不連続関数の微分可能点の集合について

藤田 博司

2007 年 4 月 6 日

過去 3 篇のノート ([1][2][3]) で考察してきた, たくさんの微分可能点を持つ不連続関数の構成について, しめくくりに次の定理を証明する.

定理. 数直線 $\boldsymbol{R}$ 上に, 互いに交わらない 2 つの F_σ 集合 A と B が与えられたとする. このとき, A の各点で微分可能, B の各点で不連続となるような実数値関数が存在する.

[証明] 有界閉集合の系列 $\{E_m\}_{m<\omega}$ と $\{F_n\}_{n<\omega}$ を

$$A = \bigcup_{m<\omega} E_m, \quad B = \bigcup_{n<\omega} F_n$$

となるようにとる. E_m と F_n は互いに交わらない有界閉集合なので

$$r_n := \inf\{\, |x-y| \ : \ x \in E_0 \cup \cdots \cup E_n, \ y \in F_n \,\} > 0$$

という正の数の列 $\{r_n\}$ が得られる. $x \in E_m$ かつ $n \geq m$ であれば F_n のどの点とも x は距離 r_n 以上離れている. したがって,

$$\forall x \in A \, \forall^\infty n \, [\, \mathrm{distance}(x, F_n) \geq r_n \,]$$

となっている.

あとは, 各 n ごとに $F_n = \overline{C_n}$ となるような可算集合 C_n をとり, 正の数の列 $\{s_n\}$ を

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{r_N} \sum_{n=N}^{\infty} s_n = 0$$

となるように選び,

$$f(x) = \sum_{n<\omega} s_n \chi_{C_n}(x)$$

によって $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を定義すれば, [1] と [2] の論法によって, この関数は A の各点で微分可能, B の各点で不連続となることがわかる. □

いくつかの注意

(1) ほとんどすべての実数を含む疎な F_σ が存在し, それと交わらないがすべての区間と不可算に交わる F_σ 集合も存在する. それらをこの定理の A と B とすれば, ほとんど至る所微分可能で, 不可算稠密集合上で不連続であるような実関数 ([1]) の存在と, ほとんど至る所不連続だが不可算稠密集合上で微分可能であるような実関数 ([2]) の存在が, この定理によって示される.

(2) この定理は [2] の最後に述べた問題に対する否定的な解を与える. すなわち, 実数の疎集合 E が与えられたき, E の各点で不連続であって, しかも, すべての開区間に微分可能点が不可算個 (連続濃度) 含まれるような実数値関数を構成することができる.

(3) ここで構成してみせる関数は, 上半連続関数, したがって, 第 1 級のベール関数となっている.

(4) 不連続点と微分可能点がともに数直線上に稠密に存在する場合, 両者はともに疎集合をなす. これは, 関数の不連続点の集合がつねに F_σ 集合であることと, [3] で証明した結果による. しかしながら, ここでの定理の A と B にかんする条件を "互いに交わらない疎集合" という条件に置き換えることはできない. というのも, 互いに交わらない 2 つの疎集合を, 互いに交わらない 2 つの F_σ 集合で分離できるとは限らないからである. 実際, 実数直線に含まれるカントール集合を, それに相対的なベルンシュタイン集合のペアに分割すれば, この定理の変形への反例となる.

参考文献

[1] 藤田 博司, ほとんど至る所微分可能な不連続関数の構成, 2006 年 9 月 28 日づけのノート. 筆者の Web サイト[*1]より入手可能.

[2] —, ほとんど至る所不連続で稠密集合上で微分可能な実関数の存在について, 2006 年 9 月 29 日づけのノート. 筆者の Web サイトより入手可能.

[3] —, 不連続点を稠密にもつような実関数の微分可能点の集合について, 2006 年 10 月 1 日づけのノート. 筆者の Web サイトより入手可能.

[*1] `http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/%7Efujita/`