{cf}(\alpha) = \lambda$ となる順序数全体の集合とすれば, $\diamondsuit_{\kappa^+}(E^{\kappa^+}_\lambda)$ が成立する.

[証明] ここでは, あとで証明する補題 7.6 で述べられている見かけ上弱い形のダイヤモンド原理を証明する.

[*12] かがみさんの [16] では, このことを「順序数 α は良好である」と表現しています.

$\mathcal{A}$ を, κ^+ のすべての有界部分集合全体のなす集合としよう. 仮定 $2^\kappa = \kappa^+$ より, $|\mathcal{A}| = \kappa^+$ である. そこで, 全単射 $f : \kappa^+ \to \mathcal{A}$ をとろう. κ^+ 未満のすべての順序数 α に対して

$$S_\alpha = \Big\{ \bigcup f``x \;\Big|\; x \subset \alpha \;\wedge\; |x| \leq \lambda \Big\}$$

と定めよう. すると, 集合列 $\big\langle S_\alpha \;\big|\; \alpha \in E^{\kappa^+}_\lambda \big\rangle$ が所要の条件をみたす.

このことを確かめるため, κ^+ の部分集合 A が任意に与えられたとする. 集合 C を

$$C = \Big\{ \alpha < \kappa^+ \;\Big|\; \forall\beta < \alpha\big(f^{-1}(A \cap \beta) < \alpha \big) \Big\}$$

によって定める. あきらかに C は κ^+ の club 部分集合である. α を $E^{\kappa^+}_\lambda$ の任意の要素としよう. すると $\mathrm{cf}(\alpha) = \lambda$ だから α の順序型 λ をもつ共終部分集合 y がとれる. $x = \{\, f^{-1}(A \cap \beta) \mid \beta \in y \}$ としよう. さらに $\alpha \in C$ だから $x \subset \alpha$ かつ $|x| = \lambda$ であり,

$$X \cap \alpha = \bigcup_{\beta \in y} \big(X \cap \beta \big) = \bigcup_{\gamma \in x} f(\gamma) \in S_\alpha$$

となる. こうして $\big\{ \alpha \in E^{\kappa^+}_\lambda \;\big|\; A \cap \alpha \in S_\alpha \big\}$ が $E^{\kappa^+}_\lambda \cap C$ を含み, 定常集合であることがわかる. ◀

補題 7.6 κ を無限基数, E を κ^+ の定常部分集合としよう. ダイヤモンド原理 $\diamondsuit_{\kappa^+}(E)$ は次の条件をみたす集合列 $\big\langle S_\alpha \;\big|\; \alpha \in E \big\rangle$ の存在と同値である: すべての $\alpha \in E$ について $|S_\alpha| \leq \kappa$ であり, さらに, 任意の集合 $A \subset \kappa^+$ について $\big\{ \alpha \in E \;\big|\; A \cap \alpha \in S_\alpha \big\}$ が κ^+ の定常部分集合となる.

[証明] $\langle A_\alpha \mid \alpha \in E \rangle$ が $\diamondsuit_{\kappa^+}(E)$-列なら, 単に $S_\alpha = \{A_\alpha\}$ とおけば集合列 $\langle S_\alpha \mid \alpha \in E \rangle$ が条件をみたすことはあきらか. 以下, この逆の証明.

補題の条件をみたす集合列 $\langle A_\alpha \mid \alpha \in E \rangle$ が存在したとしよう.

全単射 $f : \kappa^+ \to \kappa^+ \times \kappa$ をひとつ固定しよう. $f``\alpha = \alpha \times \kappa$ をみたす順序数 $\alpha < \kappa^+$ の全体を $C$ とすると, これは $\kappa^+$ の club 部分集合であるから, $E \cap C$ は定常集合である. $\alpha \in E \cap C$ のとき, $S'_\alpha = \{\, f``x \mid x \in S_\alpha \}$ とおこう. $\alpha \notin E \cap C$ のときの S'_α は何でもよいが, ここでは $\{\emptyset\}$ と定めよう. すると, $\kappa^+ \times \kappa$ の部分集合を f^{-1} で κ の部分集合に写してみればあきらかなように,

$$\forall X \subset \kappa^+ \times \kappa \Big(\big\{ \alpha \in E \;\big|\; X \cap (\alpha \times \kappa) \in S'_\alpha \big\} \in \mathrm{Stat}_{\kappa^+} \Big) \tag{1}$$

が成立する. 各 S'_α は濃度高々 κ なので, $S'_\alpha = \{\, s^\beta_\alpha \mid \beta < \kappa \}$ と数え上げることができる. κ^+ の定常部分集合を κ 個の部分集合に分割した場合, すくなくともひとつのパーツは定常部分集合になることから, 式 (1) は

$$\forall X \subset \kappa^+ \times \kappa \, \exists \beta < \kappa \Big(\big\{ \alpha \in E \;\big|\; X \cap (\alpha \times \kappa) = s^\beta_\alpha \big\} \in \mathrm{Stat}_{\kappa^+} \Big) \tag{2}$$

と言いかえられる.

各 $\beta < \kappa$ に対し $\alpha \in E \cap C$ のときに

$$A^\beta_\alpha = \big\{ \xi < \alpha \;\big|\; \langle \xi, \beta \rangle \in s^\beta_\alpha \big\}$$

と定める. このとき, 少なくともひとつの β について $\big\langle A^\beta_\alpha \;\big|\; \alpha \in E \cap C \big\rangle$ が $\diamondsuit(E \cap C)$-列になることを, 背理法によって証明しよう. そのために, 仮に, すべての β に対して $X_\beta \subset \kappa^+$ と $C_\beta \subset \kappa^+$ がとれ, C_β は κ^+ の club 部分集合であり, そして

$$\forall \alpha \in E \cap C \cap C_\beta \big(X_\beta \cap \alpha \neq A^\beta_\alpha \;\big) \tag{3}$$

となっているとする．$X=\bigcup_{\beta<\kappa} X_\beta\times\{\beta\}$ とおいて式 (2) を使うと, 順序数 $\beta<\kappa$ と定常集合 $E'\subset\kappa^+$ を, $E'\subset E\cap C$ かつ

$$\forall\alpha\in E'\Big(\ X\cap(\alpha\times\kappa)=s^\beta_\alpha\Big)$$

となるようにとれることになる．したがって $\alpha\in E'$ のとき

$$s^\beta_\alpha\cap(\alpha\times\{\beta\})=X\cap(\alpha\times\{\beta\})=(X_\beta\cap\alpha)\times\{\beta\}$$

となる．また, A^β_α の定義から

$$A^\beta_\alpha\times\{\beta\}=s^\beta_\alpha\cap(\alpha\times\{\beta\})$$

なので, あわせて $X_\beta\cap\alpha=A^\beta_\alpha$ が導かれるが, これは式 (3) に矛盾している．◀

グレゴリーの定理における仮定 $2^\kappa=\kappa^+$ は $\diamondsuit_{\kappa^+}$ が成立するために必要であることはあきらかです．そこで, ダイヤモンド原理が成立するかどうかという問題は一般連続体仮説

(GCH) $$\forall\alpha\Big(\ 2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}\Big)$$

を仮定して議論されることが多いようです．GCH を仮定すると, λ が正則基数で $\kappa=\lambda^{++}$ のときには $\kappa^\lambda=\lambda^+\cdot\lambda^\lambda=2^\lambda=\kappa$ となるので, グレゴリーの定理により $\diamondsuit_{\lambda^{++}}$ が成立します．また, 同じく GCH の仮定のもとで, $\lambda\neq\mathrm{cf}(\kappa)$ であるかぎり $\diamondsuit_{\kappa^+}(E^{\kappa^+}_\lambda)$ が成立することが, シェラの論文 [12] で示されています．シェラの別の論文 [13] では, κ が最小の強極限基数 $\beth_\omega$ 以上の基数のとき $2^\kappa=\kappa^+$ と $\diamondsuit_{\kappa^+}$ が同値になることが (もちろん GCH を仮定せずに) 示されています．シェラのこの結果によれば, GCH のもとでは任意の不可算基数 κ について $\diamondsuit_{\kappa^+}$ が成立するわけです．これをさらに強化し, グレゴリーの定理と同様の方向の, ただし基数の条件を大幅に緩和した, シェラの最終的な結果が [14] にあります．

そこで, グレゴリーの定理とシェラの結果によってカバーされない場合, すなわち, $\diamondsuit_{\aleph_1}$ が成立するかどうか, また κ が到達不能基数のときに $\diamondsuit_\kappa$ が成立するかどうかが問題となります．

まず, $\diamondsuit_{\aleph_1}$ はこの種の組合せ的原理の嚆矢となったもので, 添字なしでたんに $\diamondsuit$ と書いてあるときには, 通常この $\diamondsuit_{\aleph_1}$ を意味します．これについては集合論の公理との無矛盾性がかなり早い時期に確立されています．キューネン本 [10] の第 II 章第 7 節や第 VI 章第 5 節はもっぱら $\diamondsuit$ を論じることに割かれています．そこで論じられているように, $\diamondsuit$ からは連続体仮説 CH やススリン木の存在が導かれます．$\diamondsuit$ は構成可能的集合の世界 $\mathbf{L}$ において成立していますが, そのほかに, キューネン本第 VII 章演習問題 [H18]–[H20] においては $\diamondsuit$ を強化した組合せ的原理 $\diamondsuit^+$ をジェネリック拡大で成立させるイェンセンの強制法がとりあげられています．残念ながらキューネン本 [10] では (それにイエック本 [7] でもデブリン本 [3] でも) CH からの $\diamondsuit$ の独立性の証明は述べられていませんが, ススリン木の不存在 (ススリンの仮説 SH) と CH が両立することがイェンセンによって示されているので, $\diamondsuit$ は CH と同値というわけではありません．

また, $\diamondsuit$ は位相空間論などにも応用され, 近年ではたとえばエイクマン (Charles Akemann) とウィバー (Nik Weaver) の論文 [1] で, ヒルベルト空間のコンパクト作用素のなす C*-環の構造の特徴づけにかんするナイマルク (M.A. Naimark) の古い問題への反例を構成するために用いられています．

次に, 到達不能基数の場合です．$\mathbf{V}=\mathbf{L}$ からはすべての不可算正則基数 κ とその定常部分集合 E について $\diamondsuit_\kappa(E)$ が成立することが導かれます．[*13] ですから, 到達不能基数 κ について, $\diamondsuit_\kappa$ の不成立 (あるいは少し弱

*13 イェック本 [7] 演習問題 27.4.

く, 特定の定常部分集合 E についての $\diamondsuit_\kappa(E)$ の不成立) が GCH と両立するかどうか, という点に問題が絞られてきます.

基数 κ が精妙基数であれば $\diamondsuit_\kappa$ が成立することはすでに示したとおりですが, 基数の条件を弱コンパクト基数まで弱めた場合については, まだ未解決のようです. しかしながら, 基数 κ の条件をマーロ基数にまで弱めてしまうと $\diamondsuit_\kappa$ が成立しない場合がありえます. ゼーマン (Martin Zeman) の [15] によると, ウッディン (Hugh W. Woodin) は, ある巨大基数公理 (詳細にはわかりませんが $o(\kappa) = \kappa^{++}$ より少し強いものだそうです) から出発して, $\diamondsuit_\kappa$ が成立しない強マーロ基数 κ が存在するような集合論のモデルを提示しました. ゼーマンが [15] に述べている結果はいわばその逆で, $\diamondsuit_\kappa$ が成立しない強マーロ基数 κ の存在を仮定して, 多くの可測基数を含む内部モデルの存在を示しています. このように, 到達不能基数においてダイヤモンド原理が成立するかしないか, という問題には巨大基数公理がかかわっているのです.

また, 弱コンパクト基数の存在が矛盾を導かないなら, $\diamondsuit_\kappa(\mathbf{REG} \cap \kappa)$ が[*14]成り立たないような弱コンパクト基数 κ の存在もまた (GCH を含む集合論とのあいだに) 矛盾を導かないというウッディンによる結果があります. 同様の結果は, ハウザー (Kai Hauser) の [5] によって Π^m_n-記述不能基数へ, ザモーニャ (Mirna Džamonja) とハムキンス (Joel D. Hamkins) の [4] によって強伸展可能基数 (strongly unfoldable cardinal) へと拡張されています. この件に関する詳細は文献 [4] と, その末尾に挙げられている文献を見てください.

さて, 精妙基数については, 正則基数の集合へ制限されたダイヤモンド原理 $\diamondsuit_\kappa(\mathbf{REG} \cap \kappa)$ は成立します. というのも, κ の任意の精妙部分集合 E に対して $\diamondsuit_\kappa(E)$ が成立するからです. 定理 7.3 の証明の方法で, ただもう少し注意深く A_α を選べば, 結果として $\diamondsuit_\kappa(E)$-列が得られます.

定理 7.7 κ を精妙基数, E をその精妙部分集合とする. このとき $\diamondsuit_\kappa(E)$-列が存在する.

[証明] 大筋において定理 7.3 の証明のとおりだが, 今度のほうがダイヤモンドは傷つきやすい. もしも $\alpha \in \mathrm{Lim}(\kappa)$ で, $E \cap \alpha$ が α において共終であり, さらに

$$\exists A \subset \alpha \, \exists C \in \mathrm{Club}_\alpha \, \forall \gamma \in \alpha \cap E \cap C \, \big(A \cap \gamma \neq A_\gamma \big)$$

となっているとしたら, そのことを α のところでダイヤモンドが傷ついていると表現し, このような A と C のペアを A_α と C_α として採用する.

その構成の結果として得られる $\langle A_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ が $\diamondsuit_\kappa(E)$-列になることを示す. 背理法をもちいることにして, 部分集合 $A \subset \kappa$ と club 部分集合 $C \subset \kappa$ を

$$\forall \alpha \in E \cap C \Big(A \cap \alpha \neq A_\alpha \Big)$$

となるように取れたと仮定しよう. $\sup(\beta \cap E \cap C) = \beta$ をみたす順序数 $\beta < \kappa$ 全体の集合を C' としよう. C' は κ の club 部分集合で $C' \subset C$ をみたす. このとき

$$\forall \beta \in C' \, \forall \alpha \in E \cap C \big(A \cap \alpha \neq A_\alpha \big)$$

となり, すべての $\beta \in C'$ のところでダイヤモンドが傷ついている. ここで, E が κ の精妙部分集合であることにより

$$\alpha, \beta \in E \cap C' \ \text{かつ} \ \alpha < \beta \ \text{かつ} \ A_\alpha = A_\beta \cap \alpha \ \text{かつ} \ C_\alpha = C_\beta \cap \alpha$$

をみたすように α と β をとることができて, あとは定理 7.3 の証明と同様に議論して矛盾にいたる. ◀

[*14] ここで **REG** は正則基数全体のクラスという意味です. κ はマーロ基数なので $\mathbf{REG} \cap \kappa$ は κ の定常部分集合になります.

参考文献

[1] C. Akemann and N. Weaver, *Consistency of a counterexample to Naimark's problem*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **101**-20 (2004), pp. 7522-7525.

[2] W. Boos, *Lectures on Large Cardinals*, ***Logic Conference, Kiel 1974*** pp. 25–88, Lecture Notes in Math. **499**, Springer-Verlag 1975.

[3] K.J. Devlin, ***Constructibility***, Springer-Verlag 1984.

[4] M. Džamonja and J.D. Hamkins, *Diamond (on the regulars) can fail at any strongly unfoldable cardinal*, Ann. Pure Appl. Logic **144** (2006), pp. 83-95.

[5] K. Hauser, *Indescribable cardinals without diamonds*, Arch. Math. Logic **31** (1992), pp. 373–383.

[6] C. Hibbard, *Four Tips – Increase Measurable Results in Your Customer Success Stories*, Ezine Articles, `http://ezinearticles.com/?id=1073659`

[7] T. Jech, ***Set Theory*** (3rd Edition), Springer-Verlag 2003.

[8] R. Jensen, *Inner Models and Large Cardinals*, Bull. Symb. Logic **1**(1995), pp. 393-407.

[9] A. Kanamori, ***The Higher Infinite*** (2nd Edition), Springer-Verlag 2003; 第 1 版の邦訳: A. カナモリ著『巨大基数の集合論』(渕野昌訳, シュプリンガー・フェアラーク東京 1998 年)

[10] K. Kunen, ***Set Theory — An Introduction to Independence Proofs***, Elsevier 1980; 邦訳: ケネス・キューネン著『集合論: 独立性証明への案内』(藤田博司訳, 日本評論社 2008 年)

[11] S. Shelah, Web サイト: `http://shelah.logic.at/`

[12] —, *On successors of singular cardinals*, ***Logic Colloquium '78 (Mons, 1978)*** (North-Holland, 1979) pp. 357–380.

[13] —, *The generalized continuum hypothesis revisited*, Israel Jour. Math. **116** (2000), pp. 285–321. 最新校訂版は著者の Web サイト [11] から入手可能 (論文番号 460).

[14] —, *Diamonds*, URL: `http://arxiv.org/abs/0711.3030`, (2007)

[15] M. Zeman, $\diamondsuit$ *at Mahlo cardinals*, Jour. Symb. Logic **65** (2000), pp. 1813–1822.

[16] 鏡 弘道, 『集合論雑記』 Web サイト: `http://evariste.jp/kagami/diary/0000/settheory.html`

[17] 西田 幾多郎, 『善の研究』,

[18] 藤田 博司, ホームページ: `http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/%7Efujita/preprints.jp.html`

[19] —, 『無限基数と定常集合』, 非公式なノート (2009 年), 著者の Web サイト [18] より入手可能

[20] —, 『弱コンパクト基数』, 非公式なノート (2009 年), 著者の Web サイト [18] より入手可能