Generic に添加された Lusin 集合

藤田 博司 (Hiroshi Fujita)

2004 年 10 月 6 日

1 Lusin 集合と Sierpiǹski 集合

定義 1. 疎集合イデアルと Lebesgue 零集合イデアルを, それぞれ $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ で表す. いかなる疎集合とも高々可算な交わりしかもたないような, 実数の不可算集合のことを **Lusin 集合**という. いかなる零集合とも高々可算な交わりしかもたないような, 実数の不可算集合のことを **Sierpiǹski 集合**という. □

注意 2. 連続体仮説が成立すれば, Lusin 集合および Sierpiǹski 集合が存在する. オリジナルの定義では, これらの集合は連続体の濃度をもつことを要請されていたが, 後の議論の便宜のため, ここでは不可算であることにまで条件を緩めてある. □

定義 3. 数直線上のイデアル I に対して,

- $\mathtt{add}(I)$ とは和集合が I に属さないような I の部分族の最小濃度.
- $\mathtt{non}(I)$ とは I に属さない集合の最小濃度.
- $\mathtt{cov}(I)$ とは和集合が数直線全体となるような I の部分族の最小濃度.
- $\mathtt{cof}(I)$ とは I において包含関係の意味で共終な部分族の最小濃度. □

注意 4. (Cichon 図) 以下の図式は, 矢印の元にある基数が先にある基数を超えないことが, ZFC で証明できることを意味する:

$$\begin{tikzcd}
\mathtt{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathtt{non}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathtt{cof}(\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathtt{cof}(\mathcal{N}) \\
 & \mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[u] & \\
\mathtt{add}(\mathcal{N}) \arrow[r] \arrow[uu] & \mathtt{add}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathtt{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathtt{non}(\mathcal{N}) \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

ただし, $\mathfrak{b}$ および $\mathfrak{d}$ はそれぞれ, ω^ω の “eventual dominance” 順序 $\leq^*$ に関する非有界集合と共終集合の最小濃度をあらわす. □

この図の下段右と上段左の矢印は, Rothberger の定理として知られている. 以下の議論で重要であるので, 次にこれを証明する.

定理 5. (Rothberger の定理)

$$\texttt{cov}(\mathcal{M}) \leq \texttt{non}(\mathcal{N}). \tag{1}$$

$$\texttt{cov}(\mathcal{N}) \leq \texttt{non}(\mathcal{M}). \tag{2}$$

[証明] (1) と (2) の証明はほとんど同じなので, (1) だけ証明する. 補集合が Lebesgue 零集合であるような疎集合が存在する. A をそのような疎集合の一つとする. Y を, Lebesgue 零集合でない任意の集合とする. このとき, $\boldsymbol{R} = \bigcup_{y\in Y}(A+y)$ となることを証明する. x を任意の実数とするとき, $A+x$ の補集合は Lebesgue 零集合であるから Y を含むことはない. したがって $(A+x)\cap Y \neq \emptyset$ である. そこでこの共通部分の要素 y をとると, $-x+y\in A$ したがって $x\in A+y$ となる. こうして $\boldsymbol{R} = \bigcup_{y\in Y}(A+y)$ となり, $\boldsymbol{R}$ を $|Y|$ 個の疎集合の和で表すことができる. これは $\texttt{cov}(\mathcal{M}) \leq |Y|$ を意味する. □

補題 6. Lusin 集合 X が存在すれば $\texttt{non}(\mathcal{M}) = \omega_1$ かつ $|X| \leq \texttt{cov}(\mathcal{M})$ である. Sierpiǹski 集合 Y が存在すれば $\texttt{non}(\mathcal{N}) = \omega_1$ かつ $|Y| \leq \texttt{cov}(\mathcal{N})$ である. Lusin 集合 X と Sierpiǹski 集合 Y が存在すれば, $|X| = |Y| = \omega_1$ である. □

2 Generic な Lusin 集合の添加

定義 7. 半順序 $\mathbb{L}$ を次のように定義する. $\mathbb{L}$ の要素 p は, 実数の可算集合 A_p と, 疎集合であるような Borel 集合 M_p の対 $p = \langle A_p, M_p\rangle$ である. $p \leq q$ となるのは,

$$A_p \supseteq A_q \ \&\ M_p \supseteq M_q \ \&\ (A_p \setminus A_q)\cap M_q = \emptyset$$

となるときである. 上記の定義で “疎集合 M_p” を “Lebesgue 零集合 N_p” に置き換えて得られる半順序を $\mathbb{S}$ とする. □

$\mathbb{L}$ および $\mathbb{S}$ は, generic オブジェクトとしてそれぞれ Lusin 集合および Sierpiǹski 集合を添加するために構想された半順序である. 実際, $\mathcal{G}$ を $\mathbb{L}$ の generic フィルターとするとき,

$$X = \bigcup\{\, A_p \,:\, p\in\mathcal{G}\,\}$$

とおけば, X は Lusin 集合となる. また, $\mathbb{S}$ の generic フィルター $\mathcal{G}$ から同様の構成で集合 Y を作ると, それは Sierpiǹski 集合である.

定義 8. 上記の構成に対応した X の自然な $\mathbb{L}$-名前を $\dot{X}$ とする．同様に, Y の自然な $\mathbb{S}$-名前を $\dot{Y}$ とする． □

補題 9. $\mathbb{L}$ および $\mathbb{S}$ は, 次の意味で weakly homogeneous である．たとえば $\mathbb{L}$ について言えば, 任意の 2 要素 p と q に対して, ある順序自己同型写像 $h : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ を $h(p)$ と q が両立可能である (共通下界をもつ) ようにとれる． □

この補題の証明には, さらに次の補題が必要になる．

補題 10. 数直線 $\boldsymbol{R}$ の二つの疎集合 M_1 と M_2 に対して, 次の性質を持つ写像 $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ を構成することができる．$f[M_1] \cap M_2 = \emptyset$, かつ f は疎集合イデアル $\mathcal{M}$ を (両方向に) 保つ Borel 自己同型写像である．疎集合の代わりに Lebesgue 零集合についても同様のことがいえる．

[**証明**] 数直線 $\boldsymbol{R}$ を次の条件を満たす集合 A_i, B_i, C_i $(i = 1, 2)$ に分割できる．(1) A_i は Baire の無理数空間 ω^ω と位相同型で $\boldsymbol{R}$ において稠密な G_δ 集合である．(2) B_i および C_i は疎集合であるような不可算な F_σ 集合である．(3) $M_i \subseteq B_i$ である．(4) A_i, B_i, C_i のどの二つも互いに交わりがない．

これらの集合に対して, $\alpha : A_1 \to A_2$ を (任意の) 位相同型写像とし, $\beta : B_1 \to C_2$ および $\gamma : C_1 \to B_2$ を (任意の)Borel 同型写像であるものとする．以上の準備のもとで $f = \alpha \cup \beta \cup \gamma$ とおけば, この f が求めるものである． □

[**補題 9 の証明**] 疎集合 $A_p \cup M_p$ と $A_q \cup M_q$ に対して, 補題 10 にいうような Borel 同型写像 f を考える．すると, f により $\mathbb{L}$ の順序自己同型写像 $h : \langle A_s, M_s \rangle \mapsto \langle f[A_s], f[M_s] \rangle$ が誘導される．$r = \langle A_{h(p)} \cup A_q, M_{h(p)} \cup M_q \rangle$ によって r を定めれば, $h(p)$ と q の共通下界となる． □

注意 11. $\mathbb{L}$ が weakly homogeneous であるということから, ground model に依存したパラメータを含まないような集合論のセンテンス φ (たとえば CH など) については, かならず $\mathbb{L} \Vdash \varphi$ あるいは $\mathbb{L} \Vdash \neg\varphi$ となる． □

定義 12. 次の半順序 $\mathbb{W}$ を, **Anti-Cohen 半順序**という．$\mathbb{W}$ の要素 p は, 可算順序数 $\mathrm{dom}(p)$ から数直線 $\boldsymbol{R}$ への写像である．$p \leq q$ は, $\mathrm{dom}(p) \geq \mathrm{dom}(q)$ かつ $p \restriction \mathrm{dom}(q) = q$ となることを意味する． □

補題 13. $\mathbb{W}$ は σ-closed で, $\mathbb{W} \Vdash \mathrm{CH}$． □

補題 14. Anti-Cohen 半順序 $\mathbb{W}$ は weakly homogeneous である．

[**証明**] $\mathbb{W}$ の 2 要素, p と q が与えられたとする．各可算順序数 i について, f_i を $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}$ の上への 1 対 1 写像とし, とくに $i < \min\{\mathrm{dom}(p), \mathrm{dom}(q)\}$ のときは $f_i(p(i)) = q(i)$ となるように選んでおく．$\mathbb{W}$ の任意の要素 s に

ついて, $h(s)(i) = f_i(s(i))$ $(i \in \mathrm{dom}(s))$ で定まる $h(s)$ を対応させることによって写像 $h : \mathbb{W} \to \mathbb{W}$ を定義すれば, これは順序自己同型写像であり, $\mathrm{dom}(p) \geq \mathrm{dom}(q)$ あるいは $\mathrm{dom}(p) \leq \mathrm{dom}(q)$ の各々の場合に応じて, $h(p) \leq q$ あるいは $h(p) \geq q$ となる. □

補題 15. 数直線 $\boldsymbol{R}$ を次のような集合族 $\{ Z_r : r \in \boldsymbol{R} \}$ の和集合に分割できる. 各 Z_r は疎集合でも Lebesgue 零集合でもなく, また $r \neq s$ ならば $Z_r \cap Z_s = \emptyset$ である.

[証明] まず数直線の疎集合 M で, 補集合 N $(= \boldsymbol{R} \setminus M)$ が Lebesgue 零集合であるようなものをとっておく. 疎集合であるような Borel 集合はちょうど $\mathfrak{c}$ 個あるので, それらを X_β $(\beta < \mathfrak{c})$ と並べておく. 同様に, Lebesgue 零集合であるような Borel 集合は $\mathfrak{c}$ 個あるので, それらを Y_β $(\beta < \mathfrak{c})$ と並べておく.

連続体濃度 $\mathfrak{c}$ (の始数) までの超限再帰によって, 実数 $x_{\alpha\beta}$ と $y_{\alpha\beta}$ を $\alpha \leq \beta < \mathfrak{c}$ なる α, β に対してとってゆく. 再帰の第 β 番目の段階では, $N \setminus X_\beta$ (これは必ず連続体の濃度をもつ) から, β 以下のすべての順序数 α に対する実数 $x_{\alpha\beta}$ を, これまでの $x_{\alpha'\beta'}$ として選ばれた実数のどれとも重複しないように, また, 異なる α に対応する実数が互いに重複しないようにとる. 同様に, $M \setminus Y_\beta$ から, 実数 $y_{\alpha\beta}$ を, それ以前の選択および今回の他の選択と重複しないようにとる.

こうして $\alpha \leq \beta < \mathfrak{c}$ なるすべての α, β にして $x_{\alpha\beta}$ と $y_{\alpha\beta}$ が選ばれたら, $Z_\alpha = \{ x_{\alpha\beta}, y_{\alpha\beta} \ : \ \alpha \leq \beta < \mathfrak{c}\}$ とおく. この Z_α は疎集合ではない. もしも疎集合であれば, ある X_β に含まれるはずだが, $x_{\alpha\beta}$ の取り方を考えると, そのときは $\beta < \alpha$ でなければならない. したがってそのような β は $\mathfrak{c}$ 個より真に少ない. ところが, どの X_β も連続濃度個の相異なる $X_{\beta'}$ に含まれるはずであるから, これは不合理である. したがって, Z_α は疎集合ではありえない. 同様に Z_α は Lebesgue 零集合でもありえない.

あとは $\mathfrak{c}$ と $\boldsymbol{R}$ の間に存在する 1 対 1 写像をもちいて, 添え字をつけかえればよい. □

補題 16.

(1) $$\mathbb{L} \Vdash |\dot{X}| = \mathfrak{c}.$$

(2) $$\mathbb{S} \Vdash |\dot{Y}| = \mathfrak{c}.$$

[証明] 補題 15 により, ground model において, $\boldsymbol{R}$ の要素 r と一対一に対応して, 互いに交わりのない非-疎集合 Z_r がとれる. $\mathbb{L}$ による generic 拡大は, ground model にない実数を添加することはないので, 疎集合であるような Borel 集合が新たに添加されることもなく, したがって Z_r は $\mathbb{L}$-generic 拡大においても, 依然として非-疎集合である. さて, $\mathbb{L}$ の部分集合 $\mathcal{D}_r$ を

$$\mathcal{D}_r = \{ p \in \mathbb{L} \ : \ A_p \cap Z_r \neq \emptyset \}$$

によって定めよう．Z_r が非-疎集合であっていかなる M_p にも含まれることがないので，この $\mathcal{D}_r$ は $\mathbb{L}$-稠密集合である．したがって，$\mathbb{L}$-generic な Lusin 集合 X は，Z_r と交わりを持つ．Z_r たちどうしは互いに交わりがないので，実数 r に $X \cap Z_r$ の要素を対応させる写像は $\boldsymbol{R}$ から X の中への 1 対 1 写像である．こうして $|X| = \mathfrak{c}$ となることがわかる．$\mathbb{S}$-generic な Sierpiǹski 集合 Y についても同様である． □

注意 17. この補題の論法により，$\mathbb{L}$-generic な Lusin 集合 X は，ground model に存在した非-疎集合 (それは generic 拡大においてもやはり非-疎集合である) すべてと交わることがわかる．もちろん，X が generic 拡大におけるすべての非-疎集合と交わるといっているわけではない．それは X の補集合を考えてみればすぐわかる． □

補題 18. 実数を付け加えない generic 拡大にさいして，次のもの (概念および事態) は保存される．

(1) 集合 $\boldsymbol{R}$.

(2) 基数 ω_1.

(3) 等式 $\texttt{non}(M) = \omega_1$ (が成立しているという事態.)

(4) 等式 $\texttt{non}(N) = \omega_1$ (が成立しているという事態.)

(5) 実数の集合 X が Lusin 集合であるという事態.

(6) 実数の集合 Y が Sierpiǹski 集合であるという事態.

(7) 連続体仮説 CH が成立しているという事態. □

注意 19. 上記の (3), (4), (7) にいう事態の否定は，実数を付け加えない generic 拡大で保存されるとは限らない．実際，anti-Cohen 半順序 $\mathbb{W}$ は，実数を付け加えずに CH を force するので，(3) および (4) をも force する．

定理 20. Ground model において $\texttt{non}(\mathcal{N}) = \omega_1$ であれば，$\mathbb{L} \Vdash$ CH となる．また，ground model において $\texttt{non}(\mathcal{M}) = \omega_1$ であれば，$\mathbb{S} \Vdash$ CH となる．

[**証明**] 定理 5, 補題 6, 補題 18 による． □

Ground model における CH を，実数を付け加えずに破ることはできないのは当然のことである．いっぽう，この定理 20 によれば，ground model で $\neg$CH が成立していながら $\mathbb{L}$-generic 拡大で CH が成立するということも，ありうることになる．では，$\mathbb{L}$-generic 拡大で $\neg$CH が成立するような ground model はあるだろうか? あるとしたら，それは実数の集合論の観点からみて，どのような世界だろうか.