無限基数と定常集合

藤田 博司

更新: 2009 年 4 月 6 日*

概要

無限集合の組合せ論を勉強するさいに必要と思われる知識のまとめです. 次のトピックについて基本的なところをまとめます: 基数, 共終数, club 集合, 定常集合, 到達不能基数, イデアルとフィルター, 可測基数, イデアルの飽和数.

はじめに

まずは『玄妙基数と精妙基数』というノートを書き始めましたが, それに先立って, 予備知識の部分をいろいろ書いているうちに, その部分がどんどん長くなることがわかりました. 集合論的なバックグランドを自分がいかに断片的にしか理解してこなかったかを痛感しています. そして, 弱コンパクト基数について書いた部分を独立させて『弱コンパクト基数』というノートを作ったら, それが 35 ページにもわたる長いものになってしまいました. その部分を独立させた結果として, さらにその前の基数とか定常集合とかについて書いた部分も独立させるべきだということになって, それでできたのがこのノートです. したがって, ここには基本的な記号と用語のお約束の復習以外の内容はありません. 基数と共終数, club 集合と定常集合, 到達不能基数とマーロ基数, イデアルとフィルター, とすすみ, 可測基数の定義くらいまで書きます. いろいろなテキストに出てきてたやすくわかるような結果については, 証明をつけませんので, キューネン本などで調べてください.

集合論の慣例にしたがい, 順序数をあらわすためにギリシャ小文字 α, β, γ, ... を用います. なかでも, κ, λ の二文字は, とくに無限基数をあらわすために用います. 順序数全体のクラスを $\mathbf{ON}$ と書きます. これは集合ではなく, ZFC 集合論のフォーマルな展開には含まれないものです. こうしたものをどう扱うかという点については, キューネン本の第 I 章で詳述されています.

集合 x の冪集合 $\{\, y \,|\, y \subset x \,\}$ のことを $\mathcal{P}(x)$ と書きます. 順序数にかんする再帰的定義

$$\begin{cases} V_0 = \emptyset \\ V_{\beta+1} = \mathcal{P}(V_\beta) \\ V_\delta = \bigcup_{\alpha<\delta} V_\alpha \quad (\delta \text{ が極限順序数のとき}) \end{cases}$$

によって $\langle\, V_\alpha \;\big|\; \alpha \in \mathbf{ON} \,\rangle$ を定義します. すると, 正則性の公理のおかげで, どの集合もどれかの V_α の要素となります. いま, 集合 x が V_α に属するような最小の順序数 α を考えると, それは後続順序数のはずですから, $\alpha = \beta + 1$ という形になっています. この β は条件 $x \subset V_\beta$ をみたす最小の順序数ということになります.

---

* 起稿:2009 年 2 月 14 日, 脱稿:2009 年 3 月 13 日. 最終組版日 2009 年 4 月 6 日 (`time: 788`)

そのような β を集合 x の **階数** (rank) といいます:

$$\operatorname{rank}(x) = \min\left\{ \beta \in \mathbf{ON} \;\middle|\; x \subset V_\beta \right\}.$$

このとき, V_α は, 階数が α より小さい集合全体のクラスと一致します: $V_\alpha = \left\{ x \;\middle|\; \operatorname{rank}(x) < \alpha \right\}$.

これも集合論の慣例により, 順序数は自分より小さい順序数全体の集合と同一視されます. 選択公理のおかげで, どの集合からも, ある順序数への一対一写像が存在します. そこで, 集合 x に対して, x からの一対一写像が存在する最小の順序数のことを $|x|$ と書いて, x の **濃度** (cardinality) ということにします:

$$|x| = \min\left\{ \alpha \;\middle|\; \exists f \left(f : x \xrightarrow{1-1} \alpha \right) \right\}.$$

この定義によれば, 集合 x から集合 y の上への一対一写像があるためには, 両者の濃度が等しいこと, つまり $|x| = |y|$ となることが必要かつ十分です.

順序数 α は等式 $|\alpha| = \alpha$ をみたすとき **基数** (cardinal) と呼ばれます.[*1] ですから, 基数とは, 自分より小さい順序数への一対一写像が存在しないような順序数のことです. すべての自然数は基数です. 最初の無限順序数である ω もまた基数です. カントールの定理によれば ($2^\kappa > \kappa$ ですから), どの無限基数 κ に対しても, それより大きな基数は少なくともひとつ存在します. したがって, そのようなもののうちで最小のものも存在します. 無限基数 κ より大きな最小の基数のことを κ^+ と書きます. これが κ の次の無限基数ということになります. κ^+ の形の無限基数のことを **後続型基数** (successor cardinal) といい, この形にあらわされない無限基数を **極限基数** (limit cardinal) といいます. もちろんすべての無限基数は順序数としては極限順序数にきまっていますが, 基数と順序数では「次のやつ」の意味が違ってくるのです.

無限基数を小さい順に数え上げた超限列をオメガ系列

$$\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_\alpha < \cdots \quad (\alpha \in \mathbf{ON})$$

あるいはアレフ系列

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \cdots < \aleph_\alpha < \cdots \quad (\alpha \in \mathbf{ON})$$

のように書きます. どの無限基数 κ もどれかの $\aleph_\alpha$ に一致します. とくに, $\omega = \omega_0 = \aleph_0$ です. $\aleph_\alpha$ と ω_α は同じものなのですが, 基数であることを強調したい場合に $\aleph_\alpha$ と書き, それより小さい順序数の集合であると思いたい場合には ω_α と書く, といった使い分けがされているようです. ただし, ハッキリした通則があるわけではありません. あきらかに, α が後続順序数 ($\alpha = \beta + 1$) であるとき, かつそのときに限って, $\aleph_\alpha$ が後続型基数となります.

1 基数と共終数

まず, 基数の和と積を定義します. 基数の和と積は, 順序数としての和や積と同じく, 自然数についての演算の拡張になっていますが, 無限基数に対する, 基数としての和と積と, 順序数としての和と積とは, きちんと区別しないといけません.

[*1] 英語では本来これは cardinal number と呼ばれるべきものなのですが, cardinal が名詞としてすっかり定着してしまっています. まあ, cardinal には古来「枢機卿」という意味がありますから, 名詞扱いが不自然とまではいえませんが, ロジシャンのあいだではさらに, ordinal numbers(序数/順序数), rational numbers(有理数), real numbers(実数) についても同様に, ordinals, rationals, reals で済ませてしまうのが慣例になっています. なお辞書によると "cardinal" には 紅冠鳥 という意味もあるそうですが, これは枢機卿の衣の緋色からの連想かと思われます.

定義 1.1 κ と λ を有限または無限の基数とするとき, κ と λ の和 $\kappa+\lambda$ と積 $\kappa\cdot\lambda$ は, それぞれ 集合 $(\{0\}\times\kappa)\cup(\{1\}\times\lambda)$ と集合 $\kappa\times\lambda$ の濃度である. ◀

補題 1.2 任意の (有限または無限の) 集合 X と Y について, 等式

$$|X|+|Y|=|X\cup Y|+|X\cap Y| \tag{1}$$

$$|X|\cdot|Y|=|X\times Y| \tag{2}$$

が成立する. ◀

定理 1.3 κ と λ と μ を有限または無限の基数とするとき, 次の公式が成立する.

$$\kappa+\lambda=\lambda+\kappa \tag{3}$$

$$\kappa\cdot\lambda=\lambda\cdot\kappa \tag{4}$$

$$(\kappa+\lambda)+\mu=\kappa+(\lambda+\mu) \tag{5}$$

$$(\kappa\cdot\lambda)\cdot\mu=\kappa\cdot(\lambda\cdot\mu) \tag{6}$$

$$\kappa\cdot(\lambda+\mu)=(\kappa\cdot\lambda)+(\kappa\cdot\mu) \tag{7}$$

$$0+\kappa=\kappa \tag{8}$$

$$0\cdot\kappa=0 \tag{9}$$

$$1\cdot\kappa=\kappa \tag{10}$$

$$\max\{\kappa,\lambda\}\geq\aleph_0 \text{ のとき } \kappa+\lambda=\max\{\kappa,\lambda\} \tag{11}$$

$$\max\{\kappa,\lambda\}\geq\aleph_0,\ \min\{\kappa,\lambda\}\neq 0 \text{ のとき } \kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\} \tag{12}$$ ◀

無限に多くの基数の和や積も考えられます.

定義 1.4 添字づけされた集合族 $\langle X_i \mid i\in I\rangle$ が与えられたとする. この集合族の **直和** (direct sum) $\bigoplus_{i\in I}X_i$ と直積 $\prod_{i\in I}X_i$ を, それぞれ

$$\bigoplus_{i\in X}X_i=\bigcup_{i\in I}(\{i\}\times X_i), \tag{13}$$

$$\prod_{i\in I}X_i=\left\{f \;\middle|\; f:I\to\bigcup_{i\in I}X_i,\ \forall i\in I\Big(f(i)\in X_i\Big)\right\} \tag{14}$$

によって定義する. 添え字付けされた基数の集合 $\langle \kappa_i \mid i\in I\rangle$ の和と積は, それぞれ

$$\left|\bigoplus_{i\in I}\kappa_i\right|,\quad\left|\prod_{i\in I}\kappa_i\right| \tag{15}$$

で与えられるものとする. ◀

集合と基数のどちらを考えているか誤解のおそれのない文脈では, 基数の積の意味で $\prod_{i\in I}\kappa_i$ という記号を使うこともあります. 基数の和は $\sum_{i\in I}\kappa_i$ と書かれます.

では次に順序数の共終部分集合の定義を述べ, 共終数の概念を導入しましょう.

定義 1.5 順序数 α の部分集合 $u\subset\alpha$ が α において **共終** (cofinal) であるとは, u が α において上に有界でない, すなわち $\sup u=\alpha$ となるときにいう. ◀

後続順序数 $\beta+1$ の部分集合はすべて上に有界ですから, $\beta+1$ には共終な部分集合は存在しません. いっぽう, たとえば ω の部分集合は, 有限であれば有界, 無限であれば共終となっています. また, 極限順序数 $\omega+\omega$ には,

$$\left\{\omega+n \;\middle|\; n\in\omega\right\}$$

という共終部分集合があります．この共終部分集合の順序型は ω です．一般に極限順序数は自分より小さい順序数を順序型にもつ共終部分集合を含むことがあります．

定義 1.6 極限順序数 α の共終部分集合の順序型となりうる最小の順序数を α の **共終数** (cofinality) といい，記号 $\mathrm{cf}(\alpha)$ であらわす．◀

後続順序数の共終数は定義しません．

あきらかに，任意の極限順序数 α について $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$ が成立します．

定義 1.7 極限順序数 α は $\alpha = \mathrm{cf}(\alpha)$ をみたすとき **正則** (regular) であるといい，$\alpha > \mathrm{cf}(\alpha)$ であるとき **特異** (singular) であるという．◀

したがって，最小の無限基数 ω は正則順序数です．また，可算順序数の可算集合の上限はまた可算順序数なので，$\mathrm{cf}(\omega_1) = \omega_1$，したがって $\aleph_1$ は正則順序数です．より一般に，次のことが成立します．

補題 1.8 任意の順序数 β について $\mathrm{cf}(\aleph_{\beta+1}) = \aleph_{\beta+1}$．任意の極限順序数 δ に対して $\mathrm{cf}(\aleph_\delta) = \mathrm{cf}(\delta)$．◀

補題 1.9 すべての正則順序数は基数である．◀

したがって正則順序数のことをまた **正則基数** (regular cardinal) ともいいます． いっぽう，たとえば $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega < \aleph_\omega$ ですから，補題 1.9 の逆は成立しません．

定義 1.10 正則順序数でない基数を **特異基数** (singular cardinal) という．◀

補題 1.11 κ を無限基数とする．基数の集合 $\{\, \kappa_i \mid i \in I \,\}$ について $|I| < \mathrm{cf}(\kappa)$，かつ，すべての $i \in I$ について $\kappa_i < \kappa$ であるならば，$\sum_{i \in I} \kappa_i < \kappa$ である．そこで，濃度 κ の集合を，$\mathrm{cf}(\kappa)$ 個未満の部分集合 X_i の和に分割したとすると，少なくともひとつの X_i は濃度 κ をもつ． ◀

補題 1.8 によれば，後続型基数はすべて正則です．では，正則な極限基数はあるのでしょうか? おそらくはあるでしょう．しかし，ZFC 集合論ではそのことを証明できません．

定義 1.12 正則な極限基数のことを **弱到達不能基数** (weakly inaccessibel cardinal) とよぶ．◀

わざわざ「弱」到達不能というのは，「強」到達不能基数もあるからです．その定義を述べるには，基数の冪の定義を述べなければなりません．

集合 a から集合 b への関数は直積集合 $a \times b$ の部分集合ですから，その冪集合 $\mathcal{P}(a \times b)$ の要素です．したがって，a から b への関数全体の集合が存在し，それは $\mathcal{P}(a \times b)$ の部分集合になっています．この集合を ${}^a b$ と書きます:

$${}^a b = \left\{ f \;\middle|\; f : a \to b \right\}.$$

基数 κ の基数 λ 乗は，関数の集合 ${}^\lambda \kappa$ の濃度として定義されます:

定義 1.13 $\kappa^\lambda = \left|{}^\lambda \kappa\right|$．◀

有限な基数，すなわち自然数に対しては，この定義は掛け算のくり返しによる通常の定義と一致します．

定理 1.14 κ と λ と μ を有限または無限の基数とするとき, 次の公式が成立する.

$$\kappa \le \lambda \text{ のとき } \kappa^{\mu} \le \lambda^{\mu} \text{ かつ } \mu^{\kappa} \le \mu^{\lambda} \tag{16}$$
$$\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu} \tag{17}$$
$$\kappa^{\lambda\cdot\mu} = (\kappa^{\lambda})^{\mu} \tag{18}$$
$$\kappa^{1} = \kappa \tag{19}$$
$$\kappa^{0} = 1 \tag{20}$$
$$\kappa \ne 0 \text{ のとき } 0^{\kappa} = 0 \blacktriangleleft \tag{21}$$

すぐわかるとおり, 任意の集合 x について $2^{|x|} = |\mathcal{P}(x)|$ が成立します. このことが, $\mathcal{P}(x)$ のことを x の冪集合 (power set) とよぶ理由なのです. κ に対する 2^{κ} がどのような基数になるかは難しい問題です. カントールの定理は 2^{κ} が κ より真に大きいことを教えてくれます. したがって $2^{\kappa} \ge \kappa^{+}$ となっています.

定義 1.15 基数 κ が

$$\forall\lambda < \kappa\big(2^{\lambda} < \kappa\big)$$

をみたすならば κ は **強極限基数** (strong limit cardinal) とよばれる. 正則な強極限基数のことを **強到達不能基数** (strongly inaccessible cardinal) という. ◀

いつでも $2^{\kappa} \ge \kappa^{+}$ なので, 強極限基数は極限基数であり, したがって強到達不能基数は弱到達不能基数でもあります. 今後, たんに到達不能基数といえば, 強到達不能基数のことを意味するものとします.

基数の冪と共終数に関連した重要な事実として, 最後に, **ケーニヒの不等式** (König inequalities) を紹介します.

定理 1.16 (ケーニヒの不等式) 同じ集合 I に添字づけされた基数の集合 $\{\kappa_i \mid i \in I\}$ と $\{\lambda_i \mid i \in I\}$ があって, すべての $i \in I$ で $\kappa_i < \lambda_i$ となっているならば $\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$ である. ◀

定理 1.17 任意の無限基数 κ について $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$ と $\mathrm{cf}(2^{\kappa}) > \kappa$ が成立する. ◀

2 club 集合と定常集合

クラブ集合というと, 部活のメンバーがミーティングを始めるみたいですが, そういう意味ではありません. 棍棒ともトランプとも会員制のバーとも関係ありません. そもそも名詞ではなく形容詞的に使われる語ですから, 日本語では「club な」というぐあいに, 形容動詞として活用しないといけません.

定義 2.1 極限順序数 α の部分集合 $x \subset \alpha$ は, 条件

$$\forall\beta < \alpha\Bigg(x \cap \beta \ne \emptyset \;\to\; \sup(x \cap \beta) \in x\Bigg)$$

をみたすときに **閉集合** (closed set) とよばれる. ◀

定義 2.2 極限順序数 α の共終な閉部分集合を **club 集合** (club subset/closed unbounded subset) という. ◀

もちろん club という原語の綴りをそのまま残すのは本意ではないのですが, まさか倶楽部集合なんていうわけにもいきません. よい日本語がほしいところですが, なかなか思いつきません.

極限順序数の club 部分集合の理論は $\mathrm{cf}(\alpha)$ が可算のときと不可算のときとで様子が大きく変わってきます. $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ のときは, α には順序型 ω をもつ共終部分集合が存在します. それらはすべて club 部分集合ということになります. ですから

$$\gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \cdots \ (n < \omega)$$

かつ $\alpha = \sup\{\,\gamma_n \mid n < \omega\,\}$ となっている場合には, $\{\,\gamma_{2n} \mid n < \omega\,\}$ と $\{\,\gamma_{2n+1} \mid n < \omega\,\}$ というぐあいに α の二つの互いに交わらない club 部分集合がとれます. α の共終数が不可算である場合には, このようなことは起こりません.

補題 2.3 極限順序数 α は $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$ をみたすものとし, A と B は α の club 部分集合であるとする. このとき, 共通部分 $A \cap B$ も α の club 部分集合である. より強く, α の club 部分集合の列

$$A_0, A_1, \ldots, A_\xi, \ldots \quad (\xi < \delta)$$

が与えられていて, しかも列の長さ $\delta < \mathrm{cf}(\alpha)$ だとするとき, 共通部分 $\bigcap_{\xi<\delta} A_\xi$ は α の club 部分集合である. ◀

補題 2.4 正則基数 κ の club 部分集合の列 $\langle\, C_\alpha \;\big|\; \alpha < \kappa \,\rangle$ が与えられたとする. 集合 $\triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ を

$$\triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \left\{\, \beta < \kappa \;\middle|\; \forall \alpha < \beta \big(\beta \in C_\alpha\big) \,\right\}$$

によって定義すれば, $\triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ もまた κ の club 部分集合となる. ◀

このように定義された $\triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ のことを, 集合族 $\{\, C_\alpha \mid \alpha < \kappa \,\}$ の対角共通部分といいます (定義 5.8 を参照).

定義 2.5 極限順序数 α の部分集合 A α **において定常である** (stationary in α) , (あるいは α の定常部分集合である) とは, α のあらゆる club 部分集合が, A と共通要素をもつときにいう. ◀

ここでも α の共終数が可算か不可算かによって定常部分集合の姿が大きく違っています. もしも $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ であれば, 共終な上昇列

$$\gamma_0 < \gamma_1 < \cdots < \gamma_n < \cdots \ (n < \omega)$$

がとれます, このことから α は 可算無限個の区間

$$[0, \gamma_0),\ [\gamma_0, \gamma_1),\ [\gamma_1, \gamma_2),\ \ldots$$

に分けられることになります. α の部分集合 A について

$$\beta_n \in [\gamma_n, \gamma_{n+1}) \setminus A$$

なる β_n が無限個の n において選べるなら, そのような β_n を並べただけで, A と交わらない α の club 集合ができてしまいます. したがって, A が α において定常であるためには, 高々有限個の例外を除いてすべての n で $[\gamma_n, \gamma_{n+1}) \subset A$ とならねばならず, したがって, どれかの γ_n 以上 α 未満の順序数をすべて含まなければなりません. まとめて言えば,

補題 2.6 極限順序数 α が $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ をみたすとき, $A \subset \alpha$ が α において定常であるための必要十分条件は $\alpha \setminus A$ が α において有界であることである. ◀

順序数 α の共終数が不可算のときは, 定常集合の様子はこれとはまったく異なります. あえてイメージ的な話をすると, $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$ のとき, α の club 部分集合は, α 未満の順序数の系列において大事な節目になる順序数をすべて含んでいるという意味において, α の主要部分であり, なんらかの club 部分集合の補集合に含まれるような集合 (定常でない集合) は, 本質的でないとして捨てられてしまいかねない零細な部分といえます. この考え方でいくと, 定常部分集合はどの club 部分集合とも交わるのですから, 捨てられてしまうほど零細ではない, “無視できない大きさの部分” ということになります.

定義 2.7 極限順序数 α の club 部分集合全体のなす集合族を Club_α であらわす．また, α の定常部分集合全体のなす集合族と定常でない部分集合全体のなす集合族を, それぞれ Stat_α と NS_α であらわす. ◀

定理 2.8 フォドアの押し下げ補題 (Fodor's Pressing Down Lemma) 不可算な正則基数 κ の定常な部分集合 S を考える．関数 $f : S \to \kappa$ が S のすべての要素 α について $f(\alpha) < \alpha$ となっているとする．このとき, ある順序数 $\gamma < \kappa$ について集合

$$f^{-1}[\{\gamma\}] = \{\, \alpha \in S \mid f(\alpha) = \gamma \,\}$$

が κ において定常となる.

[証明] 対偶を示す．すべての γ に対して $f^{-1}[\{\gamma\}]$ が定常でないというのだから, κ の club 部分集合 C_γ を $C_\gamma \cap f^{-1}[\{\gamma\}] = \emptyset$ となるようにとれる．$C = \triangle_{\gamma<\kappa} C_\gamma$ とおこう．補題 2.4 により C も κ の club 部分集合である．S は κ において定常だから $C \cap S \neq \emptyset$ となる．そこで $\alpha \in C \cap S$ とすると, $\gamma < \alpha$ のとき $\alpha \in C_\gamma$ なので $f(\alpha) \neq \gamma$, だから $f(\alpha) \geq \alpha$ となる. ◀

順序数の集合 S 上で定義され, $\forall \alpha \in S \setminus \{0\}\bigl(f(\alpha) < \alpha\bigr)$ をみたすような関数 $f : S \to \mathbf{ON}$ は S 上で **退歩的** (regressive) あるいは **退行的** であるといいます.

3 到達不能基数とマーロ基数

強到達不能基数の大切な性質としては次の事実があります．κ を強到達不能基数とするとき, 階数 κ 未満の集合の全体 V_κ は ZFC 集合論のすべての公理をみたします．くわしくいうと, φ を ZFC 集合論の公理のうち任意のひとつとし, φ にあらわれる量化 $\exists x$ を $\exists x \in V_\kappa$ に, $\forall x$ を $\forall x \in V_\kappa$ に, それぞれ一斉に書き換えた式を φ^{V_κ} とあらわしたとすれば,

$$\forall \kappa \Bigl(\kappa \text{ は強到達不能基数} \longrightarrow \varphi^{V_\kappa} \Bigr)$$

という式が, ZFC 集合論の定理になるのです．つまり V_κ が ZFC 集合論のモデルになるというわけです．このことからは, “強到達不能基数が存在する” という命題が ZFC 集合論の定理になりえないことが導かれます.

なお, これは本題とは関係ありませんが, V_κ が ZFC 集合論のモデルになるからといって, κ が強到達不能基数になるとは限らないことに注意してください．V_κ の要素や定義可能な部分集合ばかりをいくら調べても, κ が正則基数かどうかを言い当てることはできないからです.[*2] V_α が ZFC 集合論のモデルになるような特異基数 α が存在する可能性は排除できません．というのも, κ が強到達不能基数であれば, $\bigl\{\, \alpha < \kappa \mid V_\alpha \prec V_\kappa \,\bigr\}$ は κ の club 部分集合であり, いっぽう κ 未満の特異基数の集合は κ において定常であるからです.

定義 3.1 無限基数 κ より小さい正則基数のなす集合が κ において定常であるとき, κ を **弱マーロ基数** (weakly Mahlo cardinal) という．強極限基数であるような弱マーロ基数のことを **強マーロ基数** (strongly Mahlo cardinal) という.

定理 3.2 無限基数 κ が強マーロ基数であれば, κ は強到達不能基数であり, しかも κ より小さい強到達不能基数が κ の定常部分集合をなす. ◀

[*2] κ が強到達不能基数であるためには, $V_{\kappa+1}$ が (クラスの理論としての)BG 公理系のモデルになっていることが必要かつ十分です.

4　遺伝的に小さい集合

最初に定義した, 階数が α 未満の集合全体のなす集合 V_α に負けず劣らず, いろいろの場面で大切な役割を果たすのが, 遺伝的に小さな集合全体の集合です. 推移的集合と推移的閉包の定義から復習しましょう.

定義 4.1　集合 x のどの要素の要素もまた x の要素であるとき, x のことを **推移的** (transitive) な集合という. ◀

これを推移的という理由ですが, x が推移的な集合であるための条件を

$$z \in y \in x \ \rightarrow \ z \in x$$

と書き直してみれば, まあ, あきらかでしょう. あきらかに, すべての順序数およびすべての V_α は推移的集合です. また, 基礎の公理により, すべての集合はどれかの V_α の (とくに $V_{\mathrm{rank}(x)}$ の) 部分集合ですから, x を部分集合として含む推移的集合は確かに存在します. そこで

$$\mathrm{TC}(x) = \bigcap\bigl\{\, y \subset V_{\mathrm{rank}(x)} \bigm| (x \subset y) \wedge (y \text{ は推移的}) \,\bigr\}$$

という定義は意味をもちます. これが, x を部分集合として含む最小の推移的集合となっています.

定義 4.2　集合 x を部分集合として含む最小の推移的集合を x の **推移的閉包** (transitive closure) といい, $\mathrm{TC}(x)$ であらわす. ◀

次の補題に推移的閉包の基本的な性質をまとめてしまいました. (1) や (5) をみればわかるとおり, 本当は推移的閉包を定義するのに冪集合の公理なんてベラボウなものは必要ありません.

補題 4.3　(1) 集合 x に対し, 漸化式 $f(0) = x$, $f(n+1) = \bigcup f(n)$ によって関数 $f : \omega \to \mathbf{V}$ を定義すれば, $\mathrm{TC}(x) = \bigcup(f``\omega)$ である. (2) 任意の集合 x について $\mathrm{rank}\bigl(\mathrm{TC}(x)\bigr) = \mathrm{rank}(x)$. (3) x が推移的であるためには $x = \mathrm{TC}(x)$ が必要かつ十分. (4) $\mathrm{TC}(\{x\})$ は集合 x を要素とする推移的集合のうちで最小のものである. (5) クラス関数 $\mathbf{F} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ がすべての集合 x について

$$\mathbf{F}(x) = x \cup \bigcup\bigl(\mathbf{F}``x\bigr)$$

をみたすならば, $\forall x\bigl(\mathbf{F}(x) = \mathrm{TC}(x)\bigr)$ である. ◀

さて, $\mathrm{TC}(x)$ は x の要素, その要素, そのまた要素, 等々によって構成される集合です. 順序数を生成するプロセスに並行して, すでに作られた集合の集まりを作ることを際限なく繰り返す終わりのないプロセスを考えると, 基礎の公理によって, どんな集合もこのプロセスのどこかで生成されるわけですが, $\mathrm{TC}(x)$ とは, 集合 x を作るさいに, それに先立って作られていなければならない, いわば x の祖先となるべき集合を集めた全体だといえます. このイメージにより次の用語が正当化されます.

定義 4.4　$\mathbf{A}$ を任意のクラスとする. 条件 $\mathrm{TC}(\{x\}) \subset \mathbf{A}$ をみたす集合 x のことを, クラス $\mathbf{A}$ に **遺伝的に属する集合** (set belonging hereditarily to $\mathbf{A}$) という. ◀

定義 4.5　κ を任意の無限基数とする. 条件,

$$\forall y \in \mathrm{TC}(\{x\})\Bigl(\, |y| < \kappa \,\Bigr)$$

をみたす集合を **遺伝的に κ より小さい集合** (set hereditarily smaller than κ) とよび, その全体を H_κ と書く. ◀

補題 4.6 遺伝的有限集合の全体は V_ω である: $H_{\aleph_0} = V_\omega$. ◀

補題 4.7 κ が強到達不能基数のとき, $H_\kappa = V_\kappa$ が成立する. ◀

定義からただちに明らかというわけにはいきませんが, $H_\kappa \subset V_{\kappa^+}$ なので, $H(\kappa)$ は集合です. κ が正則基数の場合は, x が遺伝的に κ より小さいということを手短に $\bigl|\mathrm{TC}(x)\bigr| < \kappa$ と書くことができます. しかし, この表現は κ が特異基数のときには使えません.

だいいち, κ が特異基数のときの H_κ の扱いは少し厄介です. 定義 4.5 に従えば, たとえば

$$x = \left\{\, \aleph_n \;\middle|\; n < \omega \,\right\}$$

という集合 x はたしかに $H_{\aleph_\omega}$ に属するのですが, $|\mathrm{TC}(x)| = \aleph_\omega$ かつ $\mathrm{rank}(x) = \omega_\omega$ となっていて, この集合が累積階層のなかで生成されるまでには, $\aleph_\omega$ 個の集合がそれに先立って生まれている必要があります. ですから, 遺伝的に κ より小さいということを, 長さ κ 未満の過程によって, 個数 κ 未満の材料から生成できるという意味にとるとしたら, $|\mathrm{TC}(x)| < \kappa$ のほうがより適切な定義だということになりそうです. 実際, たとえばキューネン本のように, $H_\kappa = \left\{\, x \;\middle|\; |\mathrm{TC}(x)| < \kappa \,\right\}$ と定義している本もあります. ここではどちらがより適切なのかという判断は差し控えることにします.

5 イデアルとフィルター

ここではイデアルとフィルターについての定義を復習します. 基本的なことばかりです.

定義 5.1 集合 X の部分集合の集合 $\mathcal{I}$ が, 条件

(1) $A \subset B \subset X$ かつ $B \in \mathcal{I}$ ならば $A \in \mathcal{I}$,
(2) $A, B \in \mathcal{I}$ ならば $A \cup B \in \mathcal{I}$

をみたすとき, $\mathcal{I}$ を X 上の **イデアル** (ideal) とよぶ. 空集合 $\emptyset$ でも X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ 全体でもないイデアルを, **自明でない** (non-trivial) イデアル, あるいは**真のイデアル**という. ◀

イデアルという数学的コンセプトの発端は環論にあります. 冪集合 $\mathcal{P}(X)$ を, 対称差を和とし共通部分を積としてブール環とみなしたときに, 環論でいう意味でイデアルとなる集合族が, 上で定義したイデアルです. しかしながら, 集合論においてイデアルは環論との関係を離れて独自の重要な役割を果たします.

イデアルという概念の双対となるフィルターの概念をつぎに定義します.

定義 5.2 集合 X の部分集合の集合 $\mathcal{F}$ が, 条件

(i) $A \subset B \subset X$ かつ $A \in \mathcal{F}$ ならば $B \in \mathcal{F}$,
(ii) $A, B \in \mathcal{F}$ ならば $A \cap B \in \mathcal{F}$

をみたすとき, $\mathcal{F}$ を X 上の **フィルター** (filter) とよぶ. 空集合 $\emptyset$ でも X の冪集合 $\mathcal{P}(X)$ 全体でもないフィルターを, **自明でない** (non-trivial) フィルター, あるいは**真のフィルター**という. ◀

イデアル $\mathcal{I}$ のメンバーの補集合全体の族はフィルターになり, フィルター $\mathcal{F}$ のメンバーの補集合全体の族はイデアルになります. イデアルについての定義や命題はすべてフィルターについての定義や命題に書き換えることができ, また逆にフィルターについての定義や命題はすべてイデアルについての定義や命題に書き換えることができます. このことをイデアルとフィルターの **双対性** (duality) といいます.

定義 5.3 (1) X を空でない集合, $\mathcal{I}$ を X 上のイデアルとする. $X \setminus A \in \mathcal{I}$ をみたす集合の全体を $\mathcal{I}^*$ と書き

$\mathcal{I}$ に **双対なフィルター** (dual filter) とよぶ. (2) 集合 X 上のフィルター $\mathcal{F}$ に対して, $X \setminus A \in \mathcal{F}$ をみたす集合の全体を $\mathcal{F}^*$ と書き, $\mathcal{F}$ に **双対なイデアル** (dual ideal) とよぶ. ◀

補題 5.4 X を空でない任意の集合としよう. X 上の任意のイデアル $\mathcal{I}$ に対して, $\mathcal{I}^*$ は X 上のフィルターであり, また, 任意のフィルター $\mathcal{F}$ に対して, $\mathcal{F}^*$ は X 上のイデアルである. さらに等式

$$(\mathcal{I}^*)^* = \mathcal{I},$$
$$(\mathcal{F}^*)^* = \mathcal{F}$$

が成立する. ◀

定義 5.5 集合 X 上の自明でないフィルター $\mathcal{F}$ が $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}^* = \mathcal{P}(X)$ をみたすとき, $\mathcal{F}$ を **超フィルター** (ultrafilter) とよぶ. ◀

次の補題は簡単に検証できるものです.

補題 5.6 集合 X 上の自明でないフィルター $\mathcal{F}$ について次の条件は互いに同値である.

(1) $\mathcal{F}$ は超フィルターである,
(2) $\mathcal{F}$ は極大フィルターである, すなわち $\mathcal{F}$ を含むフィルターは自明なフィルターと $\mathcal{F}$ 自身しかない,
(3) $A \cup B \in \mathcal{F}$ のとき $A \in \mathcal{F}$ か $B \in \mathcal{F}$ の少なくとも一方は成立する,
(4) 双対なイデアル $\mathcal{F}^*$ は **素イデアル** (prime ideal) である, すなわち $A \cap B \in \mathcal{F}^*$ のとき $A \in \mathcal{F}^*$ か $B \in \mathcal{F}^*$ の少なくとも一方が成立する
(5) 双対なイデアル $\mathcal{F}^*$ が極大イデアルである. ◀

つまらない例ですが, $\{\emptyset\}$ はイデアル. $\{X\}$ はフィルターです. $X \neq \emptyset$ であるかぎり, これらは「自明でない」イデアルであり「自明でない」フィルターです. もう少し一般に $A \subset X$ のとき, $\{x \subset X \mid x \subset A\}$ はイデアル, $\{x \subset X \mid A \subset x\}$ はフィルターになります. このようなイデアルやフィルターは, メンバー A をもつイデアルなりフィルターなりのうち最小のものであり, A によって生成された **単項イデアル** (principal ideal) とか **単項フィルター** (principal filter) と呼ばれるものです. 単項でないイデアルやフィルターは **非単項** (non-principal) あるいは **自由** (free) であるといわれます. このノートでは 非単項 ということにします.

さて, イデアルやフィルターを論じるたびに, いちいち自明でないと断るのは面倒ですから, **これ以後, イデアルとかフィルターといえば, とくに断らない限り, 自明でないイデアルやフィルターだけを考える**ことにします. もちろん, このような取り決めをしようがしまいが, 実際の場面でイデアルやフィルターを定義したさいには, それが自明でないかどうかを忘れずにチェックしなければなりません.

補題 5.7 (**素イデアル定理**, Prime Ideal Theorem) 任意の自明でないイデアルに対して, それを含む極大イデアルが存在する. 任意の自明でないフィルターに対して, それを含む超フィルターが存在する. ◀

定義 5.8 無限基数 κ 上のフィルター $\mathcal{F}$ は, 次の二つの条件をみたすとき, **正規フィルター** (normal filter) とよばれる:

(a) すべての $\alpha < \kappa$ について $\kappa \setminus \alpha \in \mathcal{F}$;
(b) すべての $\langle x_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \in {}^\kappa\mathcal{F}$ に対して

$$\left\{ \beta < \kappa \;\middle|\; \forall \alpha < \beta \big(\beta \in x_\alpha\big) \right\} \in \mathcal{F}. ◀$$

正規フィルターが, 同時に超フィルターでもあれば, それは **正規超フィルター** (normal ultrafilter) と呼ばれます. この定義にあらわれた, $\forall\alpha < \beta\bigl(\beta \in x_\alpha\bigr)$ をみたす β の集合のことを, 集合列 $\langle x_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ の **対角共通部分** (diagonal intersection) といい, 記号 $\triangle_{\alpha<\kappa} x_\alpha$ であらわします.

フィルターとイデアルの双対性から, 正規イデアルの概念も定義されます. 重要な概念なのできちんと書いてしまいましょう.

定義 5.8* 無限基数 κ 上のイデアル $\mathcal{I}$ は, 次の二つの条件をみたすとき, **正規イデアル** (normal ideal) とよばれる:

(a*) すべての $\alpha < \kappa$ について $\alpha \in \mathcal{I}$;

(b*) すべての $\langle x_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \in {}^\kappa\mathcal{I}$ に対して

$$\Bigl\{\, \beta < \kappa \;\Big|\; \exists\alpha < \beta\bigl(\beta \in x_\alpha\bigr) \Bigr\} \in \mathcal{I}. \blacktriangleleft$$

この定義にあらわれた, $\exists\alpha < \beta\bigl(\beta \in x_\alpha\bigr)$ をみたす β の集合のことを, 集合列 $\langle x_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ の **対角和** (diagonal union) といい, 記号 $\triangledown_{\alpha<\kappa} x_\alpha$ であらわします.

補題 5.9 不可算正則基数 κ 上の正規フィルターは κ-完備 (→定義 6.3) である. (したがって双対性により κ 上の正規イデアルは κ-加法的 (→定義 6.1) である.)

[証明] $\mathcal{F}$ を κ 上の正規フィルターとしよう. λ を κ 未満の基数として, $\mathcal{F}$ から λ 個の要素 X_ξ $(\xi < \lambda)$ が任意に取り出されたとする. これらの集合に加えて $\lambda \leq \xi < \kappa$ のときには $X_\xi = \kappa$ とおいて, その対角共通部分を X としよう

$$X = \triangle_{\xi<\kappa} X_\xi$$

すると正規フィルターの条件 (b) より $X \in \mathcal{F}$ で, また正規フィルターの条件 (a) により, $X \setminus \lambda \in \mathcal{F}$ となる. 作り方から

$$\alpha \in X \setminus \lambda \;\leftrightarrow\; \alpha \geq \lambda \wedge \forall\xi < \lambda\bigl(\,\alpha \in X_\xi\,\bigr).$$

こうして $\bigcap_{\xi<\lambda} X_\xi$ は $\mathcal{F}$ のメンバー $X \setminus \lambda$ を含むことになり, フィルターの条件から $\bigcap_{\xi<\lambda} X_\xi \in \mathcal{F}$ となる. $\blacktriangleleft$

次には, κ 上の正規フィルターの要素がすべて κ の定常部分集合であることを証明します. 自明でないフィルターでは要素どうしがかならず空でない共通部分をもつので, これはどの正規フィルターもすべての club 集合を含むと言うのと同じことです.

補題 5.10 κ を不可算正則基数とし $\mathcal{F}$ を κ 上の正規フィルターとする. このとき κ のすべての club 部分集合が $\mathcal{F}$ に属する. したがって, $\mathcal{F}$ のメンバーはすべて κ の定常部分集合である.

[証明] C を κ の任意の club 部分集合とし, $f : \kappa \to C$ を C の要素の昇順の数え上げとしよう. 正規フィルターの条件 (a) により, すべての $\alpha < \kappa$ について $\kappa \setminus f(\alpha) \in \mathcal{F}$ である. したがって正規フィルターの条件 (b) により, 対角共通部分 $\triangle_{\alpha<\kappa}(\kappa \setminus f(\alpha))$ も $\mathcal{F}$ に属する. この集合を C' としよう, すると,

$$\begin{aligned}
\xi \in C' &\;\leftrightarrow\; \forall\alpha < \xi\bigl(\,f(\alpha) \leq \xi\,\bigr)\\
&\;\leftrightarrow\; \xi = \sup_{\alpha<\xi} f(\alpha)\\
&\;\leftrightarrow\; \xi = \sup f``\xi.
\end{aligned}$$

ここで f の値域 C が club 集合であることから, $\xi \in C'$ のとき $\xi = f(\xi) \in C$ したがって $C' \subset C$ である. C' は $\mathcal{F}$ に属するから C も $\mathcal{F}$ に属する. $\blacktriangleleft$

したがって双対性により任意の正規イデアルは NS_κ を含みます．また, 次の補題が成立することはあきらかですから, NS_κ は κ 上の最小の正規イデアル, NS_κ^* は κ 上の最小の正規フィルターということになります．

補題 5.11 不可算正則基数 κ において定常でない部分集合全体の集合 NS_κ は, κ 上の正規イデアルである. ◀

正規イデアルの次の特徴づけも, しばしば利用されます．

補題 5.12 不可算正則基数 κ 上のイデアル $\mathcal{I}$ が正規イデアルであるためには, 定義 5.8*の条件 (a*) と, 次の **押し下げ条件** (pressing-down condition) をみたすことが, 必要かつ十分である: $S \subset \kappa$, $S \notin \mathcal{I}$ とし, $f : S \to \kappa$ を任意の退行的関数とするとき, ある $\beta < \kappa$ について $f^{-1}``\{\beta\} \notin I$ となる．

[証明] (必要性) もしもすべての $\beta < \kappa$ について $f^{-1}``\{\beta\} \in \mathcal{I}$ だったならば, これらの対角和 $\triangledown_{\beta<\kappa} f^{-1}``\{\beta\}$ も $\mathcal{I}$ に属する．ところが, f が退行的関数であることから この対角和は f の定義域 S と一致する．これは $S \notin \mathcal{I}$ という仮定と矛盾する．

(十分性) $\mathcal{I}$ のメンバーの列 $\langle x_\beta \mid \beta < \kappa \rangle$ が与えられたとして, その対角和 $x = \triangledown_{\beta<\kappa} x_\beta$ を考える．x の各要素 α に $\alpha \in \beta$ となる最小の β を対応させれば, ここに退行的関数 $f : x \to \kappa$ が得られる．$\beta < \kappa$ の逆像 $f^{-1}``\{\beta\}$ は x_β の部分集合だから $\mathcal{I}$ のメンバーである．したがって押し下げ条件 (の対偶) によって, $x \in \mathcal{I}$ となる. ◀

6 可測基数

イデアルの加法数, フィルターの完備数についての考察から可測基数の定義へと導きます．可測基数が強到達不能基数であることと, 任意の可測基数上に正規超フィルターが存在することを証明します．

定義 6.1 集合 X 上のイデアル $\mathcal{I}$ について, $S \subset \mathcal{I}$ かつ $\bigcup S \notin \mathcal{I}$ をみたす部分集合 S があるならば, そのような部分集合の最小の濃度を $\mathcal{I}$ の **加法数** (additivity) という．加法数が κ 以上であるようなイデアルは **κ-加法的** (κ-additive) であるという. ◀

あきらかに, 集合 X 上のイデアル $\mathcal{I}$ の加法数は, あるとすれば $|X|$ 以下です．したがって, $|X|^+$-加法的というのは (言葉が意味をもつとして) ∞-加法的というのと変わりません．そのようなイデアルは単項イデアルしかありません．

補題 6.2 イデアルの加法数は正則な無限基数である. ◀

イデアルの加法数に双対概念として対応するフィルターの属性は, 完備数と呼ばれています．

定義 6.3 集合 X 上のフィルター $\mathcal{F}$ について, $S \subset \mathcal{F}$ かつ $\bigcap S \notin \mathcal{F}$ をみたす部分集合 S があるならば, そのような部分集合の最小の濃度を $\mathcal{F}$ の **完備数** (completeness) という．完備数が κ 以上であるようなフィルターは **κ-完備** (κ-complete) であるという. ◀

任意の正則 κ に対して, 加法数 κ のイデアル, 完備数 κ のフィルターは, 確かに存在します．たとえば, κ の部分集合のうち濃度が κ 未満のものを考えると, その全体は κ-加法的だが κ^+-加法的でないイデアルとなるからです．ところが素イデアル定理によってそのイデアルを極大イデアルに拡大すると, 多くの場合, 加法数がとたんに $\aleph_0$ に落ちてしまいます．実は, 加法数が不可算基数であるような極大イデアルの存在を, 通常の集合論の公理から証明することはできないのです．

定義 6.4 不可算基数 κ がなんらかの極大イデアルの加法数になっているとき, κ を **可測基数** (measurable cardinal) とよぶ. ◀

この定義と, 濃度 κ の集合上ではどんなイデアルの加法数も κ より大きくはならないことをあわせ考える

と, 次のことがわかります.

補題 6.5 不可算基数 κ が可測基数であるためには κ 上に非単項 κ-完備超フィルターが存在することが必要かつ十分である. ◀

補題 6.6 可測基数は強到達不能基数である.

[証明] κ が可測基数であったとしよう. 定義から, 可測基数はイデアルの加法数であるから, κ が正則基数であることは容易にわかる. 強極限基数であることを背理法で証明するために, $\lambda < \kappa \le 2^\lambda$ をみたす基数 λ が存在したと仮定する. 1-1 関数 $F : \kappa \to {}^\lambda 2$ を固定する. U を κ 上の非単項 κ-完備超フィルターとする. λ 未満の各順序数 ξ について, もしも $\{\, \alpha < \kappa \mid F(\alpha)(\xi) = 0 \,\} \in U$ なら $f(\xi) = 0$, そうでなければ $f(\xi) = 1$ として $f \in {}^\lambda 2$ を定義すると, U の κ-完備性から,

$$\bigcap_{\xi<\lambda} \left\{ \alpha < \kappa \;\middle|\; F(\alpha)(\xi) = f(\xi) \right\} \in U$$

となってしまうが, これは $F^{-1}``\{f\} \in U$ ということを意味する. ところが $F$ は 1-1 関数なので, $F^{-1}``\{f\}$ は高々ひとつの要素しかもたない, これは U が非単項超フィルターであるということと矛盾する. ◀

この節の残りの部分では, 可測基数上に正規超フィルターが存在することを証明します.

κ を可測基数, U を κ 上の非単項 κ-完備超フィルターとします. 関数の集合 ${}^\kappa\kappa$ 上に U を法とする同値関係

$$f =_U g \;\leftrightarrow\; \left\{ \alpha < \kappa \;\middle|\; f(\alpha) = g(\alpha) \right\} \in U$$

を定義しましょう. f の同値類を $[f]_U$ と書くことにします. 商集合すなわち同値類の全体は ${}^\kappa\kappa/U$ と書きましょう. この集合上に, 順序づけを

$$[f]_U < [g]_U \;\leftrightarrow\; \left\{ \alpha < \kappa \;\middle|\; f(\alpha) < g(\alpha) \right\} \in U$$

によって定義します. U が超フィルターであることから $({}^\kappa\kappa/U, <)$ は全順序であり, また U が κ-完備したがって ω_1-完備であることから, 整列順序になります.

補題 6.7 整列集合 $({}^\kappa\kappa/U, <)$ の順序型は κ より大きい.

[証明] κ 未満の α に対して, 定数関数 c_α の同値類を $i(\alpha)$ と書くことにしよう. すると明らかに $\alpha < \beta \leftrightarrow i(\alpha) < i(\beta)$ である. いっぽう, κ 上の恒等関数の同値類を γ とすると, U が κ-完備かつ非単項であることから, すべての $\alpha < \kappa$ について $\{\, \beta < \kappa \mid \alpha < \beta \,\} \in U$, したがって $[c_\alpha] < [\mathrm{id}]$ である. ゆえに, 順序保存写像 $i : \kappa \to ({}^\kappa\kappa/U, <)$ は上に有界である. ◀

この補題により, 整列順序づけされた集合 $({}^\kappa\kappa/U, <)$ には κ 番目の要素が存在します. その要素 (関数の同値類) の代表元 f を選びましょう. この f は任意の $g \in {}^\kappa\kappa$ について

$$[g]_U < [f]_U \;\leftrightarrow\; \exists \xi < \kappa \big([g]_U = i(\xi) \big)$$

をみたします. $D = \{\, X \subset \kappa \mid f^{-1}``X \in U \,\}$ とおきましょう. すると $D$ が $\kappa$ 上の $\kappa$-完備超フィルターであることはあきらかです. また, 仮に $\{\xi\} \in D$ なら, $f^{-1}``\{\xi\} \in U$ したがって $[f]_U = i(\xi)$ となり f のとり方に矛盾することになるので, すべての $\xi < \kappa$ について $\{\xi\} \notin D$, すなわち D は非単項超フィルターです. D は κ-完備な非単項超フィルターなので, 正規フィルターの定義 ($\to$ 5.8) の条件 (a) をみたします.

つぎに正規フィルターの条件 (b) を確かめましょう. D の要素の列 $\langle y_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle \in {}^\kappa D$ が与えられたとします. $x_\alpha = f^{-1}``y_\alpha$ とおくと, $x_\alpha \in U$ です. $y = \triangle_{\alpha<\kappa} y_\alpha$ とおき, $y \notin D$ だったと仮定します. すると,

D の定義から $f^{-1}``y \notin U$ したがって $\kappa \setminus f^{-1}``y \in U$ となります．この集合を z とすると, $\xi \in z$ のとき $f(\xi) \notin \triangle_{\alpha<\kappa} y_\alpha$ だから

$$\forall \xi \in z \exists \alpha < f(\xi) \Big(f(\xi) \notin y_\alpha \Big)$$

となるので, 各 $\xi \in z$ にそのような α を対応させるような関数 $g \in {}^\kappa\kappa$ がとれて

$$\forall \xi \in z \Big(g(\xi) < f(\xi) \ \wedge \ f(\xi) \notin y_{g(\xi)} \Big)$$

ところが f のとり方から, z 上つねに $g(\xi) < f(\xi)$ となるような g については $i(\alpha) = [g]_U$ をみたす $\alpha < \kappa$ がとれるので, 結局

$$\Big\{ \xi \in z \ \Big| \ f(\xi) \notin y_\alpha \Big\} \in U$$

ゆえに $x_\alpha \notin U$, $y_\alpha \notin D$ となって矛盾します．ゆえに $y \in D$ のはずで, D は正規フィルターの条件 (b) をみたします．こうして次の補題が証明できました.

補題 6.8 κ を可測基数とするとき, κ 上に正規超フィルターが存在する. ◀

7 イデアルの飽和数

すでに可測基数が強到達不能基数になることが示されましたが, じつは可測基数はたんなる到達不能基数どころではない大きなものになることがわかります．このあとに続く『弱コンパクト基数』や『玄妙基数と精妙基数』のノートでも, 折に触れてそのことが問題になります．それだけでなく, 可測基数を特徴づける超フィルターあるいは素イデアルの存在という条件をかなり緩和しても, その存在が巨大基数公理と密接に関連していることが知られています．イデアルの性質と巨大基数の性質の関連は, 現在も活発な研究の進められている, 生きた話題なのです.[*3] そうした最先端の話題にここで触れることはできませんが, イデアルの飽和数に関連していくつかの結果を述べてみます.

定義 7.1 X を集合とし $\mathcal{I}$ を X 上のイデアルとする．X の部分集合族 $\mathcal{A}$ が, 条件

$$\forall A \in \mathcal{A} \big(A \notin \mathcal{I} \big) \tag{22}$$

$$\forall A, B \in \mathcal{A} \big(A \neq B \to A \cap B \in \mathcal{I} \big) \tag{23}$$

をみたすとき, これを $\mathcal{I}$ を法とした反鎖, 略して **$\mathcal{I}$-反鎖** ($\mathcal{I}$-antichain) とよぶ. ◀

定義 7.2 λ を基数とする．濃度 λ の $\mathcal{I}$-反鎖が存在しないようなイデアル $\mathcal{I}$ は **λ-飽和** (λ-saturated) である, あるいは **λ-連鎖条件** (λ-chain condition, 略して λ-c.c.) をみたす, といわれる. ◀

定義 7.3 X を集合とし $\mathcal{I}$ を X 上のイデアルとする．$\mathcal{I}$ が λ-飽和であるような最小の基数 λ のことをイデアル $\mathcal{I}$ の **飽和数** (saturation) といい, $\mathrm{sat}(\mathcal{I})$ であらわす. ◀

たとえば, 集合 ω の有限部分集合全体のなすイデアル Fin_ω については, $\mathrm{sat}(\mathrm{Fin}_\omega) = (2^{\aleph_0})^+$ が成立します. Fin_ω を法とする反鎖とは, ω の互いにほとんど交わりのない無限部分集合のなす族 (almost disjoint family) にほかなりません．互いにほとんど交わりのない $2^{\aleph_0}$ 個の部分集合の族が存在するので, $\mathrm{sat}(\mathrm{Fin}_\omega) > 2^{\aleph_0}$ となります．いっぽう, ω には $2^{\aleph_0}$ 個の部分集合しかないので, 自明な形で $\mathrm{sat}(\mathrm{Fin}_\omega) \leq (2^{\aleph_0})^+$ が成立しています.

[*3] 日本語で読める文献としては,『ゲーデルと 20 世紀のロジック』第 4 巻 (東京大学出版会) 第 II 部: 松原洋「集合論の発展—ゲーデルのプログラムの視点から」があります.

実は, Fin_ω に限らず, 一般に ω 上の非単項イデアルで $\mathcal{P}(\omega)$ のボレル部分集合 (あるいは $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合) になっているものすべてについて, その飽和数は $(2^{\aleph_0})^+$ です.[*4] 飽和数の小さいイデアルを簡単に定義してみせることはできないのです.

定理 7.4 (**ウラム** (Stanislav Ulam) **の定理**) 無限基数 κ 上に κ-飽和かつ κ-加法的な非単項イデアルが存在すれば, κ は弱到達不能基数である.

[証明] このような κ が正則基数であることはイデアルの加法数の定義からあきらかなので, κ が後続型基数でないことを証明すればよい. そのため, $\kappa = \lambda^+$ と仮定し, $\mathcal{I}$ を κ 上の κ-加法的な非単項イデアルとして, これが κ-飽和でないことを示す.

各 $\gamma < \kappa$ について一対一関数 $f_\gamma : \gamma \to \lambda$ を選ぶ. そして, $\alpha < \kappa, \xi < \lambda$ に対して, $x_\alpha(\xi)$ を

$$x_\alpha(\xi) = \left\{ \gamma < \kappa \;\middle|\; \gamma > \alpha \ \wedge\ f_\gamma(\alpha) = \xi \right\}$$

と定義する. すると各 $\alpha < \kappa$ につき $\bigcup_{\xi<\lambda} x_\alpha(\xi) = \kappa \setminus (\alpha+1)$ となる. $\mathcal{I}$ は κ-加法的な非単項イデアルなので, $\kappa \setminus (\alpha+1) \notin \mathcal{I}$, したがってなんらかの $\xi_\alpha < \lambda$ について $x_\alpha(\xi_\alpha) \notin \mathcal{I}$ となるだろう. 各 α ごとにそうした ξ_α を選び, $A_\xi = \{\alpha \mid \xi_\alpha = \xi\}$ $(\xi < \lambda)$ としよう. いま $\alpha, \beta \in A_\xi$ かつ $\alpha \neq \beta$ とすると, すべての $\gamma > \max\{\alpha, \beta\}$ に対して $f_\gamma(\alpha) \neq f_\gamma(\beta)$ であるから, $x_\alpha(\xi) \cap x_\beta(\xi) = \emptyset$ である. こうして, $\left\{ x_\alpha(\xi) \;\middle|\; \alpha \in A_\xi \right\}$ は $\mathcal{I}$-反鎖である. いっぽう, $\bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi = \kappa$ なので, ある ξ について $|A_\xi| = \kappa$ となるだろう. したがって, 濃度 κ の $\mathcal{I}$-反鎖が存在し, $\mathcal{I}$ は κ-飽和でない. ◀

じつは κ-飽和というところを κ^+-飽和にまで緩めると, κ は後続基数になることもありえます. ただし, そのような κ が見かけ上到達可能な基数として登場した場合でも, その舞台裏で可測基数が活躍しています. たとえば, $\aleph_1$ 上に $\aleph_2$-飽和で $\aleph_1$-加法的な非単項イデアルが存在する集合論のモデルを与えることもできますが, その際には必然的に, $\mathbf{V}$ の $\aleph_1$ がある部分モデルにおいて可測基数になるのです. こうした状況は, たとえば構成可能的集合の世界 $\mathbf{L}$ をジェネリック拡大したくらいではつくることはできません. κ 上に κ^+-飽和イデアルの存在する世界は, いわば「可測基数を壊して」作らなければならないのです.

イデアルの飽和数に関する事実をあと二つだけ挙げます. ひとつは, 飽和数 $\mathrm{sat}(I)$ は有限でなければ正則基数であるというものです. このことは加法数の場合ほど自明ではありません. もうひとつは, 正則基数の中にはイデアルの飽和数になりえないものもあるというものです. 特に飽和数が $\aleph_0$ であるようなイデアルは存在しません. このことの証明は, 実数の閉区間のコンパクト性をいうハイネとボレルの定理の証明に少し似ています.

集合 X 上にイデアル $\mathcal{I}$ が与えられているとします. $\mathcal{P}(X)$ にかんする $\mathcal{I}$ の補集合 を $\mathcal{I}^+$ と書きます:

$$\mathcal{I}^+ = \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{I}.$$

たとえば NS^+_κ とは κ の定常部分集合の全体 Stat_κ に一致します. $A \in \mathcal{I}^+$ のとき,

$$\mathcal{I} \restriction A = \left\{ x \subset A \;\middle|\; x \in \mathcal{I} \right\} \quad \Big(= \mathcal{I} \cap \mathcal{P}(A) \Big)$$

とおくと, これは A 上の自明でないイデアルになります. $(\mathcal{I}{\restriction}A)$-反鎖は $\mathcal{I}$-反鎖でもありますから, $\mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}A) \leq \mathrm{sat}(\mathcal{I})$ となります.

[*4] I が ω 上の非単項イデアルで $\mathcal{P}(\omega)$ の部分集合として $\mathbf{\Sigma}^1_1$ だったとすると, I は $\mathcal{P}(\omega)$ において疎集合であり, $x \mathrel{R} y \leftrightarrow x \cap y \in I$ なる二項関係 R も, $\mathcal{P}(\omega) \times \mathcal{P}(\omega)$ において疎集合になります. そこで $\mathcal{P}(\omega) \setminus I$ は, どの二要素間にも決して R 関係の成立しないような完全集合を含みます. したがって, I は $2^{\aleph_0}$-飽和ではありません.

補題 7.5 $\mathcal{I}$ を集合 X 上のイデアルとし, $A \subset X$ は $A \notin \mathcal{I}$ かつ $X \setminus A \notin \mathcal{I}$ をみたすものとする. このとき, $\mathrm{sat}(\mathcal{I}) \leq \mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}A) + \mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}(X \setminus A))$ である.

[証明] $\lambda = \mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}A)$, $\mu = \mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}(X \setminus A))$ とおく. 任意の $\mathcal{I}$-反鎖 $\mathcal{A} = \{ B_i \mid i < \kappa \}$ が与えられたとする. このとき, $\mathcal{A}_0 = \{ B_i \cap A \mid i < \kappa,\ B_i \cap A \notin \mathcal{I} \}$ と $\mathcal{A}_1 = \{ B_i \setminus A \mid i < \kappa,\ B_i \setminus A \notin \mathcal{I} \}$ とは, それぞれ $(\mathcal{I}{\restriction}A)$-反鎖, $(\mathcal{I}{\restriction}(X \setminus A))$-反鎖であるから, $|\mathcal{A}_0| < \lambda$, $|\mathcal{A}_1| < \mu$ である. いっぽう, $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$ のメンバーはいずれもただひとつの $\mathcal{A}$ のメンバーに含まれ, また $\mathcal{A}$ のメンバー B_i について $B_i \cap A \in \mathcal{A}_0$ と $B_i \setminus A \in \mathcal{A}_1$ の少なくとも一方は必ず成立するので, $\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1$ から $\mathcal{A}$ への全射が存在する. よって $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{A}_0| + |\mathcal{A}_1| < \lambda + \mu$ となる. $\mathcal{A}$ は任意の $\mathcal{I}$-反鎖であるから, $\mathcal{I}$ は $(\lambda + \mu)$-飽和である. ◀

定理 7.6 いかなるイデアルについても $\mathrm{sat}(\mathcal{I}) \neq \aleph_0$.

[証明] 集合 X 上のイデアル $\mathcal{I}$ が $\mathrm{sat}(\mathcal{I}) \geq \aleph_0$ をみたしたとする. $A \subset X$ を $A \notin \mathcal{I}$, $X \setminus A \notin \mathcal{I}$ となるようにとる. このことは $\mathrm{sat}(\mathcal{I}) > 2$ なので可能である. すると, 補題 7.5 によって $\mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}A) \geq \aleph_0$ または $\mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}(X \setminus A)) \geq \aleph_0$ のいずれかが成立する. 前者が成立していれば $A_0 = A$, 成立していなければ $A_0 = X \setminus A$ とする. つぎに, $B \subset A_0$ を, $B \notin \mathcal{I}$, $A_0 \setminus B \notin \mathcal{I}$ となるようにとる. ふたたび補題 7.5 によって $\mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}B) \geq \aleph_0$ または $\mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}(A_0 \setminus B)) \geq \aleph_0$ のいずれかが成立する. 前者が成立していれば $A_1 = B$, 成立していなければ $A_1 = A_0 \setminus B$ とする. この要領でくり返すと,

$$
\begin{gathered}
X \supset A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots \\
A_n \notin \mathcal{I},\ A_{n-1} \setminus A_n \notin \mathcal{I} \\
\mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}A_n) \geq \aleph_0
\end{gathered}
$$

をみたす集合列 $\langle A_n \mid n < \omega \rangle$ がとれる. このとき,

$$
X \setminus A_0,\ A_0 \setminus A_1,\ A_1 \setminus A_2,\ \ldots,\ A_{n-1} \setminus A_n,\ \ldots
$$

は無限な $\mathcal{I}$-反鎖となる. したがって, $\mathcal{I}$ は $\aleph_0$-飽和でなく, $\mathrm{sat}(\mathcal{I}) > \aleph_0$ となってしまう. ◀

定理 7.7 $\mathrm{sat}(\mathcal{I})$ は正則基数である.

[証明] 集合 X 上のイデアル $\mathcal{I}$ が与えられたとする. X の部分集合 A が条件

$$
A \notin \mathcal{I},\ \ \forall B \subset A \big(B \in \mathcal{I} \vee \mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}B) = \mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}A) \big) \tag{24}
$$

をみたすときに, A のことを安定集合とよぶことにしよう. 安定集合のみからなる $\mathcal{I}$-反鎖のうちで極大なものを考え, それを $\mathcal{A}$ とする. X の $\mathcal{I}$ に属しない部分集合はかならず安定集合を含むので, $\mathcal{A}$ は極大 $\mathcal{I}$-反鎖であり

$$
A \subset X,\ A \notin \mathcal{I} \rightarrow \exists B \in \mathcal{A} \Big(A \cap B \notin \mathcal{I} \Big)
$$

となる. また, $\mathcal{I}$-反鎖であることから当然 $|\mathcal{A}| < \mathrm{sat}(\mathcal{I})$ である.

ここで次の等式を証明しよう:

$$
\mathrm{sat}(\mathcal{I}) = \sup \Big\{ \mathrm{sat}\big(\mathcal{I}{\restriction}A\big) \ \Big|\ A \in \mathcal{A} \Big\}. \tag{25}
$$

そのために, $|\mathcal{A}| < \lambda < \mathrm{sat}(\mathcal{I})$ を満たす正則基数 λ が任意に与えられたとする. (そのような正則基数が存在しないとしたら $\mathrm{sat}(\mathcal{I}) = |\mathcal{A}|^+$ となり $\mathrm{sat}(\mathcal{I})$ の正則性が導かれる.) 濃度 λ の $\mathcal{I}$-反鎖 $\{B_i | i < \lambda\}$ が任意に与えられたとすると, λ の正則性により, 少なくともひとつの $A \in \mathcal{A}$ について $\{ i < \lambda \mid A \cap B_i \notin \mathcal{I} \} = \lambda$ となる. このとき $\lambda < \mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}A)$ である. このことから (25) 式の成り立つことがわかる.

ここまでは準備にすぎない．これから $\kappa = \mathrm{sat}(\mathcal{I})$, $\beta = \mathrm{cf}(\kappa)$ とおき, $\beta < \kappa$ と仮定して矛盾を導くことにする．基数の列

$$\kappa_0 < \kappa_1 < \cdots < \kappa_i < \cdots \quad (i < \beta), \quad \kappa = \sup_{i<\beta} \kappa_i$$

をとろう．その先の議論は二手に分かれる．

第一の場合: $\mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}A) = \kappa$ となるような $A \in \mathcal{A}$ が存在するとき．A の β 個の部分集合からなる $\mathcal{I}$-反鎖 $\{\, B_i \mid i < \beta \,\}$ を考える．A が安定集合であることから, 各 B_i について $\mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}B_i) = \kappa > \kappa_i$ となる．そこで B_i の κ_i 個の部分集合のなす $\mathcal{I}$-反鎖 $\{\, B_{ij} \mid j < \kappa_i \,\}$ がある．すべての $i < \beta$ にわたるそれら全部の和 $\{\, B_{ij} \mid j < \kappa_i,\, i < \beta \,\}$ は濃度 κ をもつ $\mathcal{I}$-反鎖であり, $\mathrm{sat}(\mathcal{I}) > \kappa$ となり矛盾が出る．

第二の場合: どの $A \in \mathcal{A}$ についても $\mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}A) < \kappa$ となるとき．各 $i < \beta$ ごとに $A_i \in \mathcal{A}$ を $\mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}A_i) > \max\bigl(\kappa_i, \sup_{j<i} \mathrm{sat}(\mathcal{I}{\restriction}A_j)\bigr)$ となるようにとる．これができることは, 式 (25) で保証されている．A_i の部分集合 κ_i 個からなる $\mathcal{I}$-反鎖を考え, すべての $i < \beta$ にわたるそれらの和を考えると, 濃度 κ をもつ $\mathcal{I}$-反鎖が得られ矛盾が出る．◀