2010 年 6 月 10 日 (同 14 日修正)

双対ベルンシュタイン定理とは, 次の言明のことである: 集合 A と B の間に, 全射 $f : A \to B$ と全射 $g : B \to A$ が存在するならば, A と B の間に全単射が存在する.

以下の議論はすべて選択公理 AC を従属選択原理 DC に弱めた集合論 ZF+DC のもとでなされる. このノートの目的は双対ベルンシュタイン定理が ZF+DC から独立であることを示すことである.

(1) 各実数 x を有理数の加法群 $\mathbb{Q}$ を法とする剰余類 $x + \mathbb{Q}$ に対応させる写像を $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ と表記する. あきらかに π は全射である.

(2) 区間 $[0,1]$ 上の無理数の全体 $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ のことを 以下では $\mathfrak{N}$ と書くことにする. $\mathfrak{N}$ と位相同型な集合 $P \subset \mathbb{R}$ で, どの二点も $\mathbb{Q}$ を法として同値でないようなものがとれる:

$$\exists P \subset \mathbb{R}\Big[\, P \approx \mathfrak{N} \,\&\, \forall x, y \in P\big(x \neq y \implies x - y \notin \mathbb{Q}\big)\Big].$$

この命題の証明はあとまわしにする.

(3) $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ の各類のうち P の元を含むものについては, その対応する P の元はただ一つに定まるので, 自然な全単射 $P + \mathbb{Q} \to P$ が存在する. P の元を含まない類はまとめてなにか固定された P の元に対応させることにすれば, 全射 $\mathbb{R}/\mathbb{Q} \to P$ が得られる.

(4) こうして, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ から P への全射が存在する. P が無理数空間 $\mathfrak{N}$ と位相同型であることから, P から閉区間 $[0,1]$ への全射が存在する. したがって, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ から閉区間 $[0,1]$ への全射が存在する. 自然な全射 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ は区間 $[0,1]$ を $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ の上へ写像するから, $[0,1]$ と $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ のそれぞれから他方への全射が存在することになる. 双対ベルンシュタイン定理によれば, このとき $[0,1]$ と $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ の間に全単射が存在する.

(5) 剰余群 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ から区間 $[0,1]$ への単射 $\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Q} \to [0,1]$ が存在したとしよう. 自然な全射 $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ と φ との合成写像 $f = \varphi \circ \pi$ は

$$f(x) = f(y) \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

をみたす有界函数である. そこでいま f を円周群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の函数とみなすことにしよう.

(6) この函数 $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to [0,1]$ が**ルベーグ可測だったと仮定する**. すると, 有界性から $f \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ となる. この f をフーリエ展開したとしよう. 式 (5) から, ゼロ以外の任意の整数 k について

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(t)e^{2\pi ikt}\,dt = \int_0^1 f(t + \frac{1}{2k})e^{2\pi ikt}\,dt = \int_0^1 f(t)e^{2\pi ikt + i\pi}\,dt = -\hat{f}(k)$$

したがって $\hat{f}(k) = 0$ となる. すなわち, 定数項を除くすべてのフーリエ係数がゼロとなる. これは f が $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ の元として定数函数と同値であること, いいかえれば $f(t)$ がほとんどいたるところ一定値をとることを意味する. ところが式 (5) からは f は同じ値を可算回しかとらないことが導かれ, 矛盾する.

(7) こうして $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ から $\mathbb{R}$ への単射の存在はルベーグ不可測函数の存在を導く．ZF+DC において, 双対ベルンシュタイン定理からルベーグ不可測函数の存在が導かれることになる．ところが, ZF+DC からルベーグ不可測函数の存在は導かれない．これはとりもなおさず ZF+DC から双対ベルンシュタイン定理が導かれないことを意味する．

以下, (2) の証明. このあとしばしば位相的諸概念に言及しているが, ここまでの議論で実際に必要だったのは集合と写像のカテゴリーでの全射や単射の概念のみであったから, 位相同型と言っている部分を等濃度と読み替えたうえで, 連続性の検証などは省略しても差し支えない．

(8) 自然数全体 ω の冪集合 $\mathcal{P}(\omega)$ にはカントール空間の位相が入る．二つの部分集合 $a, b \subseteq \omega$ $(a \neq b)$ の距離を

$$\mathrm{dist}(a,b) = 2^{-\min((a \setminus b) \cup (b \setminus a))}$$

によって定義すれば, この距離のもとで $\mathcal{P}(\omega)$ はカントール集合と位相同型である．

(9) 無理数 $\eta \in \mathfrak{N}$ を 10 進展開し, その数字の並びから自然数の集合 $g(\eta)$ をつくる．たとえば

$$\eta = 0.12058794\cdots$$

であれば

$$g(\eta) = \Big\{ 1,\ 21,\ 5021,\ 85021,\ \ldots \Big\}$$

とする．一般に $\eta = \sum_{i \in \omega} d_i 10^{-(i+1)}$ $(d_i \in \{0, \ldots, 9\})$ のとき

$$g(\eta) = \left\{ \sum_{0 \leq i < n} d_i 10^i \;\middle|\; n \geq 1 \right\}$$

である．このとき対応 $\eta \mapsto g(\eta)$ は $\mathfrak{N}$ を $\mathcal{P}(\omega)$ の中へ一対一に写像する．その像を $G = \{\, g(\eta) \mid \eta \in \mathfrak{N} \,\}$ と書こう．$g : \mathfrak{N} \to G$ は位相同型写像である．

(10) $\xi, \eta \in \mathfrak{N}$, $\xi \neq \eta$ のとき $g(\xi) \cap g(\eta)$ は有限集合である．というのも, ξ と η の 10 進展開が小数点下第 N 桁で食い違っているなら, $g(\xi) \cap g(\eta)$ は最初の高々 N 個を除いて共通の要素をもたないからである．したがって (9) で定義された集合 G は, 互いにほとんど交わりのない無限集合の族である．

(11) つぎに, 無理数 $\eta \in \mathfrak{N}$ に対して

$$h(\eta) = \sum_{k \in g(\eta)} \frac{1}{k!}$$

さらに

$$P = \left\{ h(\eta) \;\middle|\; \eta \in \mathfrak{N} \right\}$$

と定義しよう．この P が (2) の求めるものである．まず h が連続 1 対 1 写像であることは問題ないだろう．逆の連続性は (もとの議論に必ずしも必要ではないが), P の要素が互いに $\mathbb{Q}$ を法として合同でないことを示す以下のパラグラフの論法と同様にして示すことができる．したがって h は $\mathfrak{N}$ と P の間の位相同型写像である．

(12) 無理数 $\xi, \eta \in \mathfrak{N}$ を考える．$\xi \neq \eta$ であれば $g(\xi) \setminus g(\eta)$ も $g(\eta) \setminus g(\xi)$ もともに無限集合である．いま自然数 n に対して

$n \in g(\xi)$, $n \notin g(\eta)$ なら $\varepsilon_n = +1$,
$n \notin g(\xi)$, $n \in g(\eta)$ なら $\varepsilon_n = -1$,
どちらでもない場合 $\varepsilon_n = 0$

と定義しよう．g の像 G がほとんど交わりのない不可算集合族なので, これら 3 つの場合のいずれも無限回起こる．あきらかに

$$g(\xi) - g(\eta) = \sum_{n \in \omega} \frac{\varepsilon_n}{n!}$$

である．

(13) いま, 実数 $x = g(\xi) - g(\eta)$ が**有理数であったと仮定しよう**．自然数 q を有理数 x の既約分母またはそれより大きな自然数とすれば $q!x$ は整数のはずである．必要ならば q を大きく取りなおすことにより $\varepsilon_{q+1} = +1$ となっているものとして差し支えない．整数 q をそのようにとったとして, 次の数

$$r = q! \cdot \left(x - \sum_{0 \leq n \leq q} \frac{\varepsilon_n}{n!} \right)$$

を考える．これもまた整数である．ところが

$$r = \sum_{n > q} \frac{q! \cdot \varepsilon_n}{n!}$$

で $\varepsilon_{q+1} = +1$ なのだから

$$r = \frac{1}{q+1} + \sum_{n > q+1} \frac{\varepsilon_n}{(q+1)(q+2) \cdots n}$$

したがって

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{q+1}\Big(1 - \frac{1}{q+1}\Big) &= \frac{1}{q+1}\Big(1 - \sum_{n > q+1} \frac{1}{(q+2)^{n-(q+1)}}\Big) \\ &< \frac{1}{q+1} - \sum_{n > q+1} \frac{1}{(q+1)(q+2) \cdots n} \leq r \leq \frac{1}{q+1} + \sum_{n > q+1} \frac{1}{(q+1)(q+2) \cdots n} \\ &< \frac{1}{q+1}\Big(1 + \sum_{n > q+1} \frac{1}{(q+1)^{n-(q+1)}}\Big) = \frac{1}{q} \leq 1 \end{aligned}$$

となり, r は整数でありえない．矛盾である．こうして $g(\xi) - g(\eta)$ が無理数であることが示され, (2) の証明が完了した．

(14) ここでは必要のないことだが, この論法でもう少し議論すれば集合 P が有理数体上 1 次独立であることがわかるはずである．