命題論理のコンパクト性についての余談

藤田 博司

2017 年 6 月 6 日

概要

環の素イデアルの存在を, 命題論理のコンパクト性から導く.

1 復習: 環とイデアル

以下, R を零環でなくて乗法の単位元をもつ可換な環であるものとする. 乗法の単位元を 1 と書くことにする. 部分集合 $I \subseteq R$ が, 条件

- $0 \in I$,
- $a, b \in I$ ならば $a + b \in I$,
- $a \in I$ ならばすべての $r \in R$ について $ra \in I$

をみたすならば, I は R の**イデアル**とよばれる. たとえば R 自身もひとつのイデアルだ. R 自身のことを**自明なイデアル**, それ以外のイデアルのことを**自明でないイデアル**という.

環 R の要素 $a_1, \ldots, a_n \in R$ に対して, 集合

$$[a_1, \ldots, a_n] = \left\{x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n : x_1, \ldots, x_n \in R\right\}$$

を考える. 集合 $[a_1, \ldots, a_n]$ はイデアルであり, とくに $a_1, \ldots, a_n$ を要素として含む最小のイデアルである. これを $a_1, \ldots, a_n$ によって**生成された**イデアルという.

イデアル I が自明でなくて, かつ, すべての $a, b \in I$ について

$$ab \in I \text{ ならば } a \in I \text{ または } b \in I$$

をみたすとき, I は**素イデアル**と呼ばれる.

定理 環 R には素イデアルが存在する.

この定理は通常は, ツォルンの補題を用いた極大イデアルの存在証明の系として示される. 本稿では, ツォルンの補題の代用として**命題論理のコンパクト性**を用いて, 素イデアルの存在を証明する.

2 復習: 命題論理のコンパクト性

一般に, 命題変数の集合 $\mathbb{P}$ から $\{0,1\}$ への写像を $\mathbb{P}$ に関する**真理値割当て**という. 真理値割当て $v\colon \mathbb{P} \to \{0,1\}$ が与えられれば, 命題論理の論理式 A の真理値 $\bar{v}(A)$ が定まる. 念のために復習しておくと, 命題論理の論理式の構成に関する帰納法によって, 値 $\bar{v}(A)$ は次のように定義される:

- 命題変数 p そのものについて $\bar{v}(p) = v(p)$ である.
- $\bar{v}(B) = 0$ のとき $\bar{v}(\neg B) = 1$ とし, $\bar{v}(B) = 1$ のとき $\bar{v}(\neg B) = 0$ とする.
- $\bar{v}(B) = \bar{v}(C) = 1$ の場合に $\bar{v}(B \wedge C) = 1$ とし, その他のすべての場合に $\bar{v}(B \wedge C) = 0$ とする.
- $\bar{v}(B) = \bar{v}(C) = 0$ の場合に $\bar{v}(B \vee C) = 0$ とし, その他のすべての場合に $\bar{v}(B \vee C) = 1$ とする.
- $\bar{v}(B) = 1$ かつ $\bar{v}(C) = 0$ の場合に $\bar{v}(B \to C) = 0$ とし, その他のすべての場合に $\bar{v}(B \to C) = 1$ とする.

つまり真理値割当て v の定める命題変数の値から, 各命題演算子の真理表にしたがって, 論理式の値が定まるものとする.

B	C	$\neg B$	$B \wedge C$	$B \vee C$	$B \to C$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1

命題論理の論理式 A に対して $\bar{v}(A) = 1$ であるとき, 真理値割当て v は A を**充足する**という. 命題論理の論理式の集合 Γ に属するすべての論理式 A について $\bar{v}(A) = 1$ となるとき, 真理値割当て v は Γ を充足するという.

命題論理の論理式の集合 Γ に対して, それを充足する真理値割当てがひとつでも存在するなら, Γ は**充足可能**であるという. すべての有限部分集合 $\Delta \subseteq \Gamma$ が充足可能であるとき, Γ は**有限充足的**であるという. 充足可能なら有限充足的であることは明らかだが, その

逆を主張するのが, 命題論理のコンパクト性である.

命題論理のコンパクト性: 命題論理の論理式の集合 Γ が有限充足的なら Γ は充足可能である.

3　定理の証明

さて, 環 R の各要素 a ごとにひとつ命題変数 p_a を用意し, その全体を

$$\mathbb{P} = \{p_a : a \in R\}$$

とする. すると, 環 R の部分集合 $X \subseteq R$ に対して $\mathbb{P}$ に関する真理値割当て $v_X \colon \mathbb{P} \to \{0,1\}$ が

$$v_X(p_a) = 1 \Leftrightarrow a \in X$$

によって対応する.

環 R のすべての要素 $a, b, r \in R$ にわたって

$$p_0, \tag{a}$$
$$(p_a \wedge p_b) \to p_{a+b}, \tag{b}$$
$$p_a \to p_{ra}, \tag{c}$$
$$\neg p_1, \tag{d}$$
$$p_{ab} \to (p_a \vee p_b) \tag{e}$$

の形の命題論理の論理式を集めた集合を Γ としよう. すると, 部分集合 $X \subseteq R$ が R のイデアルになることと, 真理値割当て v_X が (a),(b),(c) の形の論理式をすべて充足することとが同値となる. さらに真理値割当て v_X が (d) の論理式を充足すれば, イデアル X は自明でない. 真理値割当て v_X が (a)–(e) の形の論理式すべて, すなわち Γ 全体を充足すれば, X は素イデアルとなる.

したがって, 環 R の素イデアルの存在を示すためには, 命題論理の論理式の集合 Γ が充足可能であることを示せばよい. 命題論理のコンパクト性によれば, そのためには, Γ が有限充足的であることを示せばよい.

そこで, $\Delta \subseteq \Gamma$ を有限部分集合とする. この Δ を充足する真理値割当てを見つけることが目標である.

命題変数 p_a が Δ に属する論理式に出現するような要素 $a \in R$ 全体の集合を S としよう. Δ は有限であり, 各論理式は高々有限個の命題変数だけを含むから, S も有限集合である.

有限集合 S のいくつかの要素 $a_1, \ldots, a_n \in S$ の生成するイデアル $[a_1, \ldots, a_n]$ を考え, その全体を $\mathcal{X}$ としよう:

$$\mathcal{X} = \bigl\{[a_1, \ldots, a_n] : a_1, \ldots, a_n \in S\bigr\}$$

なお, $n = 0$ のときの $[\,] = \{0\}$ も $\mathcal{X}$ に含めることにする. $\{0\}$ は自明でないイデアルだから, $\mathcal{X}$ には少なくともひとつ, 自明でないイデアルが属することになる. また, S が有限集合であるから, イデアルの集合 $\mathcal{X}$ も有限である.

ここで $X = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathcal{X}$ を, 自明でなくて, 他の自明でない $Y \in \mathcal{X}$ の真部分集合にならないようなものとする. $\mathcal{X}$ が自明でないイデアルを少なくともひとつ含み, また有限であるから, そのような X は必ず存在する. X が自明でないイデアルなので, 対応する真理値割当て v_X は, Γ に属する論理式のうち (a)–(d) の形のものをすべて充足する. あとは, Δ に属する論理式のうち (e) の形のものを v_X がすべて充足すればいい. そこでいま, そうなっていないとしよう. つまり, 環 R のある要素 $a, b \in R$ について

(i) 論理式 $p_{ab} \to (p_a \vee p_b)$ が Δ に属し, なおかつ
(ii) $\bar{v}_X(p_{ab} \to (p_a \vee p_b)) = 0$ である

と仮定しよう. (i) により $a, b \in S$ である. (ii) によれば $v_X(p_{ab}) = 1$ かつ $v_X(p_a) = 0$ かつ $v_X(p_b) = 0$ であるから, $ab \in X$ かつ $a \notin X$ かつ $b \notin X$ である.

いま $X \subsetneq [a, a_1, \ldots, a_n] \in \mathcal{X}$ であるから, X の選び方により, $[a, a_1, \ldots, a_n]$ は自明なイデアルである. すなわち, $1 \in [a, a_1, \ldots, a_n]$ であり, うまく $x, x_1, \ldots, x_n \in R$ をとれば

$$1 = xa + x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$$

となる. この両辺に b をかけて

$$b = xab + b(x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n)$$

を得る. $ab \in X$ かつ $x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \in X$ より $b \in X$ となるが, これは仮定 (ii) と矛盾する. この矛盾は Δ に属する (e) の形の論理式を真理値割当て v_X が充足しないと仮定したことによる.

ゆえに v_X は Δ に属する (e) の形の論理式を充足する. ということは, v_X は Δ を充足する. これが証明すべきことだった.