1. ポーランド空間

可分で完備な距離のつく位相空間のことを**ポーランド空間** (Polish space) という. たとえば, 数直線 $\mathbb{R}$ や “ベールの空間” ω^ω や カントール空間 2^ω など.

1.1. (X, d) を完備な距離空間とするとき, 部分集合 $A \subset X$ に (位相を変えずに) 完備な距離がつくためには, A が G_δ 集合であることが必要かつ十分である.

1.2.(ウリゾーンの距離づけ定理) 位相空間 X に関して次のことは同値である:

(a) X は第 2 可算 (開集合の可算な基底をもつ) 正規空間である.

(b) X は可分で距離づけできる空間である.

(c) X は $\mathbb{R}^\omega$ の部分集合と同相である.

1.3. 位相空間 X に関して次のことは同値である:

(a) X はポーランド空間である.

(b) X は $\mathbb{R}^\omega$ の閉部分集合と同相である.

(c) X は $[0,1]^\omega$ の G_δ 部分集合と同相である.

1.4. X をポーランド空間とすれば, 次の条件をみたす写像 $f : \omega^\omega \to X$ と $g : X \to \omega^\omega$ が構成できる:

(1) f は連続な開写像 (開集合の像が開集合) である.

(2) g はボレル可測写像で, とくに開集合の逆像は F_σ 集合である.

(3) $f \circ g = id_X$ である. したがって, f は全射, g は単射である.

(4) さらにもしも X が 0 次元空間 (clopen 集合のみからなる基底が存在) であれば, g も連続にできる.

1.5.(Sierpinski–Hausdorff–Michael の定理) 完備な距離のつく空間 X から, 距離空間 Y の上への連続な開写像があれば, Y も完備に距離づけ可能である. とくに, X がポーランド空間, $f : X \to Y$ が連続な開写像であれば, その像 $f(X)$ はポーランド空間である. したがって, 距離空間 X がポーランド空間であるためには ω^ω から X の上への連続な開写像が存在することが必要かつ十分である.

2. ベールの性質

2.1. (Baire のカテゴリー定理) 完備な距離のつく空間においては, 可算個の稠密な開集合の共通部分は稠密である.

2.2. 位相空間 X の部分集合 A が**いたるところ非稠密**(nowhere dense) であるとは, X の任意の空でない開集合 U に対し, 空でない開集合 V で $V \subset U \setminus A$ となるものが存在することをいう. いいかえれば, A の閉包の内部が空であることをいう. 可算個のいたるところ非稠密な集合の和集合は**疎集合**(meager set) と呼ばれる.

2.3. 空でない開集合が決して疎集合とならないような位相空間は**ベール空間** (Baire space) と呼ばれる. これは, Baire のカテゴリー定理が成立するような空間のことだとも言える.

2.4. ベール空間の開部分空間はベール空間である. ベール空間の稠密な G_δ 部分空間はまたベール空間である (稠密性は必要).

2.5. 位相空間 X の部分集合 A と B に対して, $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ とする. この集合が疎集合である, ということを $A =^* B$ と書けば, これは同値関係となる.

2.6. $A =^* G$ となるような開集合 G が存在するような A は**ベールの性質** (the Baire property) をもつという. ベールの性質をもつ集合の全体はすべての開集合を含む σ-代数をなす. したがってとくにすべてのボレル集合はベールの性質をもつ.

2.7. ポーランド空間の部分集合 A に対して, "x のどんな近傍 W についても $W \cap A$ は疎集合でない" という性質をもつ点の全体を $E(A)$ と書き, "x のある近傍 W について $W \setminus A$ は疎集合である" という性質をもつ点を $U(A)$ と書こう.

$E(A)$ は閉集合, $U(A)$ は開集合で, $U(A) \subset E(A)$ である.

$A \setminus E(A)$ と $U(A) \setminus A$ はいずれも疎集合であり, さらに A がベールの性質をもつときには, $E(A) \setminus A$ と $A \setminus U(A)$ も疎集合である.

一般に $E(A) = E(B) \iff U(A) = U(B) \iff A =^* B$ であり, A がベールの性質をもつときには $A =^* E(A) =^* U(B)$ である.

A が開集合なら $E(A) = \overline{A}$ (閉包), A が閉集合なら $U(A) = \mathrm{int}(A)$ (内部) である.

2.8. 可分で距離づけ可能な位相空間 X と Y の間の写像 $f : X \to Y$ が **BP 可測** であるとは, Y の開集合の f による逆像が X においてベールの性質をもつときにいう.

2.9. (BP 可測写像は “ほとんど” 連続写像である) X と Y が可分で距離づけ可能な位相空間で $f : X \to Y$ が BP 可測であるとき, 次のような集合 $D \subset X$ が存在する: $X \setminus D$ は疎集合であり, f の D への制限 $f \restriction D$ は D から Y への写像としては連続である.

これを証明するために, $\{V_n : n \in \omega\}$ を Y の開集合の可算な基底として, $f^{-1}(V_n)$ が X においてベールの性質をもつことから, G_n を X の開集合で $f^{-1}(V_n) \triangle G_n$ が疎集合 (これを M_n と書く) になるようなものとしよう. このとき $D = X \setminus \bigcup_{n\in\omega} M_n$ とすれば, $X \setminus D$ つまり $\bigcup_{n\in\omega} M_n$ は疎集合であり, $x \in D$ のときには $f(x) \in V_n \iff x \in G_n \cap D$ となるので f は D 上の写像としては連続となる.

逆にそのような集合 D があるような写像は BP 可測である.

2.10. 補集合が疎集合になるような集合のことを **comeager な集合** (補疎集合) という. ベール空間とは任意の comeager な集合が稠密集合となるような空間のことである.

2.11. (変数ごとの連続性と多変数の連続性) X と Y を距離づけ可能な空間とする. 関数 $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ について, 片方の変数を固定した一変数関数

$$f_x : y \mapsto f(x, y)$$
$$f^y : x \mapsto f(x, y)$$

を考える. もしも, f^y がすべての $y \in Y$ について連続, f_x がすべての $x \in X$ について連続であれば, 次のような集合 $D \subset X \times Y$ がとれる. D は $X \times Y$ において comeager で, さらに 各 $y \in Y$ について $D^y = \{x : \langle x, y\rangle \in D\}$ が X において comeager であり, しかも f が任意の $\langle x, y\rangle \in D$ において連続となる.

以下, これを証明する. X と Y の上のなんらかの距離関数が定められているものと仮定する. 正の数 δ と ε に対して, “y の δ-近傍における f_x の “振幅” が高々ε であるような $\langle x, y\rangle$ の集合を $E_{\delta,\varepsilon}$ とすると, これは閉集合である.

$E_{\delta,\varepsilon}$ が閉集合であることの証明: 点列 $\langle x_i, y_i\rangle \in E_{\delta,\varepsilon}$ が $\langle x, y\rangle$ に収束していたとしよう. $\langle x, y\rangle$ が $E_{\delta,\varepsilon}$ に入ることがいいたい. そのため u と v を y の δ-近傍に入る点とすると, 十分大きなすべての i について y_i の δ-近傍は u と v を含み, $|f(x_i, u) - f(x_i, v)| \le \varepsilon$ となる. この状態で $i \to \infty$ とすると, f^u, f^v の連続性から $|f(x, u) - f(x, v)| \le \varepsilon$. よって $\langle x, y\rangle \in E_{\delta,\varepsilon}$.

つぎに, $x \in {E_{\delta,\varepsilon}}^y \setminus \mathrm{int}({E_{\delta,\varepsilon}}^y)$ をみたす点 $\langle x, y\rangle$ の全体を $M_{\delta,\varepsilon}$ とすると, $M_{\delta,\varepsilon} \subset E_{\delta,\varepsilon} \setminus \mathrm{int}(E_{\delta,\varepsilon})$ となるので $M_{\delta,\varepsilon}$ はいたるところ非稠密である.

$D = X \times Y \setminus \bigcup_{m,n\in\omega} M_{\frac{1}{m},\frac{1}{n}}$ としよう. D は comeager in $X \times Y$ で, 各 $y \in Y$ について $x \notin D^y \iff x \in \bigcup_{m,n\in\omega} {E_{\delta,\varepsilon}}^y \setminus \mathrm{int}({E_{\delta,\varepsilon}}^y)$ より D^y は comeager in X である.

あとは $\langle x_i, y_i\rangle \to \langle x, y\rangle \in D$ $(i \to \infty)$ のとき $f(x_i, y_i) \to f(x, y)$ といいたい.

そうでないとすると, ある $n \in \omega$ について $\exists^\infty i\,(|f(x_i, y_i) - f(x, y)| \geq 1/n)$ となる. いっぽう $x_i \to x$ より, $f(x_i, y) \to f(x, y)$ なので $\forall^\infty i\,(|f(x_i, y) - f(x, y)| < 1/2n)$ である. この二つから $\exists^\infty i\,(|f(x_i, y_i) - f(x_i, y)| > 1/2n)$ となるはずである.

これに対して, m を任意の自然数とすると, 十分大きな i について y と y_i は $1/m$ より近いのだから, 先の段落の結果から $\exists^\infty i\,(x_i \notin E_{\frac{1}{m},\frac{1}{2n}})$ である. これは, $x \notin \mathrm{int}(E_{\frac{1}{m},\frac{1}{2n}}{}^y)$ を導くが, $\langle x, y\rangle \in D$ なので $x \notin E_{\frac{1}{m},\frac{1}{2n}}{}^y$ すなわち $\langle x, y\rangle \notin E_{\frac{1}{m},\frac{1}{2n}}$ である.

つまり, $\exists n \in \omega\, \forall m \in \omega\,(\langle x, y\rangle \notin E_{\frac{1}{m},\frac{1}{2n}})$ となる. よって y のどんな近傍においても f_x の振幅は $1/2n$ 以上あることになる. しかしこれは f_x の連続性に矛盾する. この矛盾は $f(x_i, y_i)$ が $f(x, y)$ に収束しないという仮定による. (証明終).

ここでは f を実数値関数としたが, 実際には任意の距離空間に値をとる写像でよいことは証明をみればあきらかだろう.

3. ボレル集合族

位相空間 X の開集合全体によって生成される σ-代数を X の**ボレル集合族**という. ボレル集合族のメンバーのことを**ボレル集合**とよぶ.

3.1. X を位相空間, Y をその部分空間とし, $\mathcal{B}_X$ と $\mathcal{B}_Y$ をそれぞれのボレル集合族とするとき

$$\mathcal{B}_Y = \{\, B \cap Y \,:\, B \in \mathcal{B}_X \,\}$$

となる.

3.2. 位相空間 X から Y への写像 $f : X \to Y$ が $\forall B \in \mathcal{B}_Y\ (f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_X)$ をみたすとき, f は**ボレル可測**であるという. さらに f が全単射で逆写像 f^{-1} もボレル可測であるならば, f をボレル同型写像とよぶ.

3.3. すべての不可算なポーランド空間は互いにボレル同型である.

3.4. X が距離空間であれば, ボレル集合族 $\mathcal{B}_X$ は, すべての G_δ 集合を含み, 可算個の集合の共通部分と, 可算個の互いに交わらない集合の和をとる演算のもとで閉じた最小の集合族になっている. このことから導かれる次の事実はたいへん重要である: B をポーランド空間 X のボレル集合とするとき, ポーランド空間 Y と連続な $\underline{1 \text{ 対 } 1}$ 写像 $f : Y \to X$ で $B = f(Y)$ をみたすものが存在する.

3.5. この結果を次のように言いかえることもできる: X をポーランド空間とし, その位相を t と書く. B を X のボレル集合とする. このとき X 上に t より細かい位相 t' を定義して, (X, t') もポーランド空間であり, しかも B が t'-位相のもとで clopen 集合になるようにできる.

3.6. また, 3.4 の逆にあたる次の事実も重要である: X と Y をポーランド空間, B を X のボレル集合とする. $f : X \to Y$ がボレル可測写像で, $f \restriction B$ が 1 対 1 写像となるようなものとするとき, $f(B)$ は Y のボレル集合である.

3.6 の結果の証明には, “解析集合のボレル分離定理” が用いられる.

3.7.(ボレル集合族の不変性) 集合 X 上に二つの位相 t_1 と t_2 があって, ともにポーランド空間の位相であり, しかも t_1 と t_2 が比較可能であったとする. このとき, t_1 と t_2 が生成するボレル集合族は一致する. このことは, $t_1 \supset t_2$ だったとして, $id_X : (X, t_1) \to (X, t_2)$ に 3.6 を用いれば示される.

t_1 と t_2 が比較可能というここでの条件はもっと弱めることができる. たとえば, X の任意の 2 点が, t_1-開かつ t_2-開であるような集合によって分離できればよい. これは次に述べる結果 ($\to$ 3.8) の特別な場合として, t_1 と t_2 の両方と比較可能な X 上のポーランド位相が構成できるからである.

3.7. 集合 X 上に可算個のポーランド位相 t_n が与えられているとする. 直積空間 $P = \prod_n (X, t_n)$ はポーランド空間である. P の部分集合 Δ を

$$\Delta = \{\, (x, x, x, \ldots) : x \in X \,\}$$

によって定義する. もしも, Δ が P の閉部分集合 <u>であれば</u>, 対応 $x \mapsto (x, x, x, \ldots)$ によって Δ から X に誘導される位相はポーランド位相で, すべての t_n の開集合族の和 $\bigcup_n t_n$ によって生成される位相と一致する. したがってこのときすべての t_n より細かいポーランド位相が X 上に存在する.

Δ が P の閉部分集合となるためには, すべての t_n の共通部分 $\bigcap_n t_n$ (これも X 上の位相である) がハウスドルフ位相であればよい. すなわち, X の任意の 2 点が, すべての t_n に共通の開集合のペアで分離できればよい.

3.8. したがって, たとえば集合 X 上に $t_0 \subset t_1 \subset t_2 \subset \cdots$ と拡大していくポーランド位相の列があった場合には, その和 $\bigcup_{n \in \omega} t_n$ によって生成される X 上の位相 t_∞ はポーランド位相であり, しかもボレル集合族は t_0 から t_∞ までのどの位相で考えても同じである.

3.9. この結果 (3.8) を 3.5 と組み合わせると次のことがわかる:

(X, t) がポーランド空間で, B_n $(n \in \omega)$ がそのボレル集合だとするとき, t より細かいポーランド位相 t' が存在して, すべての B_n が t'-clopen であるようにできる. しかもそのときボレル集合族は t と t' のどちらで考えても同じである.

4. 可測空間

4.1. 集合 X とその上の σ-代数 $\mathcal{A}$ の対 $(X, \mathcal{A})$ をひとつの**可測空間** (measurable space) とよぶ.

4.2. $(X, \mathcal{A})$ と $(Y, \mathcal{B})$ が可測空間で, 写像 $f : X \to Y$ が $\forall B \in \mathcal{B}\,(f^{-1}(B) \in \mathcal{A})$ をみたすなら, この f ふたつの可測空間の間の可測写像とよぶ. 逆写像も可測であるような全単射を可測同型写像とよぶ.

4.3. ポーランド空間とその上のボレル集合族のなす可測空間, およびそれと可測同型な可測空間を, **標準ボレル空間** (standard Borel space) と呼ぶ.

4.4. X を可分な距離空間とするとき, $(X, \mathcal{B}_X)$ が標準ボレル空間であるためには, X があるポーランド空間のボレル部分集合になっていることが必要かつ十分である.

4.5. 可測空間 $(X, \mathcal{A})$ が**可算分離的** (countably separated) であるとは, 可算個の $A_n \in \mathcal{A}$ によって X の各点が分離される, すなわち,

$$x = y \iff (\forall n \in \omega)[\, x \in A_n \iff y \in A_n \,]$$

が成立することである. このような $\{A_n : n \in \omega\}$ のことを**可算分離族** (countable separating family) という. $(X, \mathcal{A})$ が可算分離的であるための必要十分条件は, $(2^\omega, \mathcal{B}_{2^\omega})$ への可測な単射 $f : X \to 2^\omega$ が存在することである. (各 $x \in X$ に $\{n \in \omega : x \in A_n\}$ を対応させればよい.)

4.6. 可測空間 $(X, \mathcal{A})$ において, ある可算部分族 $\{A_n : n \in \omega\}$ によって $\mathcal{A}$ が σ-代数として生成されるならば, この可測空間は**可算生成的** (countably generated) だといわれる. $(X, \mathcal{A})$ が可算生成的であるための必要十分条件は, ある写像 $f : X \to 2^\omega$ について $\mathcal{A} = \{\, f^{-1}(B) : B \subset 2^\omega \text{ はボレル集合} \,\}$ となることである.

4.7. したがって, 可算分離的かつ可算生成的な可測空間は, ある可分距離空間上のボレル集合のなす可測空間と同型である. 逆に, 可分距離空間上のボレル集合のなす可測空間は可算分離的かつ可算生成的である.

4.8. 可算分離的で可算生成的な可測空間においては, 可算な生成系はかならず可算分離族になる. 標準ボレル空間においては, 逆に, 任意の可算分離族がボレル集合全体を生成する. したがって, 標準ボレル空間から可算分離的可測空間への可測な単射は, 必然的に可測空間としての同型な埋め込みになる.

4.9. 可算分離的であって, しかも任意の可算分離族が σ-代数として可測集合の全体を生成するような可測空間は**ブラックウェル空間** (Blackwell space) と

呼ばれる. 標準ボレル空間および $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合上のボレル集合のなす可測空間 (解析的可測空間) はブラックウェル空間である. それ以外のブラックウェル空間は, 選択公理を用いないでは構成できない.

5. カテゴリー量化子

X を距離空間, Y をポーランド空間としよう. $B \subset X \times Y$ と, 空でない開集合 $U \subset Y$ に対して

$$\begin{aligned}\forall^{*U} B &= \{\, x \in X : U \setminus B_x \text{ は疎集合} \,\}\\ \exists^{*U} B &= \{\, x \in X : U \cap B_x \text{ は疎集合でない} \,\}\end{aligned}$$

と定義する, ただし $B_x = \{\, y \in Y : \langle x, y \rangle \in B\}$ は B の $x \in X$ における切り口である.

ここで証明したいのは次のことである:

定理. B がボレル集合なら, すべての空でない開集合 $U \subset Y$ について, $\forall^{*U} B$ も $\exists^{*U} B$ もボレル集合となる.

これを証明するために, この性質をもつ $X \times Y$ のボレル部分集合の全体を $\mathcal{A}$ と書こう. つまり, $B \in \mathcal{A}$ となるのは, B が $X \times Y$ のボレル部分集合で, しかもすべての空でない開集合 $U \subset Y$ について, $\forall^{*U} B$ も $\exists^{*U} B$ も X のボレル集合となる場合である.

5.1. P を X の開集合, Q を Y の開集合とすると,

$$\forall^{*U}(P \times Q) = \begin{cases} P, & \text{if } U \subset \overline{Q} \\ \emptyset, & \text{otherwise} \end{cases}, \quad \exists^{*U}(P \times Q) = \begin{cases} P, & \text{if } U \cap Q \neq \emptyset \\ \emptyset, & \text{otherwise} \end{cases}$$

となるので, $P \times Q \in \mathcal{A}$ である.

5.2. $B \in \mathcal{A}$ のとき,

$$\begin{aligned}\forall^{*U}(B \text{ の補集合}) &= \exists^{*U} B \text{ の補集合}\\ \exists^{*U}(B \text{ の補集合}) &= \forall^{*U} B \text{ の補集合}\end{aligned}$$

となるから, B の補集合も $\mathcal{A}$ に属する.

5.3. $B_0, B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$ のとき,

$$\begin{aligned}\forall^{*U} \bigcap_{n\in\omega} B_n &= \bigcap_{n\in\omega} \forall^{*U} B_n,\\ \forall^{*U} \bigcup_{n\in\omega} B_n &= \bigcap_{\substack{V\subset U\\ \text{basic open}}} \bigcup_{n\in\omega} \exists^{*V} B_n,\\ \exists^{*U} \bigcap_{n\in\omega} B_n &= \bigcup_{\substack{V\subset U\\ \text{basic open}}} \bigcap_{n\in\omega} \forall^{*V} B_n,\\ \exists^{*U} \bigcup_{n\in\omega} B_n &= \bigcup_{n\in\omega} \exists^{*U} B_n\end{aligned}$$

となるので, $\bigcap_{n\in\omega} B_n$ も $\bigcup_{n\in\omega} B_b$ も $\mathcal{A}$ に属する. ここで 2 番目と 3 番目の等式は自明ではないが, これは, もしも $U \setminus (\bigcup_n B_n)_x$ が疎でなければ, ベールの性質により, U のある開部分集合 $V \neq \emptyset$ について, $V \cap (\bigcup_n B_n)_x$ のほうが疎になるはずだ, ということによる.

5.4. 5.1〜5.3 によって, $\mathcal{A}$ は $P \times Q$ の形の開集合すべてを含む σ-代数であることがわかった. したがって $X \times Y$ のボレル部分集合はすべて $\mathcal{A}$ に属し, 定理が成立することがわかる.

5.5. 定理において, X はひとまず距離空間としたが, 一般の可測空間でも成立する. ただし, Y のほうは, 可算な基底をもつベール的な空間でなければならない.

5.6. 5.1〜5.3 を注意深く見ると, X と Y がポーランド空間であるとき, B が $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ なら $\exists^{*U} B$ も $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ であり, B が $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ なら $\forall^{*U} B$ も $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ である.

6. 閉集合の空間

位相空間 X の閉集合の全体を $\mathcal{F}(X)$ と書き, 空でない閉集合の全体を $\mathcal{F}^*(X)$ と書く. これらに位相空間や可測空間の構造を入れて使いたい.

6.1. X が距離づけ可能だとして, d は X の位相を与える距離関数としよう. このとき, 空でない閉集合 $A \in \mathcal{F}^*(X)$ は関数

$$x \mapsto d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

と同一視できる. この関数は連続であるから, この同一視は $\mathcal{F}^*(X)$ を連続関数の空間 $C(X, \mathbb{R})$ に埋め込んだことになる. そこで, 連続関数の空間の位相を $\mathcal{F}^*(X)$ に誘導することができる.

6.2. 関数の一様収束の位相を $\mathcal{F}^*(X)$ に誘導して得られるのが, ハウスドルフ距離位相であり, これは

$$H(A, B) = \sup_{x \in X} |d(x, A) - d(x, B)|$$

で定義される $\mathcal{F}^*(X)$ 上の距離 H による位相と一致する. d が完備な距離であれば H も完備となるが, d が全有界でない限りハウスドルフ距離位相は可分にはならない.

6.2. 関数の各点収束の位相から誘導される $\mathcal{F}^*(X)$ 上の位相を **Wijsman 位相** という. X が可分な距離空間であるとき, Wijsman 位相も可分で距離づけ可能である.

6.3. (Beer–Constantini の定理) X がポーランド空間のとき, X の位相を与える任意の距離に対応する Wijsman 位相のもとで, $\mathcal{F}^*(X)$ もまたポーランド空間となる.

ハウスドルフ距離位相と Wijsman 位相は距離関数に依存する. X の位相だけによって決まる $\mathcal{F}^*(X)$ 上の位相もある. 2 つだけ紹介する.

6.4. Vietoris 位相は, X の開集合 U に対する.

$$\{\, A \in \mathcal{F}^*(X) : A \cap U \neq \emptyset \,\} \text{ と } \{\, A \in \mathcal{F}^*(X) : A \subset U \,\}$$

の形の集合で生成される位相である. この位相は位相空間論では活躍するが, われわれの目的からすると, あまり使いやすくない.

6.5. Fell 位相は, X の開集合 U に対する.

$$\{\, A \in \mathcal{F}^*(X) : A \cap U \neq \emptyset \,\}$$

の形の集合と, X のコンパクト部分集合 K に対する

$$\{ A \in \mathcal{F}^*(X) : A \cap K = \emptyset \}$$

の形の集合で生成される位相である. X が局所コンパクトなポーランド空間のときは, $\mathcal{F}^*(X)$ は Fell 位相のもとでポーランド空間となる. しかし, X が局所コンパクトでない場合, Fell 位相は T_2(ハウスドルフ) 分離公理をみたさない.

6.6. 以上 4 通りの位相のいずれにおいても, X の開集合 U に対する

$$(U)^+ = \{ A \in \mathcal{F}^*(X) : A \cap U \neq \emptyset \}$$

の形の集合は $\mathcal{F}^*(X)$ の開集合になる. また, Wijsman 位相と Fell 位相においては, この形の開集合が $\mathcal{F}^*(X)$ のボレル集合の全体を生成する.

X の開集合 U に対する $(U)^+$ の形の集合全体の生成する $\mathcal{F} * (X)$ 上の σ-代数を **Effros のボレル構造**と呼ぶ. Wijsman 位相と Fell 位相のボレル集合族は Effros のボレル構造と一致する. Vietoris 位相やハウスドルフ距離位相のボレル構造は, X が局所コンパクトでない限り, Effros ボレル構造とは一致しない.

6.7. X がポーランド空間のとき, (Beer–Constantini の定理により) Effros のボレル構造のもとで $\mathcal{F}^*(X)$ は標準ボレル空間となる. $\mathcal{F}(X)$ はこの標準ボレル空間に新たに一点として空集合を付け加えたものだから, やはり標準ボレル空間である.

6.8. われわれの目的のためには, Wijsman 位相を空集合を含む $\mathcal{F}(X)$ にまで拡張しておく必要がある. そのための通常の方法は, “空集合は X のどの点からも無限に遠い” と考えて, 距離関数の空間に空集合を添加する方法である. もうちょっときちんと言うと, 空でない閉集合の列 $A_n \in \mathcal{F}^*(X)$ が各点 $x \in X$ について $d(x, A_n) \to \infty$ をみたすときに, $A_n \to \emptyset$ となるものとみなすのである.

したがって, 空集合はこの位相のもとで $\mathcal{F}(X)$ の集積点となることもあるし孤立点となることもある. たとえば $\mathbb{R}$ の通常の距離で $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ に Wijsman 位相を入れたら空集合は集積点だし, 開区間 $(0,1)$ を $\mathbb{R}$ と同一視した距離関数を使えば空集合は $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ の孤立点となる.

いずれにせよ, このようにして空集合を添加して拡大された Wijsman 位相のもとで, $\mathcal{F}(X)$ が距離づけ可能であるためには X が可分距離空間であることが必要十分であり, また $\mathcal{F}(X)$ がポーランド空間であるためには X がポーランド空間であることが必要十分である. (そのさい, 距離関数が完備である必要はない.)

6.9. Wijsman 位相が, 閉集合 A を距離関数 $f_A : x \mapsto d(x, A)$ と同一視することによって得られるものだったことを思い出そう. この意味で, $\mathcal{F}^*(X)$ は X 上の連続関数の空間 $C(X, \mathbb{R})$ に埋め込まれている. $C(X, \mathbb{R})$ における各点収束位相にかんして $\mathcal{F}(X)$ の閉包をとってそれを $\overline{\mathcal{F}^*(X)}$ としよう. このとき, $\overline{\mathcal{F}^*(X)}$ は局所コンパクトであり, とくに X が可分であれば $\overline{\mathcal{F}^*(X)}$ は局所コンパクトなポーランド空間である.

Beer と Constantini はこの局所コンパクト・ポーランド空間 $\overline{\mathcal{F}^*(X)}$ の中で $\mathcal{F}^*(X)$ がどんな部分集合となっているのかを考えることによって彼らの結果 (6.3.) を得た. 実は, X がポーランド空間の場合 $\overline{\mathcal{F}^*(X)}$ の中で $\mathcal{F}^*(X)$ は G_δ である.

(X, d) が可分な距離空間で d が有界な距離である場合には, $\overline{\mathcal{F}^*(X)}$ はコンパクトで距離づけ可能な空間となる. 次にこの事実を証明する.

$D = \{x_m : m \in \omega\}$ を X の可算稠密部分集合とするとき, f_A の同程度一様連続性によって, X の各点での収束とすべての x_m における収束とが同値になる. そこで $\mathcal{F}^*(X)$ を D で添字づけられた直積空間 $\mathbb{R}^D$ の要素に埋め込むことができる (したがって $\mathcal{F}^*(X)$ は可分で距離づけ可能である).

また, $C(X, \mathbb{R})$ の部分集合としての $\overline{\mathcal{F}^*(X)}$ も同程度一様連続な関数の族となり, ゆえに $f \mapsto f \restriction D$ という対応は $\overline{\mathcal{F}^*(X)}$ の $\mathbb{R}^D$ への位相的な埋め込みになる. したがって, 一般に $\overline{\mathcal{F}^*(X)}$ も可分で距離づけ可能な空間となる.

ここで d が有界である ($0 \leq d < 1$ と仮定しても一般性を失わない) という条件をもちいると, $\overline{\mathcal{F}^*(X)}$ は X で添字付けられた直積空間 $[0, 1]^X$ に閉集合として埋め込まれているからコンパクトであり, 上記のとおり $[0, 1]^D$ へも埋め込まれるので, 距離づけ可能でもある.

6.10. 有界でない距離関数 d を $d/(1 + d)$ に置き換えて有界にすることによって, X の位相や一様構造 (コーシー列のクラス) は変化しないし, $\mathcal{F}^*(X)$ の Wijsman 位相も変化しない. しかし空集合の添加され方には (6.8 で述べた $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ の例のように) 違いが生じる可能性がある. ただし, $d/(1 + d)$ が決して 1 以上の値をとらないことを利用して, 空集合を 1 を値とする定数関数と同一視すれば, もとの距離 d について 6.9 で述べたのと同じ位相で空集合が添加されることになる. しかもこのとき $\mathcal{F}^*(X)$ の位相を変えることなく閉包 $\overline{\mathcal{F}^*(X)}$ をコンパクトにできる. この場合も空集合は集積点でも孤立点でもありうる (集積点であれば $\emptyset \in \overline{\mathcal{F}^*(X)}$.) だがいずれにせよ, $\overline{\mathcal{F}^*(X)}$ に空集合に相当する関数を添加した空間もコンパクトで距離づけ可能な空間となる.

以上の考察は少々くどいようであるが, Beer の結果を拡張する Constantini の結果を利用することで, Becker-Kechris の理論のうちいくつかの議論が単純化されるので, 考えておく価値のあることではある.

6.11. (Kuratowski–Ryll-Nardzewski の選択定理) X をポーランド空間

とし $\mathcal{F}^*(X)$ を Effros のボレル構造のもとで標準ボレル空間と考えたとき, ボレル可測な選択写像 $\sigma_X : \mathcal{F}^*(X) \to X$ が存在する $(\forall A \in \mathcal{F}^*(X)\,(\sigma_X(A) \in A).)$

その証明の概略を述べる．まず $X = \omega^\omega$ の場合, $A \in \mathcal{F}^*(\omega^\omega)$ に対して, $\sigma_{\omega^\omega}(A)$ の値を再帰によって

$$\begin{aligned}&\alpha = \sigma_{\omega^\omega}(A) \iff \\ &\forall n \in \omega\,(\alpha(n) = \min\{\, i \in \omega \,:\, A \cap [\alpha{\restriction}n^\frown(i)] \neq \emptyset\,\})\end{aligned}$$

とすればよい．一般の X については, 上への連続な開写像 $f : \omega^\omega \to X$ によって,

$$\sigma_X(A) = f(\sigma_{\omega^\omega}(f^{-1}(A)))$$

と定義する．これがうまくいくのは, f が X の上への連続な開写像であれば対応 $A \mapsto f^{-1}(A)$ が $\mathcal{F}^*(X)$ から $\mathcal{F}^*(\omega^\omega)$ へのボレル可測写像になることによる．

7. 位相群

位相群とは, 群としての代数的演算が位相空間としての連続写像となるような, 位相のついた群のことである.

7.1 位相群 G の位相構造は単位元 1_G の周囲の位相的な構造によって決定される. $\mathcal{U}_0$ を単位元の近傍全体の集まりとすると, 次のことが成立している:

(a) $\mathcal{U}_0$ はフィルターで, $1_G \in \bigcap \mathcal{U}_0$.

(b) $U \in \mathcal{U}_0$ と $U^{-1} \in \mathcal{U}_0$ が同値である.

(c) 任意の $U \in \mathcal{U}_0$ についてある $V \in \mathcal{U}_0$ が $VV \subset U$ をみたす.

(d) 任意の $U \in \mathcal{U}_0$ と任意の $g \in G$ について $gUg^{-1} \in \mathcal{U}_0$ である.

これらは逆演算 $g \mapsto g^{-1}$, 積演算 $\langle g, h \rangle \mapsto gh$, 共役 $\langle g, h \rangle \mapsto ghg^{-1}$ の単位元 1_G における連続性から導かれる. いっぽう, 位相群の一般論の大部分はここに掲げた (a)〜(d) から導かれる.

7.2. 位相群 G が T_1 分離公理をみたすためには $\bigcap \mathcal{U}_0 = \{1_G\}$ となることが必要十分であり, このとき G は完全正則空間 (Tychonov 空間あるいは $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$ 空間) となる. この事実の証明は次の 7.3 での距離関数の構成と同様にして, 閉集合とその外の点を分離する "距離関数に似た実数値関数" を構成することによる.

7.3. (位相群の距離づけ) T_1 分離公理をみたす位相群 G が, 距離づけ可能であるためには, 単位元 1_G の近傍フィルター $\mathcal{U}_0$ が可算なフィルター基から生成されること (あるいは G の位相が第一可算公理をみたすこと) が必要十分である.

条件が必要であることはあきらか. 十分性を示すために, $\mathcal{U}_0$ が可算なフィルター基 $\{U_n : n \in \omega\}$ をもったとする. このとき, $\mathcal{U}_0$ に属する集合の列 $\{V_n : n \in \omega\}$ を次の 4 条件をみたすようにとれる.

(1) $V_0 = G$.

(2) $V_{n+1}V_{n+1}V_{n+1} \subset V_n$.

(3) $V_{n+1} = {V_{n+1}}^{-1}$.

(4) $V_n \subset U_n$.

最後の条件から $\{V_n : n \in \omega\}$ も $\mathcal{U}_0$ のフィルター基となる. G が T_1 分離公理をみたすことから, $x \neq 1_G$ なら $\forall^\infty n\,(x \notin V_n)$ である. そこで $x \in V_n \setminus V_{n+1}$ をみたすただ一つの $n \in \omega$ を $n(x)$ と書くことにして

$$\varphi(x) = \inf \left\{ \sum_{0 \le i \le r} 2^{-n(x_i)} \,:\, x = x_0 \cdots x_r \right\}$$

としよう．下限は, $x = x_0 \cdots x_r$ をみたす有限な列 $(x_0, \ldots, x_r) \in (G\backslash\{1_G\})^{<\omega}$ の全体にわたってとる．また $\varphi(1_G) = 0$ と定める．

この $\varphi(x)$ が次の性質をもつことは容易にわかる:

(i) $\varphi(x) \geq 0$, $\varphi(1_G) = 0$.

(ii) $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)$.

(iii) $\varphi(xy) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$.

さらに次の性質をもつことを証明しよう:

(iv) $x \neq 1_G \implies \varphi(x) > 0$.

(v) $V_{n+1} \subset \{x \in G : \varphi(x) \leq 2^{-n}\} \subset V_n$.

(iv) は (v) からすぐに導かれる．(v) は次の不等式から導かれる:

$$\varphi(x) \leq 2^{-n(x)} \leq 2\varphi(x). \tag{$*$}$$

このうち左側の不等式は明らかである． 右側の不等式を示すために, $x = x_0 \cdots x_r$ となる長さ $r+1$ の列 $(x_0, \ldots, x_r)$ について必ず

$$2\sum_{i=0}^{r} 2^{-n(x_i)} \geq 2^{-n(x)} \tag{$**$}$$

となることを, r に関する帰納法で証明する．

まず $r = 0$ のときには言うべきことはない．$r < s$ のとき $(**)$ が正しかったと仮定して, 長さ $s+1$ の列 $(x_0, \ldots, x_s)$ で $x = x_0 \cdots x_s$ となるものを考える．$\alpha = \sum_{i=0}^{s} 2^{-n(x_i)}$ とおこう．ここで $\sum_{i=0}^{k} 2^{-n(x_i)}$ を $k = 0, \ldots, s$ について考えると, 狭義単調に増加して $k = s$ のとき値がちょうど α となるのだから, $\sum_{i=0}^{k-1} 2^{-n(x_i)} \leq \alpha/2$ かつ $\sum_{i=0}^{k} 2^{-n(x_i)} > \alpha/2$ となる k があるはずだ．そこで, 列 $(x_0, \ldots, x_s)$ を, $(x_0, \ldots, x_{k-1})$, x_k, $(x_{k+1}, \ldots, x_s)$ と 3 つの部分に分ける (いずれかは空な列になるかもしれない)．すると,

$$\sum_{i=0}^{k-1} 2^{-n(x_i)} \leq \frac{\alpha}{2}, \text{ かつ } \sum_{i=k+1}^{s} 2^{-n(x_i)} < \frac{\alpha}{2}$$

である．どちらの列の長さも s 以下のはずなので, 帰納法の仮定によって,

$$2\sum_{i=0}^{k-1} 2^{-n(x_i)} \geq 2^{-n(x_0 \cdots x_{k-1})}, \text{かつ } 2\sum_{i=k+1}^{s} 2^{-n(x_i)} \geq 2^{-n(x_{k+1} \cdots x_s)}$$

したがって, $2^{-n(x_0 \cdots x_{k-1})} \leq \alpha$, $2^{-n(x_{k+1} \cdots x_s)} \leq \alpha$ となる．また, $2^{-n(x_k)} \leq \alpha$ となることは α の定義から当然である．

さていま n_0 として $2^{-n_0} \leq \alpha$ となる最小の自然数をとれば, $2^{-n(x_0 \cdots x_{k-1})} \leq 2^{-n_0}$, $2^{-n(x_{k+1} \cdots x_s)} \leq 2^{-n_0}$, $2^{-n(x_k)} \leq 2^{-n_0}$ であるから, $n(x_0 \cdots x_{k-1}) \geq$

n_0, $n(x_{k+1}\cdots x_s) \geq n_0$, $n(x_k) \geq n_0$ である．よって, $x_0 \cdots x_{k-1}$ も x_k も $x_{k+1}\cdots x_s$ も V_{n_0} に入ることになる．それゆえ

$$x = x_0 \cdots x_{k-1} \cdot x_k \cdot x_{k+1} \cdots x_s \in V_{n_0} V_{n_0} V_{n_0} \subset V_{n_0 - 1}.$$

ゆえに $n(x) \geq n_0 - 1$, $2^{-n(x)} \leq 2^{-n_0+1} \leq 2\alpha$ となるが, これが不等式 $(**)$ の $r = s$ の場合になっている．これで $(**)$ は証明された．

さて, この関数 $\varphi(x)$ によって集合 $W_n = \{x \in G : \varphi(x) \leq 2^{-n}\}$ をつくれば, $V_{n+1} \subset W_n \subset V_n$ となるから, $\{W_n : n \in \omega\}$ もまた $\mathcal{U}_0$ のフィルター基となる．また, 性質 (i)〜(iv) により,

$$d_L(x, y) = \varphi(x^{-1}y)$$

と定義すれば d は G 上のひとつの距離関数となり, 性質 (v) によりこれが G の位相を与えることになる．(証明終)

7.4. 前の 7.3 で構成した距離関数 d_L に添字 L がついている理由は, この距離関数が**左不変**(left-invariant) であることによる．つまり

$$\forall x, y, a \in G\,(d_L(ax, ay) = d_L(x, y))$$

となっている．また, 同じ φ を用いて, $d_R(x, y) = \varphi(xy^{-1})$ をつくると, **右不変**(right-invariant) な距離関数が得られる:

$$\forall x, y, a \in G\,(d_R(xa, ya) = d_R(x, y)).$$

(明らかに $d_L(x, y) = d_R(x^{-1}, y^{-1})$ である.) このように, 距離づけ可能な位相群の位相は, 左不変または右不変の距離によって与えられる．だが, 左右両側不変な距離は存在しないことがある．両側不変距離が存在するための必要十分条件は, 7.3 における性質 (i)〜(v) をみたす関数 φ で, さらに

(vi) $\varphi(xy) = \varphi(yx)$

という条件をみたすものが存在することであり, また 1_G の近傍フィルターが $\forall n \in \omega \forall a \in G\,(aW_n a^{-1} = W_n)$ をみたす基 $\{W_n : n \in \omega\}$ をもつことである．

7.5. (左右の一様構造) 距離づけ可能な位相群 G の左不変な距離 d_L に関するコーシー列 $\{x_n\}$ は,

$$\forall U \in \mathcal{U}_0\, \forall^\infty i\, \forall^\infty j\, (x_i^{-1} x_j \in U)$$

という条件をみたす．逆に, そのような列は d_L に関するコーシー列である．したがって左不変な距離に関するコーシー列 (左コーシー列) のクラスは, 特

定の左不変な距離 d_L のとり方によらず G の位相だけによって決まっている．同様に，

$$\forall U \in \mathcal{U}_0 \, \forall^\infty i \, \forall^\infty j \, (x_i x_j^{-1} \in U)$$

となることが，列 $\{x_n\}$ が (なんらかの/すべての) 右不変距離に関するコーシー列 (右コーシー列) であるための必要十分条件となっている．

あきらかに，$\{x_n\}$ が左コーシー列であるとき，そしてそのときに限り，$\{x_n^{-1}\}$ が右コーシー列となる．

一般に，コーシー列は “互いに限りなく近くなっていく” 点列のことだ．このような変動する量どうしの “互いに近い” という関係は一般の位相空間では記述できない．距離空間では，$d(x, y) < \varepsilon$ なら x と y は ε より近いとわかる．位相群では，$x^{-1}y$ が単位元の近傍 U に入るときに x と y が “U 程度に近い” と考える．これがこの位相群の**左一様構造**(left uniformity) を定める．同様に xy^{-1} が U に入るとき x と y が U 程度に近いと考えることもできる．これは位相群の**右一様構造**(right uniformity) を定める．

一様構造の一般論はブルバキの数学原論『位相』にある．

一様構造が定まれば，どんな点列をコーシー列と呼ぶかが決まる．だが逆は一般にはだめで，“何がコーシー列であるか” だけでは一様構造は決まらない．

7.6.(完備距離群) 左コーシー列が右コーシー列になるとは限らない (→ 10.4)．左コーシー列であると同時に右コーシー列でもあるような点列を**両側コーシー列**という．これは $\{x_n\}$ と $\{x_n^{-1}\}$ の両方が左コーシー列であるというのと同じことである．

距離づけ可能な群は，すべての両側コーシー列が収束するときに**完備**(complete) であると言われる．

これは，$D(x, y) = d_L(x, y) + d_R(x, y)$ ($= d_L(x, y) + d_L(x^{-1}, y^{-1})$) で定められる距離 D に関する，距離空間としての完備性と同じことである．(この D は一般に左不変でも右不変でもない.)

距離づけ可能な群が完備であっても，一般には完備な左不変距離あるいは右不変距離は存在しない．しかし，距離づけ可能な群が完備で，しかも両側不変な距離があるなら，それらはすべて完備な距離となる．

7.7.(剰余類空間) G を距離づけ可能な位相群，H をその閉部分群とする．H を法とする G の左剰余類全体の集合 $G/H = \{xH : x \in G\}$ には，G の位相からの商位相を入れて位相空間と考える．この位相は，実は次のように特徴づけられる:

(1) G の位相から誘導される商位相である．(定義)

(2) G の右不変な距離 d_R が誘導する $\mathcal{F}^*(G)$ 上の Wijsman 位相からの相対位相である．

(3) G の右不変な距離 d_R が誘導する $\mathcal{F}^*(G)$ 上のハウスドルフ距離位相からの相対位相である.

(4) $\rho(xH, yH) = \inf\{d_R(xh, yk) : h, k \in H\}$ と定められる ρ を距離とする距離位相である.

その証明は, (4) の関数 $\rho(xH, yH)$ が $d_R(x, yH)$ と一致し, この値がハウスドルフ距離とも一致すること, それから, ρ による位相が商位相と一致することを確認することによる.

7.8.(完備距離群の剰余類空間) こうして, G が距離づけ可能な群であれば閉部分群 H による左剰余類の空間 G/H も距離づけ可能な位相空間となる. とくに H が正規部分群であれば, 商群 G/H は距離づけ可能な位相群となる.

じつは, G が完備な距離のつく群であれば, 剰余類空間 G/H にも完備な距離がつく. ただしそれは, 7.7 で定義した ρ が完備になるという意味ではない. G の右不変距離 d_R が完備とは限らないからである.

G/H に完備な距離がつくことは, 類別写像 $x \mapsto xH$ が連続な開写像であることから Sierpinski–Hausdorff–Michael の定理 (1.5) を用いて示すことができる.

また, 可分な位相群の範囲でしか使えないが (われわれの応用の範囲ではこれで十分), 7.7 で述べた商位相の特徴づけを利用する証明もある. 次にそれを述べる.

G/H は G の空でない閉部分集合の集まりなので $\mathcal{F}^*(G)$ の部分集合とみなすことができる. 7.7 ではこのとき $\mathcal{F}^*(G)$ 上の二つの位相 (右不変距離から導かれる Wijsman 位相とハウスドルフ距離位相) が G/H 上で商位相と一致することを主張した. つまり剰余類空間 G/H は $\mathcal{F}^*(G)$ の部分空間になる.

しかも, G/H は $\mathcal{F}^*(G)$ の閉部分集合になる. これを示すために, 剰余類の列 x_iH $(i \in \omega)$ が G の空でない閉集合 A に Wijsman 位相で収束したとする. このとき $A = \{x \in G : \lim_{i\to\infty} d_R(x, x_iH) = 0\}$ となる. いま $a, b \in A$ だったとする. $h_i, k_i \in H$ を $i \to \infty$ のとき $x_ih_i \to a$, $x_ik_i \to b$ となるようにとろう. このとき $h_i^{-1}k_i \to a^{-1}b$ となり, H が閉部分群であることから $a^{-1}b \in H$ すなわち $aH = bH$ となる. したがって, A は剰余類 aH に含まれることになる. 逆に $b \in aH$ であれば, $h = a^{-1}b \in H$ で, $x_ih_ih \to ah = b$ となるから $\lim_i d_R(b, x_iH) = 0$, したがって $b \in A$ となる. よって $A = aH$ である. これで G/H が d_R から導かれる $\mathcal{F}^*(G)$ 上の Wijsman 位相に関する閉集合であるとわかった. d_R から導かれるハウスドルフ距離位相はこの Wijsman 位相より強いから, G/H はハウスドルフ距離位相のもとでも閉集合である.

ここで G が可分完備距離群 (ポーランド群) であれば, Beer–Constantini の定理 ($\to$ 6.3) により, d_R から導かれる Wijsman 位相のもとで $\mathcal{F}^*(G)$ が

ポーランド空間となるから, G/H はその閉部分集合としてポーランド空間とわかる.

あるいは, d_R によって G を完備化し, この完備化 $\hat{G}$ への G の埋め込みが引き起こすハウスドルフ距離空間の間の埋め込みによって, $\mathcal{F}^*(G)$ が $\mathcal{F}^*(\hat{G})$ の G_δ 部分集合にうつることを示せばよい. こうして $\mathcal{F}^*(G)$ には位相を変えずに完備な距離がつき, その閉部分集合 G/H にも完備な距離がつく.

8. ポーランド群

位相空間としてポーランド空間であるような位相群, いいかえれば, 完備な距離のつく可分な位相群を**ポーランド群**という.

8.1.(Pettis の定理) G をポーランド群とし, $A \subset G$ をベールの性質をもち疎集合ではない集合とするとき, AA^{-1} は単位元の近傍になる.

その証明: A はベールの性質をもち, 疎でないので, ある空でない開集合 O について $O \setminus A$ が疎集合になっている. $g \in O$ とすると, Og^{-1} は単位元の近傍で, $Og^{-1} \setminus Ag^{-1} = (O \setminus A)g^{-1}$ は疎集合である.

$VV \setminus Og^{-1}$ をみたす単位元の近傍 V をとる. $V^{1} = V$ と仮定しても一般性を損なわない. このときこの V が AA^{-1} に含まれることを以下で示す.

$V \subset VV \subset Og^{-1}$ なので $V \setminus Ag^{-1}$ は疎集合. 同様に, 任意の $v \in V$ について $v^{-1}V \setminus Ag^{-1}$ も疎集合である. v を左からかけて $V \setminus vAg^{-1}$ も疎集合である. $V \setminus (Ag^{-1} \cap vAg^{-1}) = (V \setminus Ag^{-1}) \cup (V \setminus vAg^{-1})$ であって, これは疎集合だが V 自身は疎集合ではない (G はベール空間) ので, $Ag^{-1} \cap vAg^{-1}$ は空ではない. ここから要素を取り出すとそれは $ag^{-1} = vbg^{-1}$ ただし $a, b \in A$ という形になっている. このとき $v = ab^{-1} \in AA^{-1}$ となる. v は V の任意の要素だったので $V \subset AA^{-1}$. したがって AA^{-1} は単位元の近傍である. (証明終)

Pettis の定理がなりたつためには, G はベール的な位相群でありさえすればよい.

8.2.(準同型の連続性) Pettis の定理の応用として次のことがわかる. G がポーランド群, H が可分で距離づけ可能な位相群だったとする. $f : G \to H$ が群としての準同型で, BP 可測 ($\to$ 2.8) であるものとすると, f は連続である.

その証明: U を H の単位元の任意の近傍とする. $WW^{-1} \subset U$ をみたす単位元の近傍 W をとる. H の可分性より可算集合 $\{h_n : n \in \omega\}$ で $H = \bigcup_n Wh_n$ とできて, $G = \bigcup_n f^{-1}(Wh_n)$ より, 少なくともひとつの $f^{-1}(Wh_n)$ は疎集合でない. f の BP 可測性から $A = f^{-1}(Wh_n)$ はベールの性質をもち疎集合でないので Pettis の定理により AA^{-1} は単位元の近傍である. いま $x = ab^{-1} \in AA^{-1}$ $(a, b \in A)$ ととると, $f(a)h_n^{-1}$ と $f(b)h_n^{-1}$ は W に入るから $f(x) = f(a)(f(b))^{-1}$ は WW^{-1} に入る. したがって, $f(AA^{-1}) \subset U$ となるが, これは f が単位元 1_G において連続であることを意味する. f は群の演算を保つので, 1_G で連続であればすべての点において連続である. (証明終)

8.3.(ポーランド群の位相の一意性) まえの 8.2 から次のことがいえる: 群 G に 2 とおりのポーランド群位相 t_1 と t_2 が入っていたとして, t_2 の開集合系が t_1 からみてベールの性質をもつ集合ばかりから構成されていたとする. このとき $id_G : (G, t_1) \to (G, t_2)$ は BP 可測な群準同型だから連続で, $t_2 \subset t_1$ となる. このとき, t_1 の開集合は t_2 において (ポーランド空間の 1 対 1 連続

像で) ボレル集合となるから, t_2 からみてベールの性質をもつ. したがって, 同様に $t_1 \subset t_2$ で, 結局ふたつの位相は一致する.

したがって, 同一のボレル集合族をもつ群位相の間には, ポーランド群位相はたかだか一つしかない. そして, (もしあれば) それがそれらの位相の集まりの間でもっとも細かい位相になっている.

8.4. ポーランド群 G の部分群 H が G の G_δ 部分集合だったとしよう. このとき, 閉包 $\overline{H}$ (これもポーランド群である) の中で H は comeager となるので, Pettis の定理から HH^{-1} は $\overline{H}$ の単位元の近傍を含む. このことから $H = \overline{H}$ が導かれる. つまり H は閉部分群である. したがってポーランド群には "真の G_δ 部分群" は存在しない.

8.5. G をポーランド群とし, H をその閉部分群とする. すでに示された通り (→ 7.7, 7.8), 左剰余類空間 G/H は商位相のもとでポーランド空間となる. しかも, d_R から導かれる Wijsman 位相にかんする閉集合であるから, Effros のボレル構造をもつ標準ボレル空間とみた $\mathcal{F}^*(G)$ のボレル集合になっている. Kuratowski–Ryll-Nardzewski の選択定理 (→ 6.11) によって, ボレル可測な選択写像 $\sigma_G : \mathcal{F}^*(G) \to G$ が存在する. これを G/H に制限すると 1 対 1 写像になっているので, その像 S は G のボレル集合である.

すなわち, 次のことが証明された:

定理. G をポーランド群, H を G の閉部分群とするとき, H を法とするすべての左剰余類とちょうど 1 点で交わるような G のボレル集合 S を見い出すことができる.

9. 群の作用

群の作用についての一般的な用語の説明.

9.1. 群 G の集合 X への**作用**(action) とは, 写像 $a : G \times X \to X$ で, すべての $g, h \in G$ とすべての $x \in X$ について $a(g, a(h, x)) = a(gh, x)$ となるもののことをいう. どんな写像 a について考えているか明らかなときには $a(g, x)$ を簡単に $g.x$ と書く. このとき写像が作用と呼ばれるための条件は

$$g.(h.x) = (gh).x$$

と書ける. しばしば "G が X に作用している" ということを $G \curvearrowright X$ と書く.

9.2. 作用 a が連続 (あるいは可測 etc.) であるとは, $G \times X$ から X への変数の関数として連続 (あるいは可測 etc.) であるということを意味する. このとき, 固定された $g \in G$ について写像 $x \mapsto g.x$ は X から X への連続 (あるいは可測 etc.) 写像となる. また, 固定された $x \in X$ について写像 $g \mapsto g.x$ は G から X への連続 (あるいは可測 etc.) 写像となる.

9.3. $a : G \curvearrowright X$ (つまり写像 a は G の X への作用である) とする. x と y の間に $\exists g \in G\,(y = g.x)$ という関係があるとき $x\ E_a\ y$ とすれば, これは X 上のひとつの同値関係を定める. この同値関係に関する x の同値類は $G.x = \{g.x : g \in G\}$ であり, これは x の**軌道**(orbit) と呼ばれる. すべての $x, y \in X$ が互いに同値となるとき, つまり X 自身が一つの軌道であるとき, この作用は**推移的**(transitive) であるという.

9.4. $a : G \curvearrowright X$ のとき $x \in X$ を動かさない G の要素の全体を x の**固定部分群**(stabilizer) と呼び, G_x と書く:

$$G_x = \{\, g \in G \,:\, g.x = x \,\}.$$

この G_x は G の部分群であり, 左剰余類 G/G_x と軌道 $G.x$ の間には自然な 1 対 1 対応 $gG_x \mapsto g.x$ がある. あきらかに $G_{g.x} = gG_xg^{-1}$ である.

9.5. また, 集合 $S \subset X$ の各点を不動にする群要素の全体を G_S と書く:

$$G_S = \{\, g \in G \,:\, \forall x \in S\,(g.x = x) \,\} = \bigcap_{x \in S} G_x.$$

9.6. 単位元以外の群要素が不動点をもたない, つまりすべての $x \in X$ について $G_x = \{1_G\}$ のとき, この作用は**自由**(free) であるという. また, どの $x \in X$ もどれかの群要素で動かされるとき, つまり $G_X = \{1_G\}$ のとき, この作用は**効果的**(effective) であるという.

10. 無限対称群 S_∞

ω から ω の上への 1 対 1 関数の全体を S_∞ と書く．S_∞ は関数の合成を演算として群をなす．

10.1.(S_∞ の位相) $n \in \omega$ に対して $N_n = \{g \in S_\infty : g{\restriction}n = id_n\}$ とする．N_n は S_∞ の部分群であり，

$$S_\infty = N_0 \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots$$

かつ $\bigcap_{n\in\omega} N_n = \{id_\omega\}$ となる．

また，$n \in \omega$, $g \in S_\infty$ に対して，$m > \max(g''n)$ とすると $N_m \subset gN_ng^{-1}$ となる．

そこで，$\{N_n : n \in \omega\}$ を単位元の近傍系のフィルター基とする S_∞ 上の群位相が考えられるが，じつはこれが ω^ω からの相対位相に一致する．なぜなら，$g, h \in S_\infty$ が N_n を法として左合同であるためには $g \restriction n = h \restriction n$ となることが必要かつ十分であるから．

10.2. ω^ω の部分集合として S_∞ は G_δ であるから，ポーランド空間である．ゆえに，S_∞ はひとつのポーランド群 (完備な距離のつく可分な位相群) である．

10.3.(S_∞ の不変距離) S_∞ 上の左不変な距離を構成しよう．$g \neq id_\omega$ のとき，$g \in N_n \setminus N_{n+1}$ となる一意的な $n \in \omega$ について $\varphi(g) = 2^{-n}$ と定義しよう．単位元については $\varphi(id_\omega) = 0$ とする．このとき，φ は 7.3 に掲げた条件 (i)〜(iv) をみたす．とくに (iii) についてはより強く

$$\varphi(xy) \leq \max(\varphi(x), \varphi(y))$$

をみたす．これは各 N_n が部分群になっていることによる．また条件 (v) に相当するものとして，

$$N_n = \{\, x \in S_\infty \,:\, \varphi(x) \leq 2^{-n} \,\}$$

となっている．そこで，$d_L(x, y) = \varphi(x^{-1}y)$ と定義すればこの d_L が S_∞ の位相を与える左不変な距離になっている．作り方から明らかなように，$x \neq y$ のときは

$$d_L(x, y) = 2^{-\min\{n : x(n) \neq y(n)\}}$$

である．$d_R(x, y) = d_L(x^{-1}, y^{-1})$ とおけば d_R は右不変な距離となる．この d_L, d_R とも，三角不等式より強い**超距離**(ultrametric) 不等式:

$$d(x, z) \leq \max\{\, d(x, y), d(y, z) \,\}$$

をみたす**非アルキメデス的**(non-Archimedean) 距離関数になっている．

10.4.(S_∞ の左右の一様構造は一致しない) 自然数 $i \in \omega$ に対して, $0 \leq k < i$ なら $g_i(k) = 2k$, $i \leq k < 2i$ なら $g_i(k) = 2(k-i)+1$, $k \geq 2i$ なら $g_i(k) = k$ として, $g_i \in S_\infty$ を定義しよう.

$$\begin{aligned} g_0 =&(0,1,2,3,4,5,6,7,\dots) \\ g_1 =&(0,1,2,3,4,5,6,7,\dots) \\ g_2 =&(0,2,1,3,4,5,6,7,\dots) \\ g_3 =&(0,2,4,1,3,5,6,7,\dots) \\ g_4 =&(0,2,4,6,1,3,5,7,\dots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

この列 $\{g_i : i \in \omega\}$ は左コーシー列である. なぜなら, $i \geq n$ のとき $g_i \upharpoonright n = (0,2,\dots,2(n-1))$ と決まってしまうから. この左コーシー列は ω^ω の点列としては $(0,2,4,\dots,2n,\dots)$ に収束するが, これはもちろん S_∞ の要素ではない. そこで $\{g_i : i \in \omega\}$ は S_∞ の収束列ではない.

収束しない左コーシー列があるので, S_∞ の左不変な距離はどれも決して完備にならない. このとき, 右不変な距離も, 決して完備とはならない.

また, 上記の点列 $\{g_i : i \in \omega\}$ は右コーシー列ではない. というのも, $i \geq 1$ のとき, $g_i^{-1}(1) = i$ であるから, $i \neq j$ なら $g_i g_j^{-1} \notin N_1$ となってしまう. したがって, S_∞ では左右の一様構造が一致しない.

だが, S_∞ はポーランド群であるから両側コーシー列は必ず収束するはずだ. 実際, 点列 $\{g_i : i \in \omega\}$ が両側コーシー列であれば, まず左コーシー列であることから, ω^ω の点列として収束し (その極限 g は 1 対 1 関数であって), また右コーシー列であることから g は上への写像となることがわかる. よって $g \in S_\infty$ となり $\{g_i : i \in \omega\}$ が S_∞ の収束点列になる.

10.4.(S_∞ は局所コンパクトでない) S_∞ が局所コンパクトであるためには, ある N_n がコンパクト部分群にならないといけないわけだが, このことは成立しない. 実際, N_n の中には $g(n)$ の値によって分類される可算無限個の, N_{n+1} を法とする左合同類があって, それらは互いに交わらない clopen 集合による N_n の分割になっている. したがって, どの N_n もコンパクトではなく, S_∞ は局所コンパクト群ではない. 上記の考察からもかわるように, 位相空間としては S_∞ は ω^ω と同相である.

10.5.(S_∞ の "普遍性") 可分で非アルキメデス的な左不変距離のつく位相群 G を考えると, G の位相は, 開部分群のある列

$$G = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \cdots$$

を単位元 1_G の近傍系のフィルター基として生成される. G の可分性から, 各部分群 H_m の指数 $|G/H_m|$ は高々可算である. そこで, $\bigcup_{m \in \omega} G/H_m$ を数え

上げて ω と 1 対 1 に対応させることができる．ここで, H_m を法とする合同類は m 番目以降にしか数え上げられないようにしておく．

各 $g \in G$ は左移動によって左合同類の集合 G/H_m 上の置換を引き起こすから, 上記の対応のもとで ω 上の置換を引き起こす．$g \in G$ に対応する ω 上の置換を $f(g)$ とすると, あきらかに f は G から S_∞ への準同型写像になっている．

$\bigcap H_m = \{1_G\}$ なので, すべての H_m を移動させない g は 1_G 以外にはない．したがって $f(g) = id_\omega$ となるのは $g = 1_G$ のときだけである．つまり f は単射である．

この f は連続である．なぜなら, $g \in H_m$ なら $H_0, H_1, \ldots, H_m$ のいずれかを法とする合同類は g によって移動せず, したがって $f(g) \restriction m = id_m$ つまり $f(g) \in N_m$ となるから．

また, $f(g) \in N_k$ とすると, k 番目より前に数え上げられた合同類は g で移動しない．したがって, H_m を法とする合同類のひとつが数え上げられる程度に十分大きい k をとると, $f(g) \in N_k$ なら $g \in H_m$ ということになる．これは, $f(G)$ から G へ逆写像を考えたときそれが連続になることを意味している．

こうして, f は G を S_ω に位相まで含めて同型に埋め込むことになる．すなわち:

定理. 可分で非アルキメデス的な左不変距離のつく位相群は S_∞ の部分群と同型である．

したがって S_∞ はたとえばカントール群 $\{-1, +1\}^\omega$ や p 進整数の群 $\mathbb{Z}_p$ などのコピーを含む．

一方, S_∞ の準同型像となる群はほとんど (まったく?) ない．

10.6.(Ulam–Schreier の定理) 代数的な意味で, S_∞ の真の正規部分群は, 有限な対称群 S_n の帰納極限 $\tilde{S} = \{g \in S_\infty : \forall^\infty n\, (g(n) = n)\}$ と, その交代群 $\tilde{A}$ だけである．

S_∞ の位相で $\tilde{S}$ と $\tilde{A}$ は孤立点のない可算部分集合となっている．両者とも S_∞ の中で稠密なので, そのいずれかを核とする準同型は (行き先が T_1 位相群であるかぎり) 連続でありえない．これは, “S_∞ から距離のつく群への連続な準同型 (あるいは可分な T_1 位相群への BP 可測な準同型) は単射であるかまたは自明である,” ということを意味する．この意味で, S_∞ は “ほとんど単純群” である．