実数の集合論に関する覚え書き

藤田 博司

起稿: 2009 年 11 月 6 日
最終更新: 2009 年 11 月 9 日

実数の集合論あるいは記述集合論に関連して気づいたことをどんどん書いていきます. あくまで自分用に書き記しているだけで, 系統だった論述にはなっていません. 文献リストを作ってリファレンスをつけて... というような作業もサボっています.

1 実数ゲームに関する決定公理 $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ の二つの表現の同値性

2009 年 11 月 6 日

ふたりのプレーヤーが対局する次のようなゲームを考える.

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\text{先手} & a_0 & & & & a_2 & & & & \cdots \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
\text{後手} & & & a_1 & & & & a_3 & & \cdots
\end{array}
$$

ここで, a_i はどれも実数であるものとする. 対局は無限に続くが, すべての自然数 n に対する a_n を選び切った結果として無限の実数列 $\bar{a} = \langle a_n \mid n < \omega \rangle \in {}^{\omega}\mathbb{R}$ が得られる. そこでこの対局の勝敗の判定は, あらかじめ定められた実数列の集合 $A \subseteq {}^{<\omega}\mathbb{R}$ に $\bar{a}$ が属すれば先手の勝ち, そうでなければ後手の勝ちとする. 「集合 $A \subseteq {}^{\omega}\mathbb{R}$ のとり方によらず, このタイプのゲームにおいては, いつでも先手または後手に必勝策がある」という主張を**実数ゲームに関する決定公理**という.

問題は, 必勝策, あるいは一般に 策 (ストラテジ) というものを数学的にどう定式化するかというところにある. 二つのやり方が考えられる.

第一の定式化: 策が対局者にどの手を打つべきか一意的な指示を与えるものであるべきだとすれば, 次のような定義になる. 先手の策とは 長さが偶数の実数列 (長さゼロの空な列を含む) に実数を対応させる関数

$$\sigma : \bigcup_{n<\omega} \left({}^{2n}\mathbb{R}\right) \to \mathbb{R}$$

のことである. 後手の策とは 長さが奇数の実数列に実数を対応させる関数

$$\tau : \bigcup_{n<\omega} \left({}^{2n+1}\mathbb{R}\right) \to \mathbb{R}$$

のことである. このとき先手と後手がそれぞれ策 σ と τ に則って対局を進めれば, 棋譜 (無限列 $\bar{a}$) は一意的

に決定される:

$$\begin{aligned} a_0 &= \sigma(\langle\,\rangle) \\ a_1 &= \tau(\langle a_0\rangle) \\ a_2 &= \sigma(\langle a_0, a_1\rangle) \\ a_3 &= \tau(\langle a_0, a_1, a_2\rangle) \\ &\vdots \\ a_{2n} &= \sigma(\langle a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}\rangle) \\ a_{2n+1} &= \tau(\langle a_0, a_1, \ldots, a_{2n-1}, a_{2n}\rangle) \\ &\vdots \end{aligned}$$

この無限列を $\sigma * \tau$ と書くことにすると,

$$\forall\tau\big[\,\sigma * \tau \in A\,\big]$$

となる先手の策 σ が先手の必勝策,

$$\forall\sigma\big[\,\sigma * \tau \notin A\,\big]$$

となる後手の策 τ が後手の必勝策ということになる. この観点からは,

$$\forall A \subseteq {}^{\omega}\mathbb{R}\Big[\quad \exists\sigma\forall\tau\big[\,\sigma * \tau \in A\,\big] \quad\vee\quad \exists\tau\forall\sigma\big[\,\sigma * \tau \notin A\,\big]\quad\Big]$$

が, 実数ゲームに関する決定公理の定式化である. 以下では, ここで述べた意味での策のことを **狭義の策** とよぶ.

第二の定式化: 策はとるべき選択肢の範囲を示せばよく, 一意的な指示でなくてもよいと考えれば, 次の定義となる. 先手の **広義の策** とは, 木 $T_{\mathrm{I}} \subseteq {}^{<\omega}\mathbb{R}$ で条件

$$p \in T_{\mathrm{I}},\ p \text{ の長さが偶数} \to \exists a \in \mathbb{R}\forall b \in \mathbb{R}\big[\,p^\frown\langle a\rangle^\frown\langle b\rangle \in T_{\mathrm{I}}\,\big]$$

をみたすもののことである. T_{I} は対局の途中経過の集合であって, 先手がわざと (またはうっかり) T_{I} の外へ出ない限り, 後手がどのような手を指そうとも対局の経過は T_{I} の中にとどまる. 同様に, 後手の広義の策とは, 木 $T_{\mathrm{II}} \subseteq {}^{<\omega}\mathbb{R}$ で条件

$$p \in T_{\mathrm{II}},\ p \text{ の長さが偶数} \to \forall a \in \mathbb{R}\exists b \in \mathbb{R}\big[\,p^\frown\langle a\rangle^\frown\langle b\rangle \in T_{\mathrm{II}}\,\big]$$

をみたすもののことである. 対局の途中経過を先手の広義の策 T_{I} 内にとどめる限り必ず結果が $\bar{a} \in A$ となって先手の勝ちとなるならば, この広義の策 T_{I} を先手の広義の必勝策と呼ぼう. これはつまり,

$$\forall\bar{a} \in {}^{\omega}\mathbb{R}\Big[\,\forall n \in \omega\big[\,\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle \in T_{\mathrm{I}}\,\big] \to \bar{a} \in A\,\Big]$$

ということである. よくやるように, 有限の始切片 $\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$ がすべて木 T に属するような無限列 $\bar{a}$ 全体の集合を $[T]$ と書くならば, これはもっと簡単に $[T_{\mathrm{I}}] \subseteq A$ と書ける. 後手の広義の必勝策も同様に定義される. これは $[T_{\mathrm{II}}] \cap A = \emptyset$ をみたす後手の広義の策 T_{II} のことである. このように考えてくると,

$$\forall A \subseteq {}^{\omega}\mathbb{R}\Big[\quad \exists T_{\mathrm{I}}\big[\,[T_{\mathrm{I}}] \subseteq A\,\big] \quad\vee\quad \exists T_{\mathrm{II}}\big[\,[T_{\mathrm{II}}] \cap A = \emptyset\,\big]\quad\Big]$$

が, 実数ゲームに関する決定公理の定式化である.

二つの定式化の違いは, 策の指示する選択肢がそこまでの対局の進行に対して一価関数になっているか多価関数になっているかの違いであり, 第一の定式化は第二の定式化より見かけ上「強く」なっている. 狭義の策から広義の策である木を作るのはすべての可能な対局を想定してその途中経過全体の集合を作るだけなので簡単だが, 広義の策から狭義の策である一価関数を作ろうと思えば, 各局面での可能な選択肢のどれかひとつを指定しなければならない. ところが実数ゲームに関する決定公理は選択公理とは 両立しない. では, ふたつの定式化は強さにおいて異なる別々の命題となるのだろうか.

実はそれは杞憂である. すなわち, **実数ゲームの第二の定式化は第一の定式化を導き, したがって両者は同値である.** 以下, このことの証明を述べる.

次の命題 $\mathbf{Unif}_{\mathbb{R}}$ を, **実数の二項関係に関する一意化原理**と呼ぶ.

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}\Big[\quad \forall x\exists y\left[\langle x,y\rangle\in E\right] \quad\rightarrow\quad \exists f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,\forall x\left[\langle x,f(x)\rangle\in E\right]\quad\Big]. \qquad (\mathbf{Unif}_{\mathbb{R}})$$

実数ゲームに関する決定公理の第二の (弱いほうの) 定式化から $\mathbf{Unif}_{\mathbb{R}}$ が導かれることを示そう. そのために, 自然数の無限列全体 ${}^{\omega}\mathbb{N}$ から数直線 $\mathbb{R}$ の**上への**写像 $\varphi : {}^{\omega}\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ をひとつ固定する. この φ は連続な全単射にできるが, そのことはここでは必要ない. 実数のペアの集合 $E\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ が与えられ, $\forall x\exists y\ \langle x,y\rangle\in E$ となっていたとする.

ここで次のような無限ゲームを考えよう

$$\begin{array}{lccccccc}
\text{先手} & x & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & \\
\text{後手} & & & n_0 & \rightarrow & n_1 & \rightarrow & n_2 \quad\rightarrow\quad\cdots
\end{array}$$

このゲームでは先手の指す手は初手以外すべて無視される. そして, 後手の選択する n_i はすべて自然数でなければならず, そうしなければ後手の負けと判定される. この制限を後手が最後まで守ったとすれば, 自然数の無限列 $\bar{n}=\langle\, n_i \mid i<\omega\,\rangle$ が得られる. そこで, もしも $\langle x,\varphi(\bar{n})\rangle\notin E$ なら先手の勝ち, $\langle x,\varphi(\bar{n})\rangle\in E$ なら後手の勝ち, と判定する.

このゲームでは, 先手には必勝策はない. というのも, 先手がどんな x を選ぼうとも, $\langle x,y\rangle\in E$ をみたす y は必ずあり, したがって $\varphi(\bar{n})=y$ をみたす自然数の無限列 $\bar{n}$ も必ず存在する. だから, 後手は先手の選ぶ x をみて適切な $\bar{n}$ を言えばそれで勝てる.

仮定 (実数ゲームに関する決定公理の第二の定式化) により, 後手の広義の必勝策 T_{II} が存在する. すなわち, 先手がどのような x を選ぼうとも, また先手の (勝敗に関係のない) その後の選択がどのようなものであろうとも, うまく $n_0, n_1, n_2, \ldots$ を順次選ぶことができて,

$$\langle x,n_0\rangle\in T_{\mathrm{II}},\ \langle x,n_0,*,n_1\rangle\in T_{\mathrm{II}},\ \langle x,n_0,*,n_1,*,n_2\rangle\in T_{\mathrm{II}},\ \cdots$$

(ここでの $*$ は 「先手が何か言っているかによらず」 という意味で書いた) となり, これらすべてをみたすように $\bar{n}=\langle\, n_i\mid i<\omega\,\rangle$ をとったとすれば, 必ず $\langle x,\varphi(\bar{n})\rangle\in E$ となる. ところが, このゲームの途中経過において後手が適切な n_i をひとつ選ぶにあたっては選択公理は必要ない. というのも, 実数と違って自然数の順序は整列順序であるから, 可能な選択肢のうち最小の自然数を選べばよい. そこで, 与えられた実数 x に対応する $n_i(x)$ を,

$$n_i(x)=\min\Big\{\, n\in\omega\ \Big|\ \langle x,n_0(x),x,n_1(x),x,\ldots,x,n_{i-1}(x),x,n\rangle\in T_{\mathrm{II}}\,\Big\}$$

によって定める. こうして自然数の無限列 $\bar{n}(x)=\langle\, n_i(x)\mid i<\omega\,\rangle$ が得られ, $f(x)=\varphi(\bar{n}(x))$ とおけば $\langle x,f(x)\rangle\in E$ となる. これで, 実数ゲームに関する決定公理の第二の定式化が実数に関する一意化原理 $\mathbf{Unif}_{\mathbb{R}}$ を導くことがわかった.

さて, 実数の無限列の集合 $A \subseteq {}^{\omega}\mathbb{R}$ を判定条件とする実数ゲームが与えられており, これに対して後手の広義の必勝策 T_{II} がある場合を考察しよう. 一意化原理 $\mathbf{Unif}_{\mathbb{R}}$ を仮定して, 後手の狭義の必勝策の存在を証明する.

選択公理を用いることなく, 全単射 $c : {}^{<\omega}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を構成できる. 後手の広義の必勝策 T_{II} と この関数 c を使って, 実数のペアの集合 E を次のように定める. $x \in \mathbb{R}$ を任意の実数とし, $p \in {}^{<\omega}\mathbb{R}$ を $x = c(p)$ をみたす一意的な有限列としよう. もしも $p \in T_{\mathrm{II}}$ であり かつ p の長さが奇数であるならば, そのときは $p^\frown\langle y\rangle \in T_{\mathrm{II}}$ をみたす $y \in \mathbb{R}$ についてだけ $\langle x, y\rangle \in E$ としよう. もしも $p \notin T_{\mathrm{II}}$ であるかまたは p の長さが偶数であるときには, すべての $y \in \mathbb{R}$ について $\langle x, y\rangle \in E$ としよう. すると T_{II} が後手の広義の策であることから $\forall x \exists y$ $\langle x, y\rangle \in E$ となることがわかる. そこで $\mathbf{Unif}_{\mathbb{R}}$ によって $\forall x\ \langle x, f(x)\rangle \in E$ をみたす関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在する. 以上の準備の下で, 後手の狭義の策 τ を

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \tau(\langle a_0\rangle) = f(c(\langle a_0\rangle)) \\
a_3 &= \tau(\langle a_0, a_1, a_2\rangle) = f(c(\langle a_0, a_1, a_2\rangle)) \\
a_5 &= \tau(\langle a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\rangle) = f(c(\langle a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\rangle)) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

のように定めれば (要するに f と c の合成写像を τ とすれば) この策 τ にしたがって進行する対局はつねに後手の広義の策 T_{II} の中に留まることになる. いま T_{II} は後手の広義の必勝策だから, 策 τ は後手の狭義の必勝策である. 先手に広義の必勝策があった場合も同様にして先手の狭義の必勝策が得られる. このようにして, 実数ゲームに関する決定公理の第二の定式化から第一の定式化が導かれ, 両者の同値性がわかる.

2　二重ラムゼイ性は成立しない

2009 年 11 月 6 日

集合 X の部分集合のうち濃度がちょうど κ であるもの全体のなす集合を $[X]^{\kappa}$ と書く. と一般的に定義したが, 以下はもっぱら $[\omega]^{\omega}$ の部分集合の話.

いま $[\omega]^{\omega}$ にカントール空間 ${}^{\omega}2$ の部分空間としての位相を与えたとする. これは $[\omega]^{\omega}$ の要素をその要素の昇順の数え上げと同一視し ${}^{\omega}\omega$ の部分空間としての位相を与えたものと同じである. 要するに, 集合 $B \subseteq [\omega]^{\omega}$ が

$$\forall b \in B \exists k \in \omega \forall x \in [\omega]^{\omega} \Big[x \cap k = b \cap k \to x \in B \Big]$$

をみたすときに開集合とみなす位相である. このとき $[\omega]^{\omega}$ は ${}^{\omega}2$ の G_{δ} 部分集合, あるいは ${}^{\omega}\omega$ の閉部分集合であるから, ポーランド空間である. (じつは $[\omega]^{\omega} \approx {}^{\omega}\omega \approx \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.) 以下では, この位相を $[\omega]^{\omega}$ の 普通の位相と呼ぶ.

さて, 集合 $A \subseteq [\omega]^{\omega}$ がラムゼイの性質をもつ (あるいは単に, ラムゼイである) とは, $[a]^{\omega} \subseteq A$ または $[a]^{\omega} \cap A = \emptyset$ となるような無限集合 $a \in [\omega]^{\omega}$ が存在することをいう. 普通の位相に関するボレル集合はラムゼイの性質をもつ (ガルヴィンとプリクリの定理), また $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合もラムゼイの性質をもつ (シルヴァーの定理), ソロヴェイのモデルにおいては $[\omega]^{\omega}$ のあらゆる部分集合がラムゼイの性質をもつ (マサイアスの定理). このマサイアスの定理によれば, ラムゼイの性質をもたない集合の存在を示すには選択公理の力が必要だということになる.

ラムゼイの性質をもたない集合の典型的な例として ベルンシュタイン集合がある．ベルンシュタイン集合とは, ポーランド空間 X の部分集合であって, X における不可算な閉部分集合すべてと交わるが, しかしどんな不可算な閉部分集合をも含まないような集合のこと．よく知られているとおり, ここで閉部分集合というかわりに, ボレル集合あるいは $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合といっても同じことである．選択公理があれば, 任意の不可算ポーランド空間がベルンシュタイン集合をふくむことを, 対角線論法をもちいて示せる．

さて $[\omega]^\omega$ において $[a]^\omega$ の形の集合は ($a \in [\omega]^\omega$ であるかぎり) すべて不可算な閉集合であるから, ベルンシュタイン集合と交わり, しかしベルンシュタイン集合に含まれない．ゆえに, ベルンシュタイン集合はラムゼイの性質をもたない．

次の例はマサイアスによる．関数 $f : [\omega]^\omega \to [\omega]^\omega$ を

$$i \in f(x) \leftrightarrow x \cap (i+1) \text{ は奇数個の要素を持つ}$$

によって定義しよう．$x = \{\, x(0) < x(1) < x(2) < \cdots \}$ と昇順に数え上げたとすれば

$$f(x) = \bigcup_{i<\omega} [\, x(2i),\ x(2i{+}1)\, [$$

である．もしも $x, y \in [\omega]^\omega$ かつ 両者の対称差 $x \triangle y$ がただひとつの要素, 仮に k をもつものとすれば,

$$f(x) \cap f(y) \subseteq k+1, \qquad f(x) \cup f(y) \supseteq \omega \setminus (k{+}1)$$

となる．そこで, U を ω 上の任意の非単項超フィルターとすれば, いつでも $f(x)$ と $f(y)$ の一方 (だけ) が U に属することになる．つまり

$$|x \triangle y| = 1 \to \bigl(f(x) \in U \leftrightarrow f(y) \notin U\bigr)$$

が成立する．$a_0 \in [\omega]^\omega$ が任意に与えられたとしよう．かりに $f(a_0) \in U$ だったとして, a_0 から順次ひとつずつ要素を抜き去って a_1, a_2,... を作ったとすれば

$$\begin{gathered} f(a_0) \in U \\ f(a_1) \notin U \\ f(a_2) \in U \\ f(a_3) \notin U \\ \vdots \end{gathered}$$

となり, $[a_0]^\omega$ は $f^{-1}(U)$ と交わるがこれに含まれない．$f(a_0) \notin U$ とした場合も同様だ．こうして, ω 上の非単項超フィルターの f のもとでの逆像 $f^{-1}[U]$ はラムゼイの性質をもたない．

先ほど述べたとおり, ラムゼイの性質をもたない $[\omega]^\omega$ の部分集合の存在は選択公理をもちいないでは示すことができない．ところがこの性質を多次元化しようとすると, とたんに話が違ってくる．

いま直積 $[\omega]^\omega \times [\omega]^\omega$ の部分集合 A が, ある $a, b \in [\omega]^\omega$ について

$$([a]^\omega \times [b]^\omega) \subseteq A) \quad \text{または} \quad ([a]^\omega \times [b]^\omega) \cap A = \emptyset$$

をみたすとき, A は二重ラムゼイ性を有すると言うことにしよう．ラムゼイの性質の, いわば二次元版である．すると, ガルヴィンとプリクリの定理の二次元版を考えることができる．つまり, 直積空間 $[\omega]^\omega \times [\omega]^\omega$ の任意のボレル部分集合が二重ラムゼイ性を有するかどうかが問題になる．

あまりもったいぶっても仕方がないのであっさりと答えを言ってしまえば, ボレル集合の二重ラムゼイ性は成立しない. 次の例を考えてみよう. $x, y \in [\omega]^\omega$ として

$$x(m) \leq y(n) < x(m+1) \leq y(n+1) < x(m+2) \leq y(n+2) < \cdots$$

となるような $m, n \in \omega$ が存在するならば $\langle x, y\rangle \in A$, そうでなければ $\langle x, y\rangle \notin A$ として $[\omega]^\omega \times [\omega]^\omega$ の部分集合 A を定めよう. この A は F_σ 集合, したがってボレル集合である. どんな集合 $a, b \in [\omega]^\omega$ からも, いままで出してきた数よりも大きな要素を交互に出し合ってそれぞれ無限部分集合をつくることができるから, $x \in [a]^\omega$ $y \in [b]^\omega$ かつ $\langle x, y\rangle \in A$ をみたす x と y はかならずとれる. ところが, $\langle x, y\rangle$ のとき, 昇順の数え上げで偶数番目の要素を全部 x から取り去って x' を作れば, x' のじゅうぶん大きな二つのあい続く要素の間には y の要素が二つづつ挟まることになるから $\langle x', y\rangle \notin A$, そして次に y の昇順の数え上げで奇数番目の要素をすべて取り去って y' をつくれば, また $\langle x', y'\rangle \in A$ となる. このようにして, $[a]^\omega \times [b]^\omega$ は A と交わり, しかし決して A に含まれることはない. つまり, この A について二重ラムゼイ性は成立しない.

上に例としてあげた集合 A は, $[\omega]^\omega$ に普通の位相より細かい エレンタック位相 と呼ばれる位相を与えたときに直積空間 $[\omega]^\omega \times [\omega]^\omega$ が $[\omega]^\omega$ と同相になるかどうか, という問題への反例としてホセヴァ [Danitza Hocever, Question Answers Gen. Topology, **20** (2002) 33–37.] によって提示された集合と偶然にも一致する. (エレンタック位相はマサイアス強制に対応した位相であり, ω を離散空間と思ったときに ${}^\omega 2$ に与えられるヴィートリス位相とも一致する.) いっぽう, この例と, ラムゼイの性質をもたない集合のマサイアスの例との類似は, けっして偶然の一致ではない. マサイアスの関数 f は明示的に定義された連続関数である. いっぽう, 非単項超フィルターはその存在証明に選択公理の助けを必要とする, いわば超越的な存在である. たとえばソロヴェイのモデルにはもちろん非単項超フィルターは存在しない. だが, 非単項超フィルターをジェネリック拡大で付け加える方法がある. いま $[\omega]^\omega$ に順序づけ

$$a \subseteq^* b \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} a \setminus b \text{ が有限集合}$$

を与えた半順序 $([\omega]^\omega, \subseteq^*)$ を $\mathbb{P}$ とする. よく知られているとおりこの $\mathbb{P}$ は σ-閉で (したがって ω の新しい部分集合をなにも付け加えず), ジェネリック集合は ω 上の非単項超フィルター (とくにラムゼイ超フィルター) である. $\mathbb{P}$-ジェネリック集合の正統的な $\mathbb{P}$-名前を $\mathcal{U}$ とすれば, $a, b \in [\omega]^\omega$ について

$$a \subseteq^* b \leftrightarrow a \Vdash \check{b} \in \mathcal{U}$$

となる. $\Vdash$ ($\mathcal{U}$ は非単項超フィルター) なので $\Vdash$ ($f^{-1}(\mathcal{U})$ はラムゼイの性質をもたない).

この $f^{-1}(\mathcal{U})$ の $\mathbb{P}$-名前になっている集合を基礎モデルで考えてみる. f の絶対性のおかげで

$$\Bigl(a \Vdash \check{b} \in f^{-1}(\mathcal{U})\Bigr) \leftrightarrow \Bigl(a \Vdash f(\check{b}) \in \mathcal{U}\Bigr) \leftrightarrow a \subseteq^* f(b).$$

f の定義から

$$a \subseteq^* f(b) \leftrightarrow \exists m \forall i > m \exists j \bigl(\, b(2j) \leq a(i) < b(2j{+}1) \,\bigr).$$

したがって,

$$\mathcal{B} = \Bigl\{\, \langle \check{b}, a\rangle \Bigm| \exists m \forall i > m \exists j \bigl(b(2j) \leq a(i) < b(2j{+}1)\bigr) \Bigr\}$$

によって $\mathbb{P}$-名前 $\mathcal{B}$ を定義すれば $\Vdash \mathcal{B} = f^{-1}(\mathcal{U})$ が成立する. この $\mathcal{B}$ に対応して, 同じ式で定義される $[\omega]^\omega \times [\omega]^\omega$ の部分集合

$$B = \Bigl\{\, \langle a, b\rangle \Bigm| \exists m \forall i > m \exists j \bigl(b(2j) \leq a(i) < b(2j{+}1)\bigr) \Bigr\}$$

を考えれば, これもまた二重ラムゼイ性の反例になっている. 先の例は以上の考察に基づき, あと知恵で少し整理して単純化したものである.

以上の例はトリヴィアルなものであるが, 要点はあきらかだろう. 二重ラムゼイ性が $\mathbb{P}$-ジェネリック拡大における $[\omega]^\omega$ の部分集合のラムゼイ性の基礎モデルにおける表現にほかならない点に注目しよう. $\mathbb{P}$-ジェネリック拡大における "実数の集合" に起こっていることを, 基礎モデルにおける実数の集合の性質に書き換える, またはその逆をする, ということで新しい結果が生み出せる可能性が, ここに示唆されている.

もうひとつ, これもほとんどトリヴィアルだが例をあげると, ボレル集合のラムゼイ性というガルヴィンとプリクリの定理をミラーやトドルチェビッチが次の形で多次元化している. B を $[\omega]^\omega \times {}^\omega 2$ の任意のボレル集合とするとき, $a \in [\omega]^\omega$ と完全集合 P を

$$([a]^\omega \times P) \subseteq B \quad \text{または} \quad ([a]^\omega \times P) \cap B = \emptyset$$

をみたすようにとれる. この B は $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合でもよいことがわかっているし, ソロヴェイのモデルにおいては $[\omega]^\omega \times {}^\omega 2$ の任意の部分集合でよい. このタイプの多次元化ラムゼイ性をミラーに従って「パラメータつきラムゼイ性」と呼ぶことにする. すると, $\mathbb{P}$-ジェネリック拡大における ${}^\omega 2$ の部分集合 E の基礎モデルにおける $\mathbb{P}$-名前が, $[\omega]^\omega \times {}^\omega 2$ の部分集合とみてパラメータ付きラムゼイ性をもつならば, ジェネリック拡大において E または補集合 ${}^\omega 2 \setminus E$ がある完全集合を含む. このことから次の結果が得られる. ソロヴェイのモデルの $\mathbb{P}$-ジェネリック拡大においては, ラムゼイ超フィルターは存在するけれどもベルンシュタイン集合は存在しない. いいかえればラムゼイ超フィルターの存在はベルンシュタイン集合の存在を導かない.

実際にはもっと強く, ソロヴェイのモデルの $\mathbb{P}$-ジェネリック拡大においては実数の不可算集合は必ず完全集合を含むということがわかっている (ディプリスコとトドルチェビッチの結果).

3 スケールとはなんじゃ?

2009 年 11 月 7 日

記述集合論の重要なツールであるスケールの概念の動機づけを古典論的な観点から探ってみる. そもそも記述集合論の主たる舞台となるポーランド空間とは完備な距離がつく可分位相空間のことである. このあたりの復習から入る.

アレクサンドロフの定理. 一般に (可分と限らない) 距離空間 X の部分集合 A に位相を変えることなく完備な距離がつくなら, A は X の G_δ 部分集合である. 逆に完備距離空間の G_δ 部分集合には, 位相を変えることなく完備な距離がつく.

(前半の証明) A に完備な距離関数 d_A が位相を変えずについたとする. ここで必要なら d_A のかわりに $d_A/(1+d_A)$ を考えればいいので d_A は有界であると仮定しても一般性を損なわない. また必要なら X のかわりに X における A の閉包において議論すればいいので, A は X において稠密であると仮定しても一般性を損なわない. そこで X の各点 x のどの近傍も A と交わる. いま集合 $E \subseteq X$ に対して

$$\operatorname{osc}(E) = \sup\left\{ d_A(x,y) \;\middle|\; x, y \in E \cap A \right\}$$

とおく $E \cap A$ が二点以上を含めばこれは正の数になる. E が点 $x \in X$ の近傍全体を動いたときの $\operatorname{osc}(E)$ の下限を $\|x\|$ とする. x の近傍フィルターを $\mathcal{V}(x)$ と書けば

$$\|x\| = \inf\left\{ \operatorname{osc}(E) \;\middle|\; E \in \mathcal{V}(x) \right\}.$$

つぎに自然数 n について, $\mathrm{osc}(U) < \frac{1}{n}$ をみたす X の開集合 U 全部の和集合を D_n とする. D_n も X の開集合で

$$x \in D_n \leftrightarrow \|x\| < \frac{1}{n}$$

となっている. $D = \bigcap_{n\in\omega} D_n$ とおこう. D は X の G_δ 部分集合である. あきらかに

$$x \in D \leftrightarrow \|x\| = 0$$

が成立している. さて, $x \in A$ ならば $\|x\| = 0$ となる. というのも, d_A の定める位相は A のもとの位相すなわち X からの相対位相と一致するので, A の点 x の d_A の意味での ε-近傍は ある $U \in \mathcal{V}(x)$ について $U \cap A$ の形をしているはずであり, このとき $\mathrm{osc}(U) \le 2\varepsilon$ となる. ゆえに, $A \subseteq D$ である. 逆に $x \in D$ であったとしよう. A は X において稠密と仮定してあるので x に収束する A の点列 $\{a_i\}$ がある. ところが $\|x\| = 0$ であるから, この $\{a_i\}$ は d_A-コーシー列でなければならない. d_A は完備な距離づけであったから, このことから $x \in A$ となる. よって $D \subseteq A$. ゆえに $A = D$ となって A が G_δ 集合とわかる.

(後半の証明) X 上の完備な距離関数 d_X を考える. そして $A = \bigcap_{n<\omega} G_n \subseteq X$, 各 G_n は X の開集合だとする. 一般性を損なうことなく, $G_0 \ne X$ かつ

$$G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots$$

となっているものと仮定できる. 各自然数 n について X 上の実数値関数 f_n を

$$f_n(x) = \inf\left\{\, d_X(x,y) \;\middle|\; y \in X \setminus G_n \,\right\}$$

によって定めよう. この f_n は連続関数で, $x \in G_n$ のとき $f_n(x) > 0$, $x \notin G_n$ のとき $f_n(x)$ となる. また,

$$f_0(x) \ge f_1(x) \ge f_2(x) \ge \cdots$$

となっている. $x \in A$ のときはすべての $n \in \omega$ で $f_n(x) > 0$ であるから, 写像 $F : A \to {}^{\omega}\mathbb{R}$ を

$$F(x) = \left\langle \frac{1}{f_n(x)} \;\middle|\; n \in \omega \right\rangle$$

によって定めることができる. A の点の列 $\{x_i\}$ が $i \to \infty$ のとき X のある点 x_∞ に収束したとしよう. このときさらに ${}^{\omega}\mathbb{R}$ の点列 $\{F(x_i)\}$ が収束列であれば $x_\infty \in A$ となる. というのも $\{F(x_i)\}$ が収束列であるということは各 $n \in \omega$ ごとに $\left\langle \dfrac{1}{f_n(x_i)} \;\middle|\; i \in \omega \right\rangle$ が収束列であるということにほかならないので, このとき

$$\sup_{i\in\omega} \frac{1}{f_n(x_i)} < +\infty$$

したがって

$$\inf_{i\in\omega} f_n(x_i) > 0$$

となるが, この下限を ρ_n とすれば, 極限値 x_∞ について $f_n(x_\infty) \ge \rho_n > 0$, したがって $x_\infty \in G_n$ となるからである. 逆に $x_\infty \in A$ であれば $\{F(x_i)\}$ が ${}^{\omega}\mathbb{R}$ において収束列となることは f_n の連続性からすぐにわかる. そこで, ${}^{\omega}\mathbb{R}$ の完備な距離づけ d_H をもちいて, $x, y \in A$ について

$$d_A(x,y) = d_X(x,y) + d_H(x,y)$$

とおけば, d_A は A の完備な距離づけであり, しかももとの位相と両立する. ◀

いってみれば $1/f_n(x_i)$ は, A にとっての無限遠集合である $X \setminus A$ に A の点列 $\{x_i\}$ が近づいていく危険性の程度をあらわしている．すべての n ごとにこれが有界にとどまることが, 点列の極限値が A にとどまっていることの安全基準となるというわけだ．点集合上のスケールの概念は, ひとつには, このアレクサンドロフの定理の後半部分の証明に動機づけられている．

いま, 各 n ごとに, $1/f_n(x)$ 以上の整数のうち最小のものを $\varphi_n(x)$ とおく:

$$\varphi_n(x) = \left\lceil \frac{1}{f_n(x)} \right\rceil.$$

関数列 $\bar{\varphi} = \{\varphi_n\}$ によっても A の点列 $\{x_i\}$ の安全基準は表現できる．A の点列 $\{x_i\}$ が X の点 x_∞ に収束し, かつ, 各 n ごとに自然数の列 $\langle \varphi_n(x_i) \mid i \in \omega \rangle$ が有界にとどまるならば, $x_\infty \in A$ であり, しかも $\varphi_n(x_\infty) \leq \liminf_{i\to\infty} \varphi_n(x_i)$ が成立する．

もしも 各 n ごとに $\{\varphi_n(x_i) \mid i \in \omega\}$ が自然数の有界列になっているならば, $n = 0, 1, 2, \ldots$ について順次部分列の抜き出しをおこない最後に対角線をとるアルツェラ=アスコリの定理の論法により, 適当な部分列

$$i_0 < i_1 < \cdots < i_k < \cdots$$

をとりだして, 各 n ごとに $\langle \varphi_n(x_{i_k}) \mid k \in \omega \rangle$ は十分先のほうでは定数列になっているようにできる．まとめると次のことがいえる:

命題 3.1. 完備距離空間 X の G_δ 部分集合 A に対して, 以下の条件をみたす A 上の自然数値関数の列 $\bar{\varphi} = \{\varphi_n\}$ が存在する．すなわち, A の点列 $\langle x_i \mid i \in \omega \rangle$ が X の点 x_∞ に収束したとして, もしも 各 $n \in \omega$ ごとに 自然数の列

$$\varphi_n(x_0), \varphi_n(x_1), \ldots$$

が十分先のほうで一定値 ℓ_n をとるならば, $x_\infty \in A$ であり, かつすべての n で

$$\varphi_n(x_\infty) \leq \ell_n$$

が成立する．◀

この自然数値関数 φ_n を順序数値関数にまで一般化したものが, スケールにほかならない．

命題 3.1 では点列 $\langle x_i \rangle$ の収束性はスケールの値の列 $\langle \varphi_n(x_i) \rangle$ の収束とは別の条件として仮定してやらねばならなかった．もとの空間 X がポーランド空間である場合には, この条件まで面倒をみてくれる “よいスケール” がつく．つぎにこのことをみてみよう．

可分完備距離空間 (X, d_X) においては, 各 $n \in \omega$ ごとに, X 全体を可算個の半径 2^{-n} の開球で覆うことができる:

$$X = \bigcup_{\ell\in\omega} B\Big(a_\ell : 2^{-n}\Big).$$

点 x が $B(a_\ell : 2^{-n})$ の閉包に属するような最小の番号 ℓ を $\psi_n(x)$ としてみよう．X の点列 $\langle x_i \mid i \in \omega \rangle$ について, $\psi_n(x_i)$ が十分大きいすべての i について一定値 ℓ_n をとったとする．このとき 十分大きな i と j について

$$x_i, x_j \in \mathrm{Cl}_X B\Big(a_{\ell_n} : 2^{-n}\Big) \text{ したがって } d_X(x_i, x_j) \leq 2^{-n+1}$$

である．すべての n についてこれが成立するのであれば, つまり列 $\langle x_i \mid i \in \omega \rangle$ は d_X-コーシー列ということになる．d_X の完備性により x_i は $i \to \infty$ のときある x_∞ に収束するが, 十分大きいすべての i で $x_i \in \mathrm{Cl}_X B(a_{\ell_n} : 2^{-n})$ であるからには $x_\infty \in \mathrm{Cl}_X B(a_{\ell_n} : 2^{-n})$, したがって $\psi_n(x_\infty) \leq \ell_n$ である．

いま, 可分完備距離空間 (X, d_X) の G_δ 部分集合 A において, 命題 3.1 のいう自然数値関数列 $\bar{\varphi} = \{\varphi_n\}$ と上に述べた収束だけを保証する“スケールもどき”$\{\psi_n\}$ を交互にならべて関数列

$$\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1, \ldots$$

を作り, これをあらためて $\bar{\varphi}$ と呼ぼう, すると次のことが成立している.

命題 3.2. 可分完備距離空間 X の G_δ 部分集合 A に対して, 以下の条件をみたす A 上の自然数値関数の列 $\bar{\varphi} = \{\varphi_n\}$ が存在する. すなわち, A の点列 $\langle x_i \mid i \in \omega \rangle$ について, もしも 各 $n \in \omega$ ごとに 自然数の列

$$\varphi_n(x_0), \varphi_n(x_1), \ldots$$

が十分先のほうで一定値 ℓ_n をとるならば, $i \to \infty$ のとき x_i は A に属するある点 x_∞ に収束し, かつすべての n で

$$\varphi_n(x_\infty) \leq \ell_n$$

が成立する. ◀

話がここまで来ると, この“よいスケール”の存在は, もはや A に完備な距離がつくための十分条件とはいえない. というのも, よいスケールのつく点集合のクラスは連続像のもとで閉じているからである.

命題 3.3. ポーランド空間の任意の $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合 A に, 命題 3.2 の条件をみたす自然数値関数列 $\bar{\varphi}$ がつく.

(証明) ポーランド空間 X の $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 部分集合 A が与えられたとする. 定義により A は $X \times \mathbb{R}$ の G_δ 部分集合 D の射影である:

$$x \in A \leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} \left[\langle x, y \rangle \in D \right].$$

この D 上には命題 3.2 の条件をみたす自然数値関数列 $\bar{\varphi}_n = \{\varphi'_n\}$ が存在する. そこで, $x \in A$ に対して

$$\varphi_n(x) = \min\left\{ \varphi'_n(x, y) \;\middle|\; \langle x, y \rangle \in D \right\}$$

として自然数値関数 φ_n を定めればよい. これが命題 3.2 の条件をみたすことは簡単にわかる. ◀

ここで命題 3.2 の議論で可分性がどのように効いているかを考えると, つまりは ψ_n が自然数値関数であることを保証するために利用されているだけである. だから自然数値関数でなくてもよい, というふうに条件を緩めれば, 可分性の仮定もはずせる. 完備距離空間 (X, d_X) の稠密集合の最小濃度 $\mathrm{d}(X)$ は開基の最小濃度 (ウェイト) $w(X)$ に一致する. これが整列できる基数 λ だとすれば (というより最小濃度と言った時点で整列可能性を暗黙に仮定してしまっているが), X の G_δ 部分集合およびその連続像には, 命題 3.2 の条件 (をしかるべく変更したもの) をみたす λ に値をとる順序数値関数 $\bar{\varphi}$ がつく.

たとえば数直線の完備性は, 「目的の条件を満たす実数の有限近似をどんどん作っていくことが, とりもなおさず目標となる実数を与えることにほかならない」という実数の構成原理と解釈できる. 完備性がなければ「有限近似をどんどん作っていったけれども, どこにもたどり着きませんでした」という残念な結末となる憂いがある. だから, ある性質をもつ実数を構成したいという場合に, その性質をもつ実数の集合が完備な距離づけをもてばありがたい. ところがアレクサンドロフの定理にあるように, 位相を変えずに完備な距離がつく集合は G_δ 集合だけである. では, G_δ でない集合をなすコンセプトについてはどうするか. ひとつには, その集合に含まれる適当な G_δ 部分集合をなんとか探し出してきて, 目標をそこへ置きなおす方法がある. ここに, ベールのカテゴリーの議論が解析学で活躍する理由の一端がある. それと無縁というわけではないがまた別の方法

として, 完備な距離がつかないのは位相がよくないからだと考えて, 目標となるコンセプトが完備な集合を定めるように位相あるいは収束の概念を変更してしまうことが考えられる. この場合にスケールが活躍する. ノヴィコフ=近藤=アディソンの一意化定理などはスケールの応用の典型例である. 候補の範囲を絞り込んでいき最終的にひとつの候補に絞り込むことが一意化の鍵になっており, スケールによってその最終候補 (というか, 当選者) がもとの集合に属していることが保証される. もっとも, こうして得られる一意化集合の定義可能性は, ひとえにスケールの定義可能性にかかっているわけで, そうした理由からスケールの定義可能性の分析が記述集合論の (1970 年代〜80 年代の) 重大な研究テーマとなっていった.