ほとんど至る所不連続で稠密集合上で微分可能な実関数の存在について

藤田 博司

2006 年 9 月 29 日

藤田の 2006 年 9 月 28 日づけのノート [1] の続編として, ここでは次の定理を証明する.

定理. 実数の任意の疎集合 E に対して, 次のような実関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が存在する.

(1) f は上半連続関数 (したがってベールの第 1 級関数) である;

(2) f は E の各点において不連続である;

(3) 任意の区間は, f が微分可能となる点を無限個含む.

さらに, $\mathfrak{b} > \omega_1$ を仮定すれば, 条件 (3) は

(3′) 任意の区間は, f が微分可能となる点を不可算個含む.

と強められる. □

ここで $\mathfrak{b}$ とは ${}^\omega\omega$ の bounding number と呼ばれる不可算基数である. その定義は後ほど与える. この不可算基数が最小の不可算基数 ω_1 と一致しない ($\mathfrak{b} > \omega_1$) という仮説は, ZFC 集合論とは独立だが, たとえばマーティンの公理 MA_{ω_1} などから導かれる. この仮説のもとでは, [1] の定理と双対的な, 次の性質を持つ実関数が存在することになる.

定理の系. 仮説 $\mathfrak{b} > \omega_1$ のもとで, 次の三つの条件を満足する実関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が存在する.

(1*) f は上半連続関数 (したがってベールの第 1 級関数) である;

(2*) f はルベーグ測度の意味でほとんどすべての点において不連続である;

(3*) 任意の区間は, f が微分可能となる点を不可算個含む. □

1 刻々と迫る閉集合の群れまでの距離を測ること

ここでは次の補題を証明する．

補題． 実数のいたるところ非稠密な閉集合の可算列 $\{F_n\}_{n\in\omega}$ が与えられているとする．その和の補集合から，任意に可算個の点 $y_k \in \boldsymbol{R} \setminus \bigcup_{n\in\omega} F_n$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ をとったとする．このとき，

$$\forall k \in \omega, \forall^\infty n \ [\,\mathrm{distance}(y_k, F_n) \geq r_n\,]$$

をみたすような正の数の列 $\{r_n\}_{n\in\omega}$ が存在する．（ここで $\forall^\infty n\,[\cdots]$ とは，$\exists m \in \omega \forall n \geq m\,[\cdots]$ の略記[1]で，“有限個の例外を除くすべての n について” を意味する.)

【証明】 各 k ごとに，$\alpha_k \in {}^\omega\omega$ を，

$$\forall n \in \omega,\ \left[\ \frac{1}{\alpha_k(n)+1} \leq \mathrm{distance}(y_k, F_n)\ \right]$$

となるようにとろう．次に，$\beta \in {}^\omega\omega$ を，

$$\beta(j) = \max\{\,\alpha_k(n) : n \leq j,\ k \leq j\,\} \qquad (j \in \omega)$$

と定めよう．すると，$n \geq k$ のとき $\beta(n) \geq \alpha_k(n)$ である．したがって，

$$\forall n \geq k,\ \left[\ \frac{1}{\beta(n)+1} \leq \mathrm{distance}(y_k, F_n)\ \right]$$

が成立する．そこで，$r_n = (\beta(n)+1)^{-1}$ とすればよい．□

この補題の証明の論法のようにすれば，任意に与えられた ${}^\omega\omega$ の <u>可算</u> 部分集合 A に対して，

$$\forall \alpha \in A, \forall^\infty n,\ [\,\beta(n) \geq \alpha(n)\,] \qquad (*)$$

をみたす，${}^\omega\omega$ の要素 β を見いだすことができる．いっぽう，もしも A が ${}^\omega\omega$ の <u>不可算</u> 部分集合だったら，このような β が存在するとは限らない．条件 $(*)$ をみたす β が存在するような，${}^\omega\omega$ の部分集合 A のことを，**σ-有界な** 集合といい，β を A の **σ-上界** という．基数 $\mathfrak{b}$ は，σ-有界 <u>でない</u> ${}^\omega\omega$ の部分集合の可能な最小濃度と定義される．あきらかに $\omega_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$ だが，4 通りの大小関係

$$\omega_1 = \mathfrak{b} = \mathfrak{c},$$
$$\omega_1 = \mathfrak{b} < \mathfrak{c},$$
$$\omega_1 < \mathfrak{b} = \mathfrak{c},$$
$$\omega_1 < \mathfrak{b} < \mathfrak{c}$$

[1]ただし形式上，変数 m はそれ以後の $[\cdots]$ に含まれてはいけない

は, いずれも ZFC 集合論と両立することがわかっている. 補題の証明では, 可算個の α_k の σ-上界として β をとったが, $\mathfrak{b}$ 個未満の α についてならば, σ-上界が必ず存在するのだから, $D \subset \boldsymbol{R} \setminus \bigcup_{n\in\omega} F_n$ かつ $|D| < \mathfrak{b}$ をみたす D に対しては,

$$\forall y \in D, \forall^\infty n, \ [\,\mathrm{distance}(y, F_n) \geq r_n\,]$$

をみたす正の数の列 $\{r_n\}_{n\in\omega}$ がとれることがわかる.

2　関数 f の構成

さて, E を与えられた疎集合とし, いたるところ非稠密な閉集合の列

$$F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n \subset \cdots$$

を, $E \subset \bigcup_{n\in\omega} F_n$ となるようにとろう. $D \subset \boldsymbol{R} \setminus \bigcup_{n\in\omega} F_n$ を, 稠密な可算集合とする. $\bigcup_{n\in\omega} F_n$ も疎集合だから, そのような D は必ずとれる. 補題により,

$$\forall y \in D, \forall^\infty n, \ [\,\mathrm{distance}(y, F_n) \geq r_n\,]$$

をみたすような正の数の列 $\{r_n\}_{n\in\omega}$ が存在する. これに対して, 別の正の数の列 $\{s_n\}_{n\in\omega}$ を,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{r_N} \sum_{n=N}^{\infty} s_n = 0$$

をみたすようにとる.

以上の準備のもとで, $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \chi_{F_n}(x)$$

によって定義すれば, f は $\bigcup_{n\in\omega} F_n$ の各点で不連続, その補集合の各点で連続であるような上半連続関数で, そのうえ D の各点で微分可能となることが, [1] の論法をなぞることで証明できる.

さらに, 仮説 $\mathfrak{b} > \omega_1$ のもとで, D をすべての開区間と濃度 ω_1 で交わる $\boldsymbol{R} \setminus \bigcup_{n\in\omega} F_n$ の部分集合としよう. 前節の後半に考察したとおり, この場合も,

$$\forall y \in D, \forall^\infty n, \ [\,\mathrm{distance}(y, F_n) \geq r_n\,]$$

をみたす正の数の列 $\{r_n\}_{n\in\omega}$ は存在する. この $\{r_n\}_{n\in\omega}$ を用いて同様の構成で f を作れば, f は D の各点で微分可能, したがって, 任意の区間が f の微分可能点を不可算個含むことになる.

最後に, 系の成立することは, 補集合のルベーグ測度がゼロであるような疎集合の存在からただちにわかる.

3 それならこれはどうだ!!

任意の疎集合に対して, その各点で不連続だが, 微分可能点を稠密に持つような実関数が構成できた. しかし, 微分可能点が不可算個存在することを示すには, ZFC と独立な仮説 $\mathfrak{b} > \omega_1$ を必要とした. この仮説は除去できるだろうか?

問題. 次のような集合 E の存在は ZFC 集合論と両立するか? E は実数の疎集合で, その各点で不連続であるような実関数は, 微分可能点を高々可算個しかもち得ない. □

参考文献

[1] 藤田 博司, "ほとんど至る所微分可能な不連続関数の構成," 筆者の Web サイト[2]よりダウンロード可能

[2] http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/%7Efujita/