選択公理を制限した数学における
数列空間 ℓ^1 の回帰性
および関連する話題

藤田 博司 (2009 年 4 月 2 日–4 月 7 日)

特に断りのない限りこのノートでは**選択公理を空でない集合の可算族に制限する.** この制限のない通常の選択公理を AC と書き, 可算族に制限された選択公理を $\mathrm{AC}_{\aleph_0}$ と書く. 選択公理を除く他の集合論の公理を ZF と書く. また, ZF+AC を ZFC と書く.

§1. ℓ^1 の回帰性の組合せ論的表現

1.1. 次の各命題はいずれも $\mathrm{ZF}+\mathrm{AC}_{\aleph_0}$ で証明できる:

(1) $(\ell^1)^* \simeq \ell^\infty$.

(2) $\mathbb{N}$ の冪集合 $P(\mathbb{N})$ は 0-1 数列の全体 $2^{\mathbb{N}}$ と自然に同一視され, コンパクトに距離づけされる. (カントール空間)

(3) ℓ^∞ の部分集合とみたとき, $2^{\mathbb{N}}$ はノルム位相にかんして離散集合であり, (2) のコンパクト距離位相は $(\ell^1)^*$ としての弱*位相 (前田本 [1] の用語では, 汎弱位相) からの相対位相に一致する.

(4) ℓ^∞ において, 有限個の値のみとる数列 ($2^{\mathbb{N}}$ の要素の一次結合) はノルム位相に関して稠密集合をなす. したがって, ℓ^∞ 上の線形作用素は $2^{\mathbb{N}}$ への制限によって決定される.

(5) ℓ^∞ 上の有界線形汎関数が ℓ^1 の要素に対応するためには, それが弱*位相にかんして連続であることが必要, かつ十分である.

1.2. 有界線形汎関数 $f : \ell^\infty \to \mathbb{C}$ が与えられたとしよう. $\mathbb{N}$ の部分集合をその特徴関数と同一視すれば, $f : P(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ とみなすことができる. このとき次のことが成立する:

(5) $f(\emptyset) = 0$,

(6) $a, b \subset \mathbb{N}$ に対して $f(a \cup b) + f(a \cap b) = f(a) + f(b)$,

(7) $\|f\|^* = \sup\big\{ \sum_{k=1}^n |f(a_k)| \ \big| \ \{a_k\}_{k=1}^n$ は $\mathbb{N}$ の有限分割$\big\}$. (集合関数としての全変動)

逆に条件 (5)(6) をみたし (7) の和の上限が有限にとどまるような集合関数 $f : P(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$ は $(\ell^\infty)^*$ 上の有界線形汎関数を一意的に定める. このように, $(\ell^\infty)^*$ は, $\mathbb{N}$ の全部分集合に定義された有界変動で有限加法的な複素数値集合関数全体のなすノルム空間と同一視される.

1.3. ふたたび, 有界線形汎関数 $f : \ell^\infty \to \mathbb{C}$ が与えられたとしよう. $\mathbb{N}$ の部分集合 a に対して, f の a 上での全変動 $|f|(a)$ を, a の有限分割 $a = a_1 \dot\cup \cdots \dot\cup a_n$ 全体にわたる, 和

$$\sum_{k=1}^n |f(a_k)|$$

の上限と定めよう. このとき次のことが成立する.

(8) $|f|(\emptyset) = 0$,

(9) $a, b \subset \mathbb{N}$ に対して $|f|(a \cup b) + |f|(a \cap b) = |f|(a) + |f|(b)$,

(10) $\|f\|^* = |f|(\mathbb{N})$.

定義から明らかなように, $f=|f|$ であるためには, f がすべての $a\subset\mathbb{N}$ に対して非負実数値をとることが必要十分である. いま, そのような汎関数を**正値**汎関数とよぶとすれば, $(\ell^\infty)^*$ の正値単位ベクトルとは, $\mathbb{N}$ のすべての部分集合上に定義された**有限加法的確率測度**にほかならない.

1.4. 第 n 項のみ 1 で他の項がゼロの数列を $\boldsymbol{e}_n$ と書き, その全体 $\{\,\boldsymbol{e}_n\,|\,n\in\mathbb{N}\,\}$ を $\mathcal{E}$ と記すことにしよう. すると, $\mathcal{E}$ が ℓ^∞ において生成する閉部分空間はゼロに収束する数列の全体のなすノルム空間 (c_0) である. このとき次の重要な式が成立する:

$$(\ell^\infty)^*\simeq\ell^1\oplus\mathcal{E}^\perp=\ell^1\oplus(c_0)^\perp. \tag{11}$$

この式を確かめるには次の順に考える. まず $(\ell^\infty)^*$ の要素として $\ell^1\cap\mathcal{E}^\perp=\boldsymbol{0}$ である. また任意の $f\in(\ell^\infty)^*$ に対して数列

$$\boldsymbol{x}_f=\big\langle\, f(\boldsymbol{e}_1),f(\boldsymbol{e}_2),\ldots\big\rangle$$

は ℓ^1 に属する. この数列 $\boldsymbol{x}_f$ に対応する $(\ell^\infty)^*$ の要素は

$$f^-(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{n=1}^{\infty}f(\boldsymbol{e}_n)\alpha_n\quad(\boldsymbol{\alpha}=\langle\,\alpha_n\,|\,n\in\mathbb{N}\,\rangle\in\ell^\infty)$$

である. これは (f が弱*連続とは限らないので) 必ずしも f と一致せず, $f-f^-\in\mathcal{E}^\perp$ となる.

1.5. 以上の考察により,

$$(\ell^1)^{**}\simeq\ell^1\ \Leftrightarrow\mathcal{E}^\perp=\boldsymbol{0} \tag{12}$$

となることが, (集合論 ZF+$\mathrm{AC}_{\aleph_0}$ において) 示される.

1.6. 汎関数 $f\in(\ell^\infty)^*$ が $\mathcal{E}^\perp$ に属するための条件を, 1.2 節で述べた $\mathbb{N}$ 上の加法的集合関数の言葉で書けば,

$$f\in\mathcal{E}^\perp\iff\forall n\in\mathbb{N}\Big(\,f\big(\{n\}\big)=0\Big) \tag{13}$$

となる. 一元集合 $\{n\}$ は自明でない分割を持たないので, これは $|f|(\{n\})=0$ と言っても同じであることに注意しよう. こうして, 次の結果にたどり着く:

定理 1 (ZF+$\mathrm{AC}_{\aleph_0}$)　数列空間 ℓ^1 が回帰的であるための必要十分条件は, $\mathbb{N}$ のすべての部分集合にたいして定義された有限集合を零化する有限加法的確率測度, すなわち次の 3 条件をみたす集合関数 $\mu:P(\mathbb{N})\to[0,1]$ が <u>存在しない</u> ことである:

(i) $$\mu(\mathbb{N})=1,$$
(ii) $$\forall n\in\mathbb{N}\big(\,\mu(\{n\})=0\,\big),$$
(iii) $$\mu(a\cup b)+\mu(a\cap b)=\mu(a)+\mu(b).$$

系 1-a (ZF+$\mathrm{AC}_{\aleph_0}$)　$\mathbb{N}$ 上の非単項超フィルターが存在すれば, ℓ^1 は回帰的でない.

系 1-b (ZF+$\mathrm{AC}_{\aleph_0}$)　ℓ^1 が回帰的であることは, 収束する数列全体のなす ℓ^∞ の部分空間 (c) における線形汎関数 $\lim$ を ℓ^∞ へ有界線形汎関数として <u>拡張できない</u> ことと同値である.

§2. ベールの性質

2.1. 定義 位相空間 X の部分集合 A は, その閉包が内点をもたないとき, **いたるところ非稠密**であるといわれる. 可算個のいたるところ非稠密な集合の和であらわされるような集合を**ベールの第 1 類の集合**あるいは**疎集合**という.

2.2. ベールのカテゴリー定理 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の空でない開集合は疎集合ではない.

[コメント] この形で提示されたベールのカテゴリー定理の証明には, 選択公理は不要である. より一般化された「完備な距離空間の空でない開集合は疎集合でない」という形のベールのカテゴリー定理は従属選択公理 DC (極大元のない半順序集合は無限上昇列を含む) と同値であることが知られている. DC は $\mathrm{AC}_{\aleph_0}$ よりは強いが, ℓ^1 の回帰性など, このノートで用いられるいろいろの仮説とは矛盾しない.

2.3. 定義 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の疎集合の全体を $\mathcal{M}$ であらわす.

2.4. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ における疎集合族の振舞いは, 零集合族とよく似ている. たとえば,

(14) $\mathbb{R}^d$ の可算部分集合はすべて $\mathcal{M}$ に属する;
(15) $\mathcal{M}$ のメンバーの部分集合はまた $\mathcal{M}$ に属する;
(16) $\mathcal{M}$ の可算個のメンバーの和集合はまた $\mathcal{M}$ に属する; (これには $\mathrm{AC}_{\aleph_0}$ が必要)
(17) $\mathbb{R}^d$ の空でない開集合はどれも $\mathcal{M}$ に属さない. (これはベールのカテゴリー定理)

2.5. 定義 ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の部分集合 A が**ベールの性質**を有するとは, ある開集合 U について $(A \setminus U) \cup (U \setminus A) \in \mathcal{M}$ となることをいう.

[コメント] これは, 疎集合族 $\mathcal{M}$ の零集合族との類似をテコにして, ルベーグ可測集合の概念に対応するベールのカテゴリー版可測集合概念を与えるものである.

2.6. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ におけるベールの性質をもつ集合の族の振舞いは, ルベーグ可測集合の族とよく似ている. たとえば,

(18) $\mathbb{R}^d$ の開集合はみなベールの性質をもつ;
(19) $\mathcal{M}$ のメンバーもみなベールの性質をもつ;
(20) ベールの性質をもつ集合の族は σ-加法族をなす;
(21) したがって, ボレル集合はすべてベールの性質をもつ.

実は, すべての解析集合がベールの性質をもつ.

2.7. 「疎集合」や「ベールの性質」の概念は, 他の完備距離空間に容易に拡張できる. 以下では, カントール空間 $2^{\mathbb{N}}$ へ移植されたこれらの概念を必要とする. すなわち, カントール空間でいたるところ非稠密な可算個の集合によって覆われる集合を疎集合と呼び, 開集合との差が高々疎集合であるような $2^{\mathbb{N}}$ の部分集合をベールの性質をもつ集合と呼ぶ. $2^{\mathbb{N}}$ においても可算開基底や稠密可算集合を明示的に定義できるので, この移植には選択公理を必要としない.

2.8. 定義 関数 $F : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ が **BP-可測**であるとは, $\mathbb{R}$ の開区間の F のもとでの逆像がすべてベールの性質をもつときにいう.

[コメント] これはもちろんルベーグ可測関数のベールのカテゴリー版である.

2.9. あきらかに, BP-可測関数のもとでの任意のボレル集合の逆像はベールの性質をもつ. したがって, F が BP-可測, G がボレル関数のときは $G \circ F$ は BP-可測である. しかし二つの BP-可測関数の合成写像がまた BP-可測関数になる保証はない.

2.10. ZF 集合論が矛盾を含まない限り, ZF+$\mathrm{AC}_{\aleph_0}$+“カントール空間 $2^{\mathbb{N}}$ のすべての部分集合がベールの性

質をもつ" も矛盾を含まない．すなわちベールの性質をもたない集合の存在は ZF+$AC_{\aleph_0}$ において証明できない．(文献 [2] による)

§3. 位相的 0-1 法則

3.1. カントール空間 $2^{\mathbb{N}}$ 上に同値関係

$$x =^* y \;\Leftrightarrow\; \{\, n \in \mathbb{N} \,|\, x(n) \neq y(n) \,\} \text{ が有限集合}$$

を考えよう．この同値関係で不変な集合のことを**末尾集合**という．末尾集合とは,

$$x =^* y \;\Rightarrow\; \Big[x \in A \;\Leftrightarrow\; y \in A \Big] \tag{22}$$

をみたす集合である．確率論でよく知られているように, 可測な末尾集合の測度は 0 または 1 である．この命題にもベールのカテゴリー版が存在する．

3.2. 位相的 0-1 法則 カントール空間 $2^{\mathbb{N}}$ の部分集合 A が末尾集合でベールの性質をもつものとすれば, A またはその補集合 $2^{\mathbb{N}} \setminus A$ が疎集合である．

[**証明**] A がベールの性質をもつことから, 開集合 U で $A \setminus U$ と $U \setminus A$ がともに疎集合になるものがある．$U = \emptyset$ ならば A が疎集合である．以下 $U \neq \emptyset$ だったと仮定しよう．0 と 1 の有限列 σ (その長さを r としよう) で,

$$N_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x \in 2^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sigma = x \restriction \{1, \ldots, r\} \right\} \subset U \tag{23}$$

となるものがある．$N_\sigma \setminus A$ は疎集合である．任意の $x \in 2^{\mathbb{N}}$ の最初の r 項を σ で上書きすることによって得られる写像

$$\varphi_\sigma \,:\, 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow N_\sigma$$
$$\varphi_\sigma(x) = \big\langle\, \sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(r),\ x(r{+}1), x(r{+}2), \ldots \big\rangle$$

は局所同相写像で, 各点の逆像は 2^r 個の点からなるから, 疎集合の φ_σ のもとでの逆像はまた疎集合である．したがって, $\varphi_\sigma^{-1}[N_\sigma \setminus A]$ は疎集合である．いっぽう, A が末尾集合であることから,

$$\varphi_\sigma^{-1}[N_\sigma \setminus A] = \varphi_\sigma^{-1}[N_\sigma] \setminus A = 2^{\mathbb{N}} \setminus A$$

である．したがって, A が疎集合でなければ A の補集合が疎集合である．[**証明終**]

3.3. 位相的 0-1 法則からの帰結として, **同値関係 $=^*$ のもとで不変な BP-可測関数は, 疎集合上を除いて定数である** という結果が得られる．一方, 集合と特徴関数を同一視して $\mathbb{N}$ 上の集合関数を $2^{\mathbb{N}}$ 上の関数と考えると, 定理 1 にあらわれた集合関数 μ は容易にわかるように $=^*$ のもとで不変である．

3.4. そこで, **定理 1 のような集合関数 μ が BP-可測であったと仮定しよう．** すると, μ は疎集合上を除いて定数となる．この一定値はなにだろうか?

冪集合 $P(\mathbb{N})$ 上の補集合演算は, カントール空間としての $2^{\mathbb{N}}$ 上の自己同相写像であるから, 疎集合を疎集合にうつす．したがって, $P(\mathbb{N})$ の部分集合 A が疎集合であれば,

$$\left\{ a \subset \mathbb{N} \;\middle|\; a \in A \text{ または } \mathbb{N} \setminus a \in A \right\}$$

も疎集合である. さて, われわれの集合関数 μ が疎集合上を除いてとる一定値 ξ を考えよう. 上の考察により, $\mu(a) = \mu(\mathbb{N} \setminus a) = \xi$ となる $a \subset \mathbb{N}$ が存在するはずなので $\xi = 1 - \xi$ したがって $\xi = 1/2$ ということになる. 要するに, **このとき, μ は疎集合上を除いて値 $\frac{1}{2}$ をとる.**

§4. ひとつの組合せ論的補題

この節の補題 4.4 によって, 議論に最後のとどめが刺される. もっともそれは次節のお楽しみ.

4.1. 以後, 話を簡単にするために, 疎集合の補集合を**補疎集合**と呼ぶことにする.

4.2. $2^{\mathbb{N}}$ の部分集合 A が補疎集合であるためには, 稠密な開集合の列

$$G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots$$

で, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \subset A$ となるものが存在することが必要, かつ十分である.

4.3. 有限列 σ と σ' に対して, σ のあとに σ' を連結してできる有限列を $\sigma^\frown\sigma'$ と書くことにしよう. すると, $2^{\mathbb{N}}$ の稠密な開集合 G は次の条件をみたす: 任意の有限 2 進列 σ に対してある有限 2 進列 σ' が存在して $N_{\sigma^\frown\sigma'} \subset G$ をみたす.

4.4. 補題 カントール空間としての $P(\mathbb{N})$ の補疎集合 A が任意に与えられたとき, $\mathbb{N}$ を A に属する 3 つの無限集合によって分割することができる.

[証明] いま, $2^{\mathbb{N}}$ の補疎集合 A に対して, 4.2 で述べたように, 稠密な開集合の列 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がとれたとしよう. このとき, さらに, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ の要素である 2 進列はすべて値 0 と 1 の両方を無限回とると仮定しても一般性は損なわれない. そのような開集合列 $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して, 有限 2 進列の 3 本の系列 $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\upsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を, 以下のようにとろう.

ステージ 1: まず, σ_1 を $N_{\sigma_1} \subset G_1$ となるようにとり, τ_1 は σ_1 のビット反転とし, υ_1 はそれらと同じ長さの 0 の並びとする.

ステージ 2: つぎに $N_{\tau_1^\frown\tau_2} \subset G_2$ となるように τ_2 をとり, υ_2 は τ_2 のビット反転とし, σ_2 はそれらと同じ長さの 0 の並びとする.

ステージ 3： つぎに $N_{\upsilon_1^\frown\upsilon_2^\frown\upsilon_3} \subset G_3$ となるように υ_3 をとり, σ_3 は υ_3 のビット反転とし, τ_3 はそれらと同じ長さの 0 の並びとする.

以下同様に, ステージ $n = 3k - 2$ では $N_{\sigma_1^\frown\cdots^\frown\sigma_n} \subset G_n$ となるように σ_n をとってそのビット反転を τ_n とし υ_n は同じ長さの 0 の並びとする. また, $n = 3k - 1$, $n = 3k$ のときは, σ_n, τ_n, υ_n の役割を巡回的に入れ替えて同様に構成する. 2 進有限列は自然数でコードされるから, この構成には選択公理は不要である.

そうすると, 三本の無限列

$$\begin{aligned} x &= \sigma_1^\frown\sigma_2^\frown\sigma_3^\frown\cdots \\ y &= \tau_1^\frown\tau_2^\frown\tau_3^\frown\cdots \\ z &= \upsilon_1^\frown\upsilon_2^\frown\upsilon_3^\frown\cdots \end{aligned}$$

が得られる. これらはいずれも $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ に属するから, A の要素である. しかも構成の仕方から x, y, z はいずれも値 0 と 1 を無限回とり, しかもどの桁をみても 3 つのうちちょうど 1 つのビットが立っている. これを $P(\mathbb{N})$ の議論に書き換えると, 補題の結論が得られる. **[証明終]**

[コメント] 3 つというところには特別な意味はない. 4 つでも 5 つでも望みどおりにできることは証明をみればあきらかだろう.

§5. 結論と蛇足

いよいよ大詰め. ℓ^1 が回帰的でなかったとしたら, 定理 1 で述べたような $\mathbb{N}$ 上の集合関数 (有限集合を零化する有限加法的確率測度) が存在する. もしもそのような集合関数 μ が BP-可測であったとすると, 補疎集合上において μ は値 $\frac{1}{2}$ をとる. ところが, 補題 4.4 は, 補疎集合に属する 3 つの無限集合によって $\mathbb{N}$ を分割することができると告げている. とすると, その 3 つの集合における μ の値がどれも $\frac{1}{2}$ であるというのは μ の加法性に矛盾している. こうして次のことが証明された.

定理 2 (ZF+AC$_{\aleph_0}$) 定理 1 のような集合関数, すなわち $\mathbb{N}$ のすべての部分集合にたいして定義された, 有限集合を零化する有限加法的確率測度は, カントール空間の関数とみて BP-可測でない.

BP-可測でない関数が存在するとすれば, ベールの性質をもたない $2^{\mathbb{N}}$ の部分集合も存在する. このとき $\mathbb{R}$ のベールの性質をもたない部分集合も存在する. ゆえに **ℓ^1 が回帰的でないとすると, 実数直線のベールの性質をもたない部分集合が存在する.** いっぽう, 2.10 で述べたとおり, ベールの性質をもたない集合の存在は ZF+AC$_{\aleph_0}$ において証明できない. こうして, 最終的な結論としては

定理 3 ZF が矛盾を含まない限り, 数列空間 ℓ^1 が回帰的でないことを ZF+AC$_{\aleph_0}$ から証明することはできない. したがって, ZF+AC$_{\aleph_0}$+"数列空間 ℓ^1 は回帰的である" は矛盾を含まない.

ところで, ℓ^1 が回帰的であるということはとりもなおさず ハーン・バナッハの定理が ℓ^∞ について破れていることをも意味することには注意が必要だと思われる.

ZF+AC$_{\aleph_0}$ は ZFC より真に弱い部分体系であるから, ZF+AC$_{\aleph_0}$ で証明できる命題はすべて ZFC の定理である. ここでは「選択公理を弱めた ZF+AC$_{\aleph_0}$ のもとでは ℓ^1 が回帰的でないことを証明できない」というメタ数学的命題を (定理 3 において) 示したが, 一見これと見分けがつけにくい **「選択公理を弱めた ZF+AC$_{\aleph_0}$ のもとでは ℓ^1 の回帰性が証明できる」というメタ数学的言明は, 単なる誤謬である.**

ここでは, ℓ^1 の回帰性を証明するための追加の仮説として "数直線のすべての部分集合がベールの性質を有する" を用いた. この仮説を "数直線のすべての部分集合がルベーグ可測である" におきかえられるかどうかは興味深い. 既にどこかに結果があるのかもしれないが自分は知らないし, 簡単にはわからない. というのも補題 4.4 に対応するルベーグ可測集合に関する結果は (ほとんどすべての $\mathbb{N}$ の部分集合が漸近密度 $\frac{1}{2}$ をもつことから容易にわかるとおり) 成立しないからである.

関数空間 $L^1([0,1])$ について同様の議論を試みたとしよう. そのとき, 有限加法的な関数の定義域は $P(\mathbb{N})$ から測度ブール代数 (単位閉区間のボレル部分集合のなす σ-代数をルベーグ零集合の σ-イデアルで割った商ブール代数) になり, 対象が複雑なので, ℓ^1 の場合と単純に並行した議論では済みそうにない. この問題についても引き続き考えていきたい.

参考文献

[1] 前田周一郎, **函数解析**, 森北出版 (1974)

[2] R.M.Solovay, *A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable,* Ann. Math., **92** (1970), 1–56.

[3] T.Jech, ***The Axiom of Choice***, North-Holland (1973)/Dover (2008)