ほとんど至る所微分可能な不連続関数の構成

藤田 博司

2006 年 9 月 28 日

ここで証明したいのは次のことである.

定理. 次の条件を満たす実関数 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ が存在する.

(1) f はベールの第 1 級関数, すなわち各点収束する連続関数列の極限関数である;

(2) 実数の任意の区間は f の不連続点を不可算個含む;

(3) f はルベーグ測度の意味でほとんど至るところ微分可能である.

1 実数の 3 進展開

自然数 n に対して, 実数の集合 F_n を, 小数部分の 3 進展開の n 桁め以降に数字 1 があらわれない (ように展開できる) 実数の全体の集合, と定義しよう. これらの F_n の和を $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ としよう. E は, 小数部分の 3 進展開に数字 1 が有限回しかあらわれないような実数の全体である.

F_n は孤立点のない閉集合で, 長さが 3^{-n} を超える区間は F_n と必ず交わる. そこで, E は任意の区間と不可算に交わる. また, 任意の実数は E に属する 2 つの数の和になる. このような観点から言えば, E は小さな集合ではないが, ルベーグ測度がゼロの疎集合だから, けっして大きな集合とも言えない.

別の観点から F_n と E を見てみよう. カントールの 3 進集合を C と書こう. これは, 閉区間 $[0, 1]$ に属する実数 x のうち

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{3^i} \qquad (d_i \in \{0, 2\})$$

のように, 3 進展開に数字 1 があらわれない (ように展開できる) ようなものの全体の集合である. F_1 は, 小数部分がこの C に属するような実数の全体だ

から, $F_1 = C + \boldsymbol{Z}$ と書ける. F_2 は, 3 倍すると F_1 に入るような実数の全体なので $F_2 = 3^{-1}F_1$ だが, これはまた $F_2 = C + 3^{-1}\boldsymbol{Z}$ と書ける. 以下同様に,

$$F_n = 3^{-(n-1)}F_1 = C + 3^{-(n-1)}\boldsymbol{Z}$$

したがって,

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} F_1 = C + \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} \boldsymbol{Z}$$

と表現できる.

ルベーグ測度の意味でほとんどすべての実数は, E の補集合に属する. もっと詳しく言うと次のようになる. 実数 x の小数部分を 3 進展開して,

$$x = [x] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{3^i} \qquad (d_i \in \{0, 1, 2\})$$

と展開したときに, 数字 d ($d \in \{0, 1, 2\}$) の立つ桁全体の集合を $A_d(x)$ と書こう:

$$A_d(x) = \{\, i \in \boldsymbol{N} : d_i = d \,\} \qquad (d \in \{0, 1, 2\}).$$

ただし, 3 進展開が一意的でない可算無限個の実数 (つまり 3 進有限小数) が存在する. もちろん本当はそのような数をどう扱うかきちんと決めておくべきなのだが, あとの議論に関係がないので, あっさり省略する.

いわゆる “大数の法則” の一例として, ルベーグ測度の意味でほとんどすべての実数 x について, 三つの集合 $A_d(x)$ がいずれも漸近密度 1/3 となる.

2 漸近密度とは?

自然数の集合 A に対して, n 以下の自然数で A に属するものの個数を n で割った数の, $n \to \infty$ にともなう極限値が存在するとき, それを A の漸近密度といい, $D(A)$ と書く:

$$D(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{\#(A \cap \{1, \ldots, n\})}{n}.$$

これはもちろん, 存在しないこともある.

自然数の無限集合 A の上昇列による数え上げを

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \cdots$$

としよう. A の漸近密度が存在するならば, このとき

$$D(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{\alpha_n}$$

が成立する. もしも $D(A) > 0$ だったら, 任意の正の数 ε (ただし $0 < \varepsilon < 1$) に対して, 有限個の例外を除くすべての n で

$$(1-\varepsilon)D(A) \le \frac{n}{\alpha_n} \le (1+\varepsilon)D(A)$$

が成立する. 左側の不等式を変形すると,

$$n \le \alpha_n \le \frac{n}{(1-\varepsilon)D(A)}$$

が, 有限個の例外を除くすべての n で成立することがわかる. したがって $D(A) > 0$ であれば, α_n の増大の速さは n の一次式の程度である.

3 迫りくるカントール集合の群れからいかに距離をとるか

ほとんどすべての実数 x について,

$$D(A_0(x)) = D(A_1(x)) = D(A_2(x)) = \frac{1}{3}$$

となるのであった. この条件を満たす実数 x 全体の集合を P とする. $\boldsymbol{R} \setminus P$ は, E を含むルベーグ零集合である.

さて, 次の補題が定理の証明の鍵となる.

補題. F_n を第 1 節で定義されたものとする. 次の条件を満たす正の数 r が存在する: 集合 P に属する任意の数 x について, 高々有限個の例外を除くすべての番号 n で不等式

$$r^n \le \mathrm{distance}(x, F_n) := \inf_{y \in F_n} |x - y|$$

が成立する.

【証明】 そのような r を求めるために x の 3 進展開をもちいて F_n と x との距離を評価しよう. $x \in P$ なら, x の 3 進展開は一意的である:

$$x = [x] + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{3^i} \qquad (d_i \in \{0, 1, 2\}).$$

ここで各集合 F_n は整数を法として実数直線全体に周期的に広がっているのだから, 話を簡単にするために $[x] = 0$ つまり $0 < x < 1$ と仮定することは許されるだろう. この $\{d_i\}_{i \in \boldsymbol{N}}$ を用いれば, x と F_n との最短距離を与える数 x_n を求めることができる. まず, 自然数 i_n, j_n, k_n を次のように定める.

(a) $i \ge n$ かつ $d_i = 1$ となる最小の i を i_n とする;

(b) $j > i_n$ かつ $d_j \ne 1$ となる最小の j を j_n とする;

(c) $k > j_n$ かつ $d_k \neq d_{j_n}$ となる最小の k を k_n とする.

三つの数字が x の 3 進展開にいずれも無限回出てくるので, i_n, j_n, k_n はすべての n に対してきちんと定まることに注意しよう. そして, x_n は 3 進展開

$$x_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_{n,i}}{3^i}$$

で与えられる数で, ここで $d_{n,i}$ は次の手順で定められる.

(d) $i < i_n$ について $d_{n,i} = d_i$;

(e) $d_{j_n} = 0$ ならば $d_{n,i_n} = 0$ で, $i > i_n$ については $d_{n,i} = 2$;

(f) $d_{j_n} = 2$ ならば $d_{n,i_n} = 2$ で, $i > i_n$ については $d_{n,i} = 0$.

これは何をしているのかというと, x を含む $\boldsymbol{R} \setminus F_n$ の連結成分 (開区間) の中で, x が左半分に落ちれば x_n をこの区間の左端点, 右半分に落ちれば x_n をこの区間の右端点と定めていることになる. $\boldsymbol{R} \setminus F_n$ の各連結成分の中点を 3 進展開すると, ある桁以降ずっと 1 が続くから, P に属する数 x が連結成分の中点になることはない.

そこで, x と x_n の距離を評価することにする. 二つの場合 (e) と (f) のそれぞれの例を考えよう. x の 3 進展開の n 桁め以降が

$$0021100210100122001\ldots$$

と続くものとすると, $i_n = n+3$, $j_n = n+5$, $k_n = n+7$ となる. いま $d_{j_n} = 0$ なので, x_n の 3 進展開の n 桁め以降は,

$$0020222222222222222\ldots$$

ということになる (n 桁めより前は x と同じ). これは

$$0021000000000000000\ldots$$

という 3 進有限小数と同じ数を表しており, この場合は x と x_n は $n+4$ 桁めが異なる数になるので, $x > x_n + 3^{-(n+4)}$ ということになる. もう一つ (f) の場合の例として, x の 3 進展開の n 桁め以降が

$$00212222222222222000001111\ldots$$

と続くなら, $i_n = n+3$, $j_n = n+4$, $k_n = n+17$ となる. このとき x_n は

$$00220000000000000000000000\ldots$$

であり, x にずいぶんと近くなるが, $x_n - x$ の 3 進展開は n 桁め以降が

$$00000000000000000222221111\ldots$$

で, $n+17$ 桁めがゼロでない．この場合は, $x < x_n - 3^{-(n+17)}$ である．

一般には, x_n の 3 進展開は i_n 桁めより前は x と一致し, i_n 桁め以降は異なる展開となる．ここで運悪く, x の i_n+1 桁め以降, 0 ばかりあるいは 2 ばかりが長く続いたとしたら, それだけ x_n は x に近い数になるわけだが, それでも, k_n 桁めには別の数字があらわれるから, x_n と x の差 $|x-x_n|$ の 3 進展開は, 遅くとも k_n 桁めにはゼロでなくなる．そこで,

$$\mathrm{distance}(x, F_n) = |x - x_n| \geq 3^{-k_n}$$

が成立することがわかる．

そこで次には, k_n の増大の速さを評価する．

前節で定義した集合 $A_d(x)$ $(d \in \{0,1,2\})$ を考える．これらの集合の要素を増大列で数え上げて,

$$\begin{aligned}
A_0(x):&\ \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots \\
A_1(x):&\ \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \dots \\
A_2(x):&\ \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \dots
\end{aligned}$$

としよう．これらがいずれも漸近密度 1/3 であることから, 1 未満の正の数 ε を固定すると, 十分大きなすべての番号 n について,

$$n \leq \min(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) < \max(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \leq \frac{3n}{1-\varepsilon}$$

が成立する．

さて, i_n, j_n, k_n の定義から,

$$\begin{gathered}
n \leq i_n \leq \beta_n, \\
i_n < j_n \leq \min(\alpha_{i_n}, \gamma_{i_n}), \\
d_{j_n} = 0 \implies j_n < k_n \leq \min(\beta_{j_n}, \gamma_{j_n}), \\
d_{j_n} = 2 \implies j_n < k_n \leq \min(\beta_{j_n}, \alpha_{j_n})
\end{gathered}$$

となるから,

$$\begin{gathered}
n \leq i_n \leq \frac{3n}{1-\varepsilon}, \\
i_n < j_n \leq \frac{3i_n}{1-\varepsilon} \leq \frac{9n}{(1-\varepsilon)^2}, \\
j_n < k_n \leq \frac{3j_n}{1-\varepsilon} \leq \frac{27n}{(1-\varepsilon)^3}
\end{gathered}$$

となる．そこで, $\varepsilon < 1 - 3/\sqrt[3]{30}$ としておけば, 十分大きなすべての n で

$$k_n \leq 30n$$

が成立する．

以上の考察から, 補題は $r = 3^{-30}$ とすれば成立する．□

4　関数 f の構成

ようやく定理の証明．ここからは簡単だ．第 1 節で定義した F_n と前節の補題のような r を考える．補題の証明によると，$r = 3^{-30}$ でよかった．ここで s を $0 < s < r$ をみたす任意の数，たとえば $r/2$ として，関数 f は

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n \chi_{F_n}(x)$$

と定義される．$\chi_{F_n}(x)$ は F_n の特徴関数で，$x \in F_n$ かそうでないかに応じて値 1 か 0 をとる．

集合 F_n は閉集合だから，χ_{F_n} は上半連続で，そのような関数に正の数を掛けて足し合わせて上限をとった f も上半連続であり，したがってベールの第 1 級関数である．

定義から明らかに，$x \in E$ なら $f(x) > 0$ であり，また $x \notin E$ なら $f(x) = 0$ である．E も $\boldsymbol{R} \setminus E$ も稠密で，どちらも任意の区間と不可算に交わる．$x \in E$ なら，$f(x) > 0$ でありながら，いくらでも近くに f の零点があるのだから，f は x において不連続である．つまり，f の不連続点は任意の区間に不可算個含まれている．各 F_n が閉集合であることから，$\boldsymbol{R} \setminus E$ の点は f の連続点である．

さて，P を第 2 節で定義したとおり，小数部分の 3 進展開が三つの数字を漸近的に均等に含むような実数全体の集合とする．前の節の補題により，$x \in P$ ならば，有限個の例外を除くほとんどすべての n について不等式

$$r^n \leq \mathrm{distance}(x, F_n)$$

が成立する．このことをもちいて，f がそのような x において微分可能であることを証明しよう．

点 x に近づく変量 y を考えよう．y が $\boldsymbol{R} \setminus E$ に属するなら，$f(y) = 0$ だから $(f(y) - f(x))/(x - y) = 0$ である．以後，$y \in E$ としよう．便宜上 $F_0 = \emptyset$ とすると，$y \in F_{N+1} \setminus F_N$ となる唯一の番号 $N \geq 0$ が y に応じて定まり，しかも y が x に近づくにつれて N は大きくなる．したがって，y を x に十分近くとって N が十分大きくなるようにすると，

$$|y - x| \geq \mathrm{distance}(x, F_{N+1}) \geq r^{N+1}$$

となる．このとき，$f(y) = \sum_{n \geq N+1} s^n = s^{N+1}/(1 - s)$ だから，

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq \frac{1}{r^{N+1}} \cdot \frac{s^{N+1}}{1 - s} = \left(\frac{s}{r} \right)^{N+1} \cdot \frac{1}{1 - s}$$

で，これは y が x に近づくにつれてゼロに近づく．これを，$y \in \boldsymbol{R} \setminus E$ の場合とあわせると，y が x に近づくにつれて，$(f(y) - f(x))/(y - x)$ がゼロに近づくことがわかる．ゆえに，f は x において微分可能で $f'(x) = 0$ である．

5 おわりに

このような f が存在するかという問題は, 藤田が名古屋大学大学院の修士課程の学生だった頃に, 米澤佳己さん (現在, 豊田工業高等専門学校教授) から伝え聞いたものである. 先行研究があるかどうかについては, いまのところ知らないが, あっても不思議はない.

聞くところによると, 当時の名古屋大学教養部で開かれた数学コンクールに学生から提出された論文に, 不連続点と微分可能な点をいずれも不可算かつ稠密にもつような実関数の例が述べられていたが, 残念ながらその論文には証明の誤りがあったという. その後, ときどき思い出しては考えていた. 昨日ひさしぶりに思い出して, 実数の小数展開の数字の分布に注目することによって解けることがわかった次第である. かれこれ, もう 18 年になる.

あのときこの “定理” を主張した学生さんが誰だったかは知らないが, いまではどこかで立派な (俺なんぞよりよほど立派な) 数学者になっているにちがいない.