不連続点を稠密にもつような実関数の微分可能点の集合について

藤田 博司

2006 年 10 月 1 日

このノートで主に証明したいのは次のことだ.

定理. 実関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ の不連続点が $\boldsymbol{R}$ において稠密に分布しているならば, f の微分可能点全体の集合は $\boldsymbol{R}$ においてたかだか疎集合である. □

すでにノート [2] で証明したとおり, 不連続点が不可算稠密に存在し, なおかつほとんどいたるところ微分可能であるような実関数が存在する. ここで「ほとんどいたるところ」はルベーグ測度の意味で零集合を除けばという意味だが, これをベールの性質の意味で疎集合を除くという形に変えることはできないことが, この定理で示されることになる.

1 ディオファントス近似と微分可能性の関係

証明に移る前に, 証明の動機づけと問題全体の意義を理解する助けになると思われる考察を述べる. **お急ぎの方は次の節へ飛んでください.**

一般に, 実関数の不連続点の集合は $\boldsymbol{R}$ の F_σ 部分集合をなす. 逆に $\boldsymbol{R}$ の F_σ 部分集合が与えられれば, その各点で不連続, 補集合の各点で連続となる実関数の例を与えることができる. また, ノート [3] では, 与えられた疎集合の各点で不連続でありながら, 微分可能点が $\boldsymbol{R}$ において稠密に存在するような上半連続関数を構成した.

たくさんの連続点を持つ不連続関数の具体例として, しばしば次の関数が引き合いに出される. 実数 x が有理数でその規約分母 ($qx \in \boldsymbol{Z}$ をみたす最小の正整数 q) が q であるとき $f_1(x) = q^{-1}$ とし, x が無理数のときは $f_1(x) = 0$ とする. これは, 有理数において不連続, 無理数において連続であるような実関数である.

この関数 f_1 はすべての無理数において連続であるが, 実はいたるところ微分不可能である. その理由は次のとおり. x が有理数なら, f_1 は x において

不連続だからもちろん微分不可能. また, x が無理数のときは, 連分数展開の理論から知られるとおり,

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$$

をみたす既約分数 p/q が無数に存在する. そのような有理数 p/q をたどって x に近づいたとすると,

$$\left|\frac{f_1(p/q)-f_1(x)}{p/q-x}\right|=\frac{1}{|qx-p|}>q$$

であるから,

$$\limsup_{y\to x}\left|\frac{f_1(y)-f_1(x)}{y-x}\right|=+\infty$$

となり, f_1 は x において微分不可能である.

ところが, 2 よりほんの少しでも大きな指数については, 同様の近似分数が無数に存在するとは限らない. 詳しくいえば, ϵ を任意の正の実数とするとき,

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{2+\epsilon}}$$

をみたす既約分数 p/q が無数に存在するような数 x の集合は, ルベーグ測度の意味で零集合になってしまう. この理由により, ϵ を任意の正の数として, x が有理数のとき $f_{2+\epsilon}(x)=q^{-(2+\epsilon)}$, x が無理数のとき $f_{2+\epsilon}(x)=0$ と定義した関数 $f_{2+\epsilon}$ は, 有理数において不連続, 無理数において連続というところまでは f_1 と同じだが, いたるところ微分不可能だった f_1 と大きく異なって, $f_{2+\epsilon}$ はルベーグ測度の意味でほとんどいたるところ微分可能で $f'_{2+\epsilon}(x)=0$ a.e. x となる.

それでも, $f_{2+\epsilon}$ の微分可能点全体の集合は疎集合 (ベールの第一類集合) にすぎない, というのも, たかだか疎集合を除いたベールの類の意味で "ほとんどすべて" の実数 x は, 任意の正の数 r について

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^r}$$

をみたす既約分数 p/q が無数に存在する無理数, いわゆるリウーヴィル数だからである. リウーヴィル数全体の集合 L は,

$$L=\bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{q=m}^{\infty}\bigcup_{p\in\boldsymbol{Z}}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q^r},\ \frac{p}{q}+\frac{1}{q^r}\right)\setminus\boldsymbol{Q}$$

と表されるから, 稠密な G_δ 集合であり, f_1 や $f_{2+\epsilon}$ と同様の, 有理数 x に対して既約分母の負ベキ乗 q^{-r} を値とするような関数はいずれも, リウーヴィル数において微分不可能であることが, f_1 の微分不可能性の証明と同様にして示される.

リウーヴィル数とルベーグ測度やベールの類との関連について, 興味のある読者は文献 [1] を参照しなさい.

以上の議論から, 有理数のところでだけゼロでない値をとる関数の微分可能点の分布の具合を考えることが, 無理数のディオファントス近似を考えることに密接に関連していることがうかがわれるであろう. ノート [2] で与えた関数の例はここで述べた $f_{2+\epsilon}$ の微分可能性の議論をもとにして考案したものだ. また, このノートの最初に提示した定理の証明を次の節で述べるが, この証明はここでのリウーヴィル数についての議論にヒントを得たもので, 有理数の全体の代わりに不連続点の稠密可算集合, 既約分母の逆数の代わりにその不連続点での関数の振動量を用いて議論を展開する.

2 定理の証明

実関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が与えられたとする. ここで $\boldsymbol{R}$ と開区間 $(0,1)$ の間に微分同型写像が存在することから, f は有界で $0 < f(x) < 1$ となっているものと仮定してさしつかえない.

実数の集合 X における f の振動量とは,

$$\operatorname{osc}(f, X) = \sup\{\, |f(x) - f(y)| : x, y \in X \,\}$$

で定義される量 $\operatorname{osc}(f, X)$ である. 数直線上の点 a の近傍における f の振動量は, 近傍を狭めるに従って減少していく. その下限を f の a における振動量という:

$$\operatorname{osc}(f, a) = \lim_{h \downarrow 0} \operatorname{osc}(f, (a-h, a+h)).$$

あきらかに, f が a において連続であるためには $\operatorname{osc}(f, a) = 0$ であることが必要かつ十分である.

実数の集合 A, C, D を, それぞれ, f の不連続点全体の集合, f の連続点全体の集合, f の 微分可能点全体の集合としよう.

$$A = \{\, a \in \boldsymbol{R} : \operatorname{osc}(f, a) > 0 \,\};$$
$$C = \{\, a \in \boldsymbol{R} : \operatorname{osc}(f, a) = 0 \,\};$$
$$D = \{\, a \in \boldsymbol{R} : \lim_{x \to a} (f(x) - f(a))/(x-a) \text{ exists} \,\}.$$

A は F_σ 集合, その補集合 C は G_δ 集合である. D にはそのような単純な分類はなさそうであるが, $D \subset C$ であることはあきらかである. A と C はボレル集合でベールの性質を有するから, つぎの補題が成立している.

補題. 任意の開区間は, 次の条件をみたす開区間 I を含む: $I \cap A$ か $I \cap C$ のどちらか一方が (そして一方だけが) 疎集合である. □

ここで, $I \cap A$ が疎集合となるような開区間 I 全体の和集合を $\tilde{C}$ とし, また $I \cap C$ が疎集合となるような開区間 I 全体の和集合を $\tilde{A}$ としよう. $\tilde{A}$ と

$\tilde{C}$ は開集合で, 補題により, $\tilde{A} \cup \tilde{C}$ は稠密な開集合である. どんな開集合もそれに含まれる有理開区間の和集合であることから, $\tilde{A} \cap C$ と $A \cap \tilde{C}$ は可算個の疎集合の和集合となり, それ自体が疎集合である.

さて, $\tilde{A} \cap C$ が疎集合であることから, $\tilde{A} \cap D$ も疎集合である. $\tilde{A}$ にも $\tilde{C}$ にも入らない点の全体はいたるところ非稠密であるから, 定理を証明するには, 残る $\tilde{C} \cap D$ が疎集合であることを示せばよい.

仮定により, f の不連続点は数直線上に稠密に分布している. すなわち, A は $\boldsymbol{R}$ の任意の区間と交わる. したがって, $A \cap \tilde{C}$ は, 疎集合とはいえ $\tilde{C}$ において稠密ではあるから, そこから可算個の点 a_n をとってその全体 $\{\, a_n : n \in \omega \,\}$ が $\tilde{C}$ において稠密であるようにできる. $\{\, a_n : n \in \omega \,\}$ は開集合 $\tilde{C}$ において稠密であることから, 孤立点を持たないので, 任意の番号 m について $\{\, a_m : n \geq m \,\}$ もまた $\tilde{C}$ において稠密である.

各 a_n は f の不連続点であるから, f の a_n における振動量 $\mathrm{osc}(f, a_n)$ はゼロではない. そこで, a_n を中心とする幅 $2^{-i}\mathrm{osc}(f, a_n)$ の開区間の, m 以上の自然数 n 全部にわたる和集合を $G_{i,m}$ としよう:

$$G_{i,m} = \bigcup_{n \geq m} \left(a_n - \frac{\mathrm{osc}(f, a_n)}{2^{i+1}},\ a_n + \frac{\mathrm{osc}(f, a_n)}{2^{i+1}} \right).$$

あきらかに, $G_{i,m} \cap \tilde{C}$ は $\tilde{C}$ において稠密な開集合である. したがって, ベールのカテゴリー定理により, それらの共通部分

$$G_i = \bigcap_{m \in \omega} G_{i,m}$$

は $\tilde{C}$ において稠密な G_δ 集合である. それらすべての共通部分 $\bigcap_{i \in \omega} G_i$ も, $\tilde{C}$ において稠密な G_δ 集合である.

あとは, $\bigcap_{i \in \omega} G_i$ と D が共通要素を持たないことを示せばよい. それには, $\bigcap_{i \in \omega} G_i \cap C$ に属するすべての点において, f が微分不可能であることを示せばよい.

そこで, $\bigcap_{i \in \omega} G_i \cap C$ の任意の点 x が与えられたとする. すると, G_i の定義から, 各番号 i について 番号 n_i を

$$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots, \text{ かつ}$$
$$|a_{n_i} - x| < 2^{-(i+1)}\mathrm{osc}(f, a_{n_i})$$

となるようにとれる. 先に述べた f の有界性の仮定から $\mathrm{osc}(f, a_{n_i}) \leq 1$ であるから, i が大きくなるにしたがって a_{n_i} は x に近づく. そして x は f の連続点であるから, $f(a_{n_i})$ も $f(x)$ に近づくことになる.

いっぽう, $\mathrm{osc}(f, a_{n_i}) > 0$ であるから, a_{n_i} のいくらでも近くに, f の値が

a_{n_i} での値と大きく異なる点がとれる．より具体的にいえば，

$$|y_i - a_{n_i}| < \frac{|a_{n_i} - x|^2}{i+1}$$
$$|f(y_i) - f(a_{n_i})| > \frac{1}{3}\mathrm{osc}(f, a_{n_i})$$

となるように，y_i がとれる．あとでの計算の便宜のために

$$h_i = \frac{y_i - a_{n_i}}{(a_{n_i} - x)^2}, \qquad k_i = \frac{y_i - a_{n_i}}{a_{n_i} - x}$$

とおく．すると，$i \to \infty$ にともなって $h_i \to 0$ かつ $k_i \to 0$ となる．

さて，i が大きくなるにしたがって，a_{n_i} も y_i も x に近づいていくのだから，もしも f が x において微分可能であるならば，次の式で定義される δ_i:

$$\delta_i = \left| \frac{f(y_i) - f(x)}{y_i - x} - \frac{f(a_{n_i}) - f(x)}{a_{n_i} - x} \right|$$

は，$i \to \infty$ とともにゼロに近づくはずだが，ここではそうなっていない．したがって，f は x において微分可能でない．こうして，$\bigcap_{i\in\omega} G_i$ と D に共通の要素がないこと，したがって，D が疎集合であることが確かめられる．

以下は，δ_i がゼロに近づかないことの証明である．単純な計算により

$$\begin{aligned}
\delta_i &= \left| \frac{f(y_i)}{y_i - x} - \frac{f(a_{n_i})}{a_{n_i} - x} + \frac{(y_i - a_{n_i})f(x)}{(y_i - x)(a_{n_i} - x)} \right| \\
&= \left| \frac{f(y_i) - f(a_{n_i})}{a_{n_i} - x} - \frac{h_i}{k_i + 1}(f(y_i) - f(x)) \right| \\
&\geq \left| \frac{f(y_i) - f(a_{n_i})}{a_{n_i} - x} \right| - \left| \frac{h_i}{k_i + 1}(f(y_i) - f(x)) \right|
\end{aligned}$$

最後の式の第二項は $i \to \infty$ とともにゼロに近づく．いっぽう，第一項は n_i と y_i の取り方により，

$$\frac{|f(y_i) - f(a_{n_i})|}{|a_{n_i} - x|} > \frac{\frac{1}{3}\mathrm{osc}(f, a_{n_i})}{2^{-(i+1)}\mathrm{osc}(f, a_{n_i})} = \frac{2^{i+1}}{3}$$

となっている．したがって，$i \to \infty$ とともに $\delta_i \to +\infty$ である．□

参考文献

[1] John B. Oxtoby, **Measure and Category**, Springer-Verlag.

[2] 藤田 博司, “ほとんど至る所微分可能な不連続関数の構成,” 筆者の Web サイト[1]よりダウンロード可能

[3] 藤田 博司, “ほとんど至る所不連続で稠密集合上で微分可能な実関数の存在について,” 筆者の Web サイトよりダウンロード可能

[1]http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/%7Efujita/